

RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

GAETANO FICHERA

Sulla derivazione delle funzioni additive d'insieme

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 23 (1954), p. 366-397

[<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1954__23__366_0>](http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1954__23__366_0)

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1954, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*
<http://www.numdam.org/>

SULLA DERIVAZIONE DELLE FUNZIONI ADDITIVE D' INSIEME

Memoria () di GAETANO FICHERA (a Trieste)*

Scopo della presente Memoria è l'esposizione di una teoria relativa alla derivazione delle funzioni additive e a variazione limitata dipendenti da un insieme astratto e definite su una opportuna famiglia di tali insiemi.

Principale oggetto è estendere alle dette funzioni il classico teorema della *decomposizione di Lebesgue*, che costituisce il risultato culminante della teoria della derivazione delle funzioni additive e a variazione limitata, definite in una famiglia di insiemi boreliani (in particolare quella degli intervalli) di uno spazio euclideo S_r .

A quanto mi consta, i risultati che in tale indirizzo sono stati finora raggiunti, si riferiscono a funzioni completamente additive di insieme e non mi pare sia stato considerato il caso della semplice additività.

La presente trattazione si avvale di una definizione di derivata per una funzione d'insieme che si discosta da quella tradizionale, ottenuta operando un opportuno passaggio al limite su un *rapporto incrementale*, un rapporto, cioè, avente a numeratore la funzione derivanda e a denominatore la *misura* rispetto alla quale si esegue la derivazione.

In verità tale procedimento, per pervenire alla definizione di derivata, può pienamente avvalersi del suo carattere essenzialmente *locale*, solo nel caso ben particolare delle funzioni additive definite sugli intervalli dell'asse reale.

*) Pervenuta in Redazione il 24 Luglio 1954.

È ben noto, infatti, come, passando dagli intervalli lineari a quelli a due o più dimensioni, occorra discriminare il processo di passaggio al limite, imponendo che esso sia fatto con un *parametro di regolarità*, o per mezzo di un *sistema di reticoli*. Passando quindi dall'una alle due o più dimensioni, la derivazione cessa di essere un fatto locale ed occorre che il procedimento di passaggio al limite, per pervenire alla derivata in un dato punto, sia in qualche modo collegato con quelli che danno la derivata negli altri punti.

Com'è naturale, la questione si presenta ancora più complicata quando si esca dagli spazi euclidei e si considerino funzioni dipendenti da insiemi contenuti in uno spazio metrico o topologico. Esistono diverse pregevoli ricerche intese ad estendere a spazi siffatti i procedimenti basati sull'impiego dei reticoli o sul teorema di copertura di Vitali¹⁾.

Credo però spontaneo chiedersi — specie volendo formulare una teoria relativa agli insiemi astratti — se non sia conveniente abbandonare il punto di vista tradizionale, ricercando una definizione di derivata che sia atta a porre meglio in luce la sua dipendenza *globale* dalla funzione d'insieme primitiva.

Una siffatta definizione viene impiegata nella presente Memoria. Essa introduce la derivata di una funzione additiva non negativa mediante una proprietà variazionale, cioè come funzione massimante un certo funzionale in una ben determinata classe.

D'altronde, funzioni verificanti proprietà variazionali del tipo testè detto, sono state già impiegate in qualcuna delle diverse dimostrazioni che vengono date del cosiddetto teorema di Radon-Nikodym²⁾.

È però da notare che in tal caso ci si riferisce a funzioni *assolutamente continue* e quindi completamente additive, men-

¹⁾ Cfr. [4] (i numeri si riferiscono alla Bibliografia alla fine della presente Memoria) e la Bibliografia ivi citata a pag. 267-268. Cfr. anche il recente lavoro di O. HAUPT e C. PAUC [6].

²⁾ Cfr. [5], pag. 129.

tre che le maggiori difficoltà, che la teoria presenta, derivano appunto dall'abbandonare l'ipotesi della completa additività.

In effetti, come si vedrà, il maggiore ostacolo che si frappone al conseguimento della sopradetta decomposizione di Lebesgue, è il poter caratterizzare quelle funzioni additive (semplicemente e non completamente) dotate di derivata nulla.

Prima di entrare nell'argomento specifico a cui è dedicata la presente Memoria, ho ritenuto opportuno, per dare significato preciso alla nomenclatura ed ai concetti impiegati in seguito, fare alcune premesse relative alla teoria della misura ed all'integrazione negli insiemi astratti.

1. - Premesse relative alla teoria della misura e della integrazione negli insiemi astratti ³⁾.

Diremo *ambiente* della famiglia di insiemi astratti $\{I\}$ l'insieme S somma di tutti gli insiemi della famiglia. La famiglia $\{I\}$ sarà detta un *semi-anello* o *famiglia elementare* se verifica le seguenti condizioni:

1) È chiusa rispetto al prodotto, cioè contenendo due insiemi, ne contiene anche l'intersezione.

2) Se I' e I'' sono due suoi insiemi ed è $I' \subset I''$, esistono un numero finito n di insiemi di essa $I_1, I_2, \dots, I_n$ a due a due disgiunti e tali che, posto $I_0 = I'$, si abbia:

$$I'' = \sum_{k=0}^n I_k \quad (*)$$

³⁾ Per la dimostrazione dei teoremi enunciati in questo paragrafo, cfr. [3]. Per altre trattazioni della teoria della misura in insiemi astratti, cfr. [2], [4], [5], [7], [8], [11], [12]. Tali trattazioni, pur avendo, ciascuna, un'impostazione non sempre simile a quella assunta in [3], contengono fra tutte, più o meno completamente, i teoremi fondamentali qui riportati.

⁴⁾ Scrivendo $\sum_{k=0}^n I_k$ oppure $I_0 + I_1 + \dots + I_n$, intenderemo che gli insiemi I_k sono a due a due disgiunti. Se è $I = \sum_{k=0}^n I_k$, si dirà che si è decomposto I negli insiemi $I_0, I_1, \dots, I_n$ o che i detti insiemi costituiscono una *decomposizione* di I .

ed inoltre qualunque sia $h \leq n$ l'insieme $\sum_{k=0}^h I_k$ appartiene alla famiglia $\{I\}$.

Diremo che $\alpha(I)$ è una *funzione additiva e a variazione limitata* (funzione AVL) definita in $\{I\}$ se:

$$1) I = \sum_{k=1}^n I_k \text{ implica } \alpha(I) = \sum_{k=1}^n \alpha(I_k).$$

2) Indicata con δ_I la generica decomposizione di I in un numero finito, $I_1, I_2, \dots, I_n$, di insiemi di $\{I\}$ e posto:

$$\sigma(\delta_I) = \sum_{k=1}^n |\alpha(I_k)|,$$

l'insieme numerico descritto da $\sigma(\delta_I)$ al variare comunque di δ_I è limitato qualunque sia I in $\{I\}$.

Sia $v_\alpha(I)$ l'estremo superiore di $\sigma(\delta_I)$. Tale funzione è additiva ed, essendo non negativa, a variazione limitata. Tali sono anche le due funzioni $p_\alpha(I)$ e $q_\alpha(I)$ estremi superiori, rispettivamente, di:

$$\sigma_+(\delta_I) = \sum_{i=1}^r \alpha(I_{h_i}) \qquad \sigma_-(\delta_I) = - \sum_{j=1}^s \alpha(I_{k_j}),$$

essendo $I_{h_1}, I_{h_2}, \dots, I_{h_r}$ quelli fra gli insiemi $I_1, I_2, \dots, I_n$ nei quali α è positiva e $I_{k_1}, I_{k_2}, \dots, I_{k_s}$ i rimanenti.

La $v_\alpha(I)$ dicesi *variazione totale* di α , la $p_\alpha(I)$ *variazione positiva* e la $q_\alpha(I)$ *variazione negativa*.

Sussistono le relazioni:

$$\begin{aligned} \alpha(I) &= p_\alpha(I) - q_\alpha(I); \\ v_\alpha(I) &= p_\alpha(I) + q_\alpha(I). \end{aligned}$$

La prima di esse dicesi *decomposizione di Jordan* della funzione AVL $\alpha(I)$.

Diremo che la famiglia di insiemi $\{P\}$ è un *anello* o una *famiglia additiva* se, contenendo due insiemi P' e P'' , contiene $P' - P''$ e $P' + P''$. È evidente che un anello è anche un semi-anello, ma non viceversa. Diremo *anello minimo* o *famiglia additiva minima* contenente una data famiglia $\{I\}$ l'intersezione di tutti gli anelli — che è ancora un anello — contenenti $\{I\}$. Se $\{I\}$ è un semi-anello, l'anello minimo è costituito da tutti

gli insiemi contenuti nell'ambiente S , ciascuno dei quali è somma di un numero finito di insiemi di $\{I\}$.

Sussiste il seguente *primo teorema di prolungamento*:

I. Sia $\alpha(I)$ AVL e definita nel semi-anello $\{I\}$. Esiste ed è unica la funzione $\beta(P)$ definita nell'anello minimo $\{P\}$ che contiene $\{I\}$, tale che per ogni I di $\{I\}$ si abbia:

$$\beta(I) = \alpha(I).$$

Inoltre le variazioni — totale, positiva e negativa — della $\beta(P)$ sono i prolungamenti delle corrispondenti variazioni della $\alpha(I)$.

La $\beta(P)$ sarà completamente additiva se dall'essere $P = \sum_k P_k$ con i P_k anche in infinità numerabile, segue $\beta(P) = \sum_k \beta(P_k)$.

Una funzione completamente additiva e a variazione limitata sarà denotata con CAVL. Perchè la $\beta(P)$ prolungamento della $\alpha(I)$ sia CAVL, occorre e basta che tale sia la $\alpha(I)$. In tal caso saranno anche CAVL $v_\beta(P)$, $p_\beta(P)$ e $q_\beta(P)$.

Dirò che la famiglia di insiemi $\{B\}$ è una famiglia *totalmente additiva* se:

- 1) è additiva:
- 2) considerata comunque una successione $B_1, B_2, \dots, B_k, \dots$ di suoi insiemi, tutti contenuti in uno stesso insieme B della famiglia, appartiene ad essa l'insieme $\sum_{k=1}^{\infty} B_k$ ⁵⁾.

Diremo *famiglia totalmente additiva minima* contenente una data famiglia $\{P\}$ l'intersezione di tutte le famiglie totalmente additive — che è ancora una famiglia siffatta — contenenti $\{P\}$.

Assegnato un semi-anello $\{I\}$, diremo *insiemi di tipo (i)*, gli insiemi ad esso appartenenti, *insiemi di tipo (p)*, quelli dell'anello minimo $\{P\}$ che contiene $\{I\}$, e *insiemi di tipo (b)*, quelli della famiglia totalmente additiva minima $\{B\}$ che contiene $\{P\}$.

⁵⁾ Questa definizione è lievemente differente da quella di σ -anello (in inglese o in tedesco σ -Ring), che suole assumersi nella teoria della misura.

Se $\{I\}$ è la famiglia degli intervalli superiormente aperti⁶⁾ di uno spazio euclideo S_r , se cioè gli insiemi di tipo (i) sono gli intervalli siffatti, quelli di tipo (p) sono i plurintervalli (superiormente aperti) di S_r , cioè gli insiemi ciascuno dei quali è somma di un numero finito di intervalli superiormente aperti e, infine, gli insiemi di tipo (b) sono i boreliani limitati di S_r .

Sussiste il seguente *secondo teorema di prolungamento*:

II. Sia $\beta(P)$ una funzione CAVL definita nell'anello $\{P\}$. Esiste ed è unica una funzione $\mu(B)$, CAVL, definita nella famiglia totalmente additiva minima $\{B\}$ che contiene $\{P\}$, la quale su ogni P di $\{P\}$ coincide con $\beta(P)$.

Inoltre le variazioni — totale, positiva e negativa — di $\mu(B)$ sono i prolungamenti delle corrispondenti variazioni di $\beta(P)$.

Fissato il semi-anello $\{I\}$, diremo *misura* ogni funzione $\mu(I)$ CAVL definita in $\{I\}$. Dai teoremi I e II segue che la μ risulta definita nella famiglia totalmente additiva minima che contiene $\{I\}$.

Oltre agli insiemi di tipo (i), (p) e (b), considereremo anche altri due tipi di insiemi: *insiemi di tipo (a)* e *insiemi di tipo (c)*.

Dirò di tipo (a) ogni insieme A , contenuto nell'ambiente S del fissato semi-anello $\{I\}$, che sia contenuto in qualche insieme di tipo (p) e tale che esista una successione $\{P_n\}$ di insiemi di tipo (p) non decrescente⁷⁾ ed avente per limite A .

Dirò invece che C è un insieme di tipo (c) se esso è limite di una successione $\{P_n\}$ non crescente di insiemi di tipo (p).

Si conviene di considerare l'insieme vuoto sia di tipo (a) che di tipo (c).

⁶⁾ Date due r -ple di numeri reali $(a_1, a_2, \dots, a_r)$ e $(b_1, b_2, \dots, b_r)$ con $a_k < b_k$ ($k = 1, 2, \dots, r$), dicesi intervallo superiormente aperto di S_r l'insieme dei punti di S_r le cui coordinate verificano le limitazioni:

$$a_k \leq x_k < b_k \quad (k = 1, 2, \dots, r).$$

⁷⁾ Una successione di insiemi $\{P_n\}$ dicesi non decrescente se $P_n \subset P_{n+1}$ e non crescente se $P_n \supset P_{n+1}$ ($n = 1, 2, \dots$).

Sussistono le seguenti proprietà:

- 1) Se $P \supset A$, $P - A$ è di tipo (c);
- 2) Se $P \supset C$, $P - C$ è di tipo (a);
- 3) Se $A_1, A_2, \dots, A_n$ sono di tipo (a), tali sono anche $\sum_{k=1}^n A_k$ e $\prod_{k=1}^n A_k$;
- 4) Se C_1, C_2, C_n sono di tipo (c), tali sono anche $\sum_{k=1}^n C_k$ e $\prod_{k=1}^n C_k$;
- 5) Se la successione $\{A_k\}$ è di insiemi di tipo (a), se riesce $A_k \subset P$ con P di tipo (p), è di tipo (a) l'insieme $\sum_{k=1}^{\infty} A_k$;
- 6) Se la successione $\{C_k\}$ è di insiemi di tipo (c), tale è l'insieme $\prod_{k=1}^{\infty} C_k$;
- 7) Ogni insieme di tipo (p) è tanto di tipo (a) che di tipo (c).

Sussiste il seguente teorema:

III. Se μ è una misura non negativa e B un insieme di tipo (b), dato comunque $\varepsilon > 0$, esistono un insieme di tipo (a): A_ε ed uno di tipo (c): C_ε , tali che:

$$A_\varepsilon \supset B \supset C_\varepsilon, \quad \mu(A_\varepsilon) - \mu(C_\varepsilon) < \varepsilon.$$

Nel seguito faremo anche uso del seguente teorema di prolungamento dovuto a Caccioppoli [1] ed esteso da Cafiero [2] agli insiemi astratti ⁸⁾.

IV. Sia $\{C\}$ una famiglia di insiemi astratti la quale gode delle seguenti proprietà:

- 1) Se contiene gli insiemi $C_1, C_2, \dots, C_n$, contiene la loro somma e la loro intersezione.

⁸⁾ In una recensione della Monografia [2] di Cafiero, apparsa su Mathematical Reviews (vol. 15 - n. 2, pag. 110) vengono mosse delle critiche al teorema di Caccioppoli, enunciato nel testo, tendenti ad infirmare la validità del teorema stesso. Mi sia consentito osservare che tali critiche si rivelano ingiustificate. Evidentemente il Recensore ha confuso il detto teorema di prolungamento con altra, diversa, questione.

2) Se contiene la successione $\{C_k\}$, contiene l'insieme $\prod_{k=1}^{\infty} C_k$.

3) L'insieme vuoto e l'ambiente S di $\{C\}$ appartengono a $\{C\}$.

4) Per ogni insieme C di $\{C\}$ esistono due successioni $\{C_n\}$ ed $\{A_n\}$, la prima costituita da insiemi di $\{C\}$ e la seconda da insiemi i cui complementari (rispetto ad S) appartengono a $\{C\}$, tali che:

$$C_n \supset A_n \supset C_{n+1} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

e convergenti a C .

Sia $\mu(C)$ una funzione non negativa definita in $\{C\}$ e verificante le seguenti condizioni:

- a) $\mu(C_1) \leq \mu(C_2)$, se $C_1 \subset C_2$;
- b) $\mu(C_1 + C_2) \leq \mu(C_1) + \mu(C_2)$, sussistendo il segno $=$ se $C_1 \cdot C_2$ è vuoto;
- c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(C_n) = \mu(\lim_{n \rightarrow \infty} C_n)$ se $C_n \supset C_{n+1}$ ($n = 1, 2, \dots$).

Esiste ed è unica una funzione CAVL, la quale è non negativa, è definita nella famiglia totalmente additiva minima che contiene $\{C\}$ e coincide con $\mu(C)$ per ogni C di $\{C\}$.

Se B è un insieme di tipo (b) e $f(x)$ una funzione reale in esso definita, diremo che la $f(x)$ è una funzione di tipo (b) se, qualunque sia il numero reale k , è di tipo (b) l'insieme dei punti, che denoteremo con $B(f \geq k)$, nei quali è $f(x) \geq k$ ⁹⁾.

Nel caso che S sia lo S_r euclideo e gli insiemi di tipo (b) i boreliani di tale spazio, le funzioni di tipo (b) sono le cosiddette funzioni di Borel o misurabili (B). Le proprietà di cui godono le funzioni di tipo (b) nel caso generale sono perfettamente analoghe a quelle di dette funzioni di Borel, per modo che è inutile qui riportarle, pur dovendole in seguito sfruttare.

Sia B di tipo (b) ed $f(x)$ una funzione limitata in esso definita. Sia μ una misura non negativa. Decomposto B negli

⁹⁾ Nella presente Memoria non introdurremo i concetti più generali di insieme μ -misurabile e funzione μ -misurabile, secondo quanto è fatto in [3]. In effetti, per gli sviluppi ulteriori, basta limitarsi a considerare gli insiemi e le funzioni di tipo (b).

insiemi $B_1, B_2, \dots, B_n$ tutti di tipo (b) e detti $e'_f(B_h)$ e $e''_f(B_h)$ gli estremi, inferiore e superiore, di $f(x)$ in B_h , consideriamo le due somme

$$\sum_{h=1}^n e'_f(B_h) \mu(B_h) \quad , \quad \sum_{h=1}^n e''_f(B_h) \mu(B_h).$$

Si dimostra che se $f(x)$ è di tipo (b) esse descrivono, al variare comunque della decomposizione di B , due classi numeriche contigue. L'elemento di separazione di tali classi si definisce come l'integrale di $f(x)$ rispetto a μ esteso a B e si indica con

$$\int_B f(x) d\mu.$$

Se μ è una misura che assume valori di qualsivoglia segno, dette p_μ e q_μ le variazioni — positiva e negativa — si pone per definizione:

$$\int_B f(x) d\mu = \int_B f(x) dp_\mu - \int_B f(x) dq_\mu.$$

Il concetto di integrale si estende anche a funzioni non limitate ¹⁰⁾.

Supposta μ non negativa, la $f(x)$, di tipo (b) in B , dicesi ivi μ -sommabile ¹¹⁾ se l'insieme numerico descritto da:

$$\int_{B(f \leq k)} |f(x)| d\mu$$

è limitato al variare di k . Se è $f(x) \geq 0$ in B , si pone:

$$\int_B f(x) d\mu = \text{estr. sup.} \int_{B(f \leq k)} f(x) d\mu$$

¹⁰⁾ Non considereremo qui — dato che non ci servirà in seguito — il caso di insiemi di integrazione più generali di quelli di tipo (b), ad esempio non di misura finita. Per una più generale definizione di funzione sommabile cfr. [3], cap. VII.

¹¹⁾ Nel seguito, allorchè parleremo di funzione μ -sommabile, intenderemo, implicitamente, che essa sia di tipo (b).

e nel caso generale:

$$\int_B f(x) d\mu = \frac{1}{2} \int_B (|f(x)| + f(x)) d\mu - \frac{1}{2} \int_B (|f(x)| - f(x)) d\mu.$$

Se $f(x)$ è limitata in B , si ritrova il valore dato con la precedente definizione.

Se μ è una misura che assume valori di qualsivoglia segno, la $f(x)$ si dirà μ -sommabile se lo è rispetto alla v_μ . Essa lo sarà allora anche rispetto a p_μ e q_μ .

L'integrale di $f(x)$ si definisce ponendo:

$$\int_B f(x) d\mu = \int_B f(x) dp_\mu - \int_B f(x) dq_\mu.$$

L'integrale, così definito, gode delle proprietà ben note. È distributivo e completamente additivo. Vogliamo esplicitamente notare la proprietà di *assoluta continuità* dell'integrale secondo la quale ad ogni $\varepsilon > 0$ corrisponde un $\sigma_\varepsilon > 0$ tale che per ogni insieme U di tipo (b) contenuto in B e tale che $\mu(U) < \sigma_\varepsilon$ si ha:

$$\int_U |f(x)| dv_\mu < \varepsilon.$$

Questi brevi richiami sulla teoria della misura e dell'integrazione dovrebbero essere sufficienti per dare preciso significato ai concetti, relativi a tale teoria, che saranno impiegati nel seguito.

2. - Definizione di derivata rispetto ad una misura per una funzione reale non negativa e additiva dipendente da un insieme astratto.

Sia $\{I\}$ una famiglia elementare di insiemi astratti. In $\{I\}$ sia definita la misura non negativa $\mu(I)$. Sia $F(I)$ un'arbitraria funzione reale non negativa e additiva definita in $\{I\}$. Fissato I_0 in $\{I\}$, indichiamo con $\Theta[F, I_0]$ la classe costituita da tutte le funzioni reali $f(x)$, definite in I_0 , che godono delle seguenti proprietà:

a) ogni $f(x)$ è non negativa e μ -sommabile in I_0 ;

b) assunto comunque in $\{I\}$ l'insieme I contenuto in I_0 , si ha:

$$\int_I f(x) d\mu \leq F(I).$$

La classe $\Theta[F, I_0]$ non è vuota contenendo la funzione identicamente nulla in I_0 . Si consideri il funzionale:

$$J_{I_0}(f) = \int_{I_0} f(x) d\mu$$

per ogni $f(x)$ della classe $\Theta[F, I_0]$.

Orbene, se $J_{I_0}(f)$ è dotato di massimo in detta classe, diremo che $F(I)$ è *derivabile rispetto alla misura* μ , o, più semplicemente, è μ -derivabile sull'insieme I_0 e diremo μ -derivata (*derivata rispetto a* μ) della $F(I)$ su I_0 la funzione $F'(x)$ che dà il massimo di $J_{I_0}(f)$ in $\Theta[F, I_0]$.

Se è $I \subset I_0$, la $F'(x)$ rende anche massimo $J_I(f)$ in $\Theta[F, I]$. Non può infatti esistere una $\bar{f}(x)$ μ -sommabile in I e tale che $J_I(F') < J_I(\bar{f})$ perchè allora, posto:

$$\bar{F}' \begin{cases} = \bar{f} & \text{per } x \in I, \\ = F' & \text{per } x \in I_0 - I, \end{cases}$$

la $\bar{F}'$ apparterebbe a $\Theta[F, I_0]$ e sarebbe $J_{I_0}(\bar{F}') > J_{I_0}(F')$.

La μ -derivata $F'(x)$ di $F(I)$ su I_0 è determinata a meno dell'addizione di una funzione μ -equivalente a zero in I_0 ¹²⁾. Infatti se anche $\Phi'(x)$ rende massimo $J_{I_0}(f)$ in $\Theta[F, I_0]$, per quanto si è osservato, sarà per ogni I di $\{I\}$, contenuto in I_0 :

$$\int_I [F'(x) - \Phi'(x)] d\mu = 0$$

e quindi in ogni insieme B di tipo (b) tale che $B \subset I_0$:

$$\int_B [F'(x) - \Phi'(x)] d\mu = 0.$$

¹²⁾ Cioè nulla in tutti i punti di I_0 , tranne che, eventualmente, nei punti di un insieme N di tipo (b) tale che $\mu(N) = 0$.

donde la μ -equivalenza di $F'(x)$ e $\Phi'(x)$ ¹³⁾.

Possiamo quindi affermare:

V. Se $F(I)$ è μ -derivabile su I_0 , lo è altresì su ogni insieme I di $\{I\}$ in esso contenuto e se $F'(x)$ è la sua μ -derivata su I_0 , essa è tale anche su I . La μ -derivata di $F(I)$ è determinata a meno di una funzione additiva μ -equivalente a zero.

3. - Derivazione delle funzioni AVL. Funzioni μ -singolari.

Supponiamo ora che $F(I)$ sia AVL in $\{I\}$. Indichiamo, come nel numero precedente, con $\mu(I)$ una misura non negativa definita nel semi-anello $\{I\}$.

Def. - Diremo che la funzione AVL $F(I)$ è μ -derivabile su I_0 , se sono tali le due funzioni $p_F(I)$ e $q_F(I)$.

Definiremo al modo seguente la μ -derivata $F'(x)$ di $F(I)$ su I_0 :

$$F'(x) = p'_F(x) - q'_F(x),$$

essendo $p'_F(x)$ e $q'_F(x)$ le μ -derivate rispettivamente di $p_F(I)$ e $q_F(I)$.

Sussiste il seguente teorema:

VI. Se $F(I)$ è AVL in $\{I\}$, essa è μ -derivabile su ogni insieme I_0 di $\{I\}$.

Evidentemente basta considerare il caso di una $F(I)$ non negativa. Sia λ l'estremo superiore di $J_{I_0}(f)$ in $\Theta[F, I_0]$ e sia $\{f_n(x)\}$ una successione di funzioni di $\Theta[F, I_0]$ tali che:

$$\int_{I_0} f_n(x) d\mu > \lambda - \frac{1}{n}.$$

Poniamo:

$$\Phi_n(x) = \text{estr. sup.}_{1 \leq k \leq n} f_k(x).$$

La $\Phi_n(x)$ è non negativa e μ -sommabile in I_0 .

¹³⁾ Due funzioni diconsi μ -equivalenti se la loro differenza è μ -equivalente a zero.

Detto I un qualsiasi insieme di $\{I\}$ contenuto in I_0 , è possibile decomporre I in n insiemi di tipo (b): $B_1, B_2, \dots, B_n$ (qualcuno dei quali eventualmente vuoto), tali che riesca:

$$\Phi_n(x) = f_i(x) \quad \text{per } x \subset B_i \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Sia C_i un arbitrario insieme di tipo (c) contenuto in B_i . Dato arbitrariamente $\varepsilon > 0$, sia σ_ε tale che, se U è un insieme di tipo (b) per il quale $\mu(U) < \sigma_\varepsilon$, si abbia:

$$\int_U f_i(x) d\mu < \frac{\varepsilon}{n} \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Per la definizione di insieme di tipo (c), ad ogni C_i può associarsi una successione $\{P_k^{(i)}\}$ non crescente di insiemi di tipo (p) convergente a C_i . Si può supporre che sia $P_k^{(i)} \subset I$, quali si siano k ed i . Poichè $C_i \cdot C_h$ è vuoto, per $i \neq h$, la successione $\{P_k^{(i)} \cdot P_k^{(h)}\}$ converge verso l'insieme vuoto, epperò sarà $\lim_{k \rightarrow \infty} \mu(P_k^{(i)} \cdot P_k^{(h)}) = 0$. Sia ν un indice tale che, qualunque sia la coppia di indici i ed h con $i \neq h$, riesca $\mu(P_\nu^{(i)} \cdot P_\nu^{(h)}) < \frac{\sigma_\varepsilon}{n}$. Poniamo:

$$Q_1 = P_\nu^{(1)} \quad , \quad Q_i = P_\nu^{(i)} - \sum_{h=1}^{i-1} P_\nu^{(i)} \cdot P_\nu^{(h)} \quad (i = 2, \dots, n).$$

Si ha:

$$\begin{aligned} \int_{\sum_{i=1}^n C_i} \Phi_n(x) d\mu &= \sum_{i=1}^n \int_{C_i} f_i(x) d\mu \leq \sum_{i=1}^n \int_{P_\nu^{(i)}} f_i(x) d\mu = \\ &= \sum_{i=1}^n \int_{Q_i} f_i(x) d\mu + \sum_{i=2}^n \int_{\sum_{h=1}^{i-1} P_\nu^{(i)} \cdot P_\nu^{(h)}} f_i(x) d\mu \leq \sum_{i=1}^n F(Q_i) + \varepsilon \leq F(I) + \varepsilon, \end{aligned}$$

e, data l'arbitrarietà degli insiemi C_i e di ε

$$\int_I \Phi_n(x) d\mu \leq F(I).$$

È così provato che $\Phi_n(x)$ appartiene a $\Theta[F, I_0]$.

Essendo :

$$\Phi_n(x) \leq \Phi_{n+1}(x) \quad , \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{I_0} \Phi_n(x) d\mu = \lambda ,$$

per il cosiddetto teorema di Beppo Levi si ha la convergenza quasi ovunque in I_0 di $\{\Phi_n(x)\}$ verso una funzione $F'(x)$ appartenente a $\Theta[F, I_0]$ e tale che:

$$\int_{I_0} F'(x) d\mu = \lambda .$$

Il teorema è così dimostrato ¹⁴).

D'ora in avanti indicheremo con $F'(x)$ oppure con $\frac{dF}{d\mu}$, a seconda che sia più comodo usare l'una o l'altra scrittura, la μ -derivata di $F(I)$.

Def. - Diremo che la funzione AVL $F(I)$ è μ -singolare sull'insieme I_0 di $\{I\}$ se la μ -derivata di $F(I)$ su I_0 è μ -equivalente a zero.

4. - Funzioni μ -assolutamente continue. Il teorema di Lebesgue-Radon-Nikodym.

I risultati che verranno esposti in questo paragrafo sono già sostanzialmente acquisiti nella letteratura relativa all'argomento ¹⁵). Tuttavia, dovendoci servire di essi per gli ulteriori sviluppi, si è manifestato necessario inquadrarli organicamente nella presente trattazione.

Def. - Diremo che la funzione AVL $F(I)$, definita nella famiglia elementare $\{I\}$ è *assolutamente continua rispetto alla misura non negativa* μ (pure definita in $\{I\}$) o, più semplicemente, è μ -assolutamente continua se, fissato comunque I_0 in $\{I\}$, ad ogni $\epsilon > 0$ può farsi corrispondere un numero positivo σ_ϵ tale che, per ogni insieme P di tipo (p) contenuto in I_0 e verificante la condizione $\mu(P) < \sigma_\epsilon$ si ha $|F(P)| < \epsilon$.

¹⁴) Nelle ipotesi più particolari che $\{I\}$ sia totalmente additiva ed $F(I)$ completamente additiva cfr. [5].

¹⁵) Cfr. [9], [10].

Per indicare che una funzione è μ -assolutamente continua, ci serviremo della sigla μAC .

VII. *Ogni combinazione lineare di funzioni AVL e μAC è una funzione AVL e μAC .*

Dimostrazione ovvia.

VIII. *Se $F(I)$ è AVL e μAC , anche $v_F(I)$, $p_F(I)$, e $q_F(I)$ sono μAC .*

Dato $\varepsilon > 0$, sia σ_ε tale che, per ogni P di tipo (p) per il quale $\mu(P) < \sigma_\varepsilon$, riesca $|F(P)| < \varepsilon$. Sia δ_P un'arbitraria decomposizione di P in un numero finito di insiemi di tipo (p) . Siano $P_1, P_2, \dots, P_n$ gli insiemi di δ_P sui quali la F è non negativa e $Q_1, Q_2, \dots, Q_m$ i rimanenti.

Si ha:

$$\sum_{k=1}^n F(P_k) - \sum_{h=1}^m F(Q_h) < 2\varepsilon.$$

Ciò implica — per l'arbitrarietà di δ_P —:

$$v_F(P) \leq 2\varepsilon,$$

e quindi $v_F(I)$ è μAC . Tali sono anche $p_F(I)$ e $q_F(I)$.

IX. *Ogni funzione AVL $F(I)$ la quale è μAC , è completamente additiva.*

Sia infatti $I = \sum_{k=1}^{\infty} I_k$. Posto $P_n = I - \sum_{k=1}^n I_k$ si ha: $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(P_n) = 0$. Ciò implica: $\lim_{n \rightarrow \infty} F(P_n) = 0$, ossia $F(I) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n F(I_k)$, che prova la completa additività di $F(I)$.

Per il teorema testè dimostrato e per il teor. II, ogni funzione AVL μ -assolutamente continua è definita in tutta la famiglia $\{B\}$ degli insiemi di tipo (b) .

X. *Se la funzione AVL $F(I)$ è μAC , ogni insieme N di tipo (b) avente misura nulla rispetto a μ , ha anche misura assoluta nulla rispetto a F , cioè si ha $v_F(N) = 0$.*

Sia N di tipo (b) e $\mu(N) = 0$. Diciamo P_0 un insieme di tipo (p) contenente N . Dato $\varepsilon > 0$, sia σ_ε tale che, per ogni insieme di tipo (p) contenuto in P_0 e per il quale $\mu(P) < \sigma_\varepsilon$,

si abbia $v_F(P) < \varepsilon$. Diciamo A un insieme di tipo (a) contenente N e contenuto in P_0 e tale che $\mu(A) < \varepsilon_i$. Per ogni $P \subset A$ sarà $\mu(P) < \varepsilon_i$ e quindi $v_F(P) < \varepsilon$. Ciò implica $v_F(A) < \varepsilon$ e, data l'arbitrarietà di ε , $v_F(N) = 0$.

Il concetto di funzione μ AC gioca in modo essenziale nel problema consistente nel determinare tutte le funzioni AVL che possono essere considerate come integrali di funzioni μ -sommabili. Tale problema viene risolto da un fondamentale teorema che daremo fra breve. Occorre ad esso premettere il seguente lemma:

XI. Siano $F(I)$ e $\mu(I)$ due misure non negative definite nella stessa famiglia elementare $\{I\}$. La $F(I)$ sia μ AC e non identicamente nulla.

Ad ogni I di $\{I\}$ tale che $F(I) > 0$, si possono associare un insieme B di tipo (b) contenuto in I ed un numero positivo σ tali che:

- 1) si ha $\mu(B) > 0$,
- 2) in ogni insieme B' di tipo (b) contenuto in B riesce:

$$F(B') - \sigma \mu(B') \geq 0. \quad (1^a)$$

Fissato il numero naturale n , consideriamo la misura $F(I) - \frac{1}{n} \mu(I)$ e sia $I = B_n^+ + B_n^-$ la decomposizione di Hahn dell'insieme I relativa a tale misura ¹⁶⁾. Poniamo:

$$B^{(1)} = \sum_{n=1}^{\infty} B_n^+ \quad , \quad B^{(2)} = \prod_{n=1}^{\infty} B_n^-.$$

Essendo $B^{(2)}$ vuoto o contenuto in ogni B_n^- , si ha:

$$0 \leq F(B^{(2)}) \leq \frac{1}{n} \mu(B^{(2)})$$

¹⁶⁾ Per la dimostrazione di questo teorema e del successivo, cfr. [5].

¹⁷⁾ Cfr. [4] pag. 18-22 e [3] pag. 310. L'insieme B_n^+ è tale che in ogni suo sottoinsieme la misura $F(I) - \frac{1}{n} \mu(I)$ assume solo valori non negativi, mentre in ogni sottoinsieme di B_n^- la detta misura è non positiva.

e quindi $F(B^{(2)}) = 0$. Ciò implica $F(I - B^{(2)}) = F(B^{(1)}) > 0$ e quindi, per il teorema precedente, $\mu(B^{(1)}) > 0$. Deve allora esservi un n_0 tale che $\mu(B_{n_0}^+) > 0$. Assunto $B = B_{n_0}^+$ e $\sigma = \frac{1}{n_0}$, segue la tesi.

Possiamo adesso dare il teorema di Lebesgue-Radon-Nikodym che risolve il problema a cui si era sopra accennato.

XII. Condizione necessaria e sufficiente perchè per la funzione AVL $F(I)$ definita in $\{I\}$, fissato comunque I_0 in $\{I\}$, riesca per ogni $I \subset I_0$:

$$(1) \quad F(I) = \int_I f(x) d\mu$$

con $f(x)$ μ -sommabile in I_0 , è che $F(I)$ sia μAC . In tal caso la $f(x)$, che è determinata a meno dell'addizione di una funzione μ -equivalente a zero, coincide in I_0 con $\frac{dF}{d\mu}$.

Supponiamo sussista la (1) per ogni $I \subset I_0$. Si ha:

$$F(I) = \frac{1}{2} \int_I [|f(x)| + f(x)] d\mu - \frac{1}{2} \int_I [|f(x)| - f(x)] d\mu$$

e, (cfr. [3] pag. 341):

$$v_F(I) = \frac{1}{2} \int_I [|f(x)| + f(x)] d\mu + \frac{1}{2} \int_I [|f(x)| - f(x)] d\mu$$

Ne segue:

$$p_F(I) = \frac{1}{2} \int_I [|f(x)| + f(x)] d\mu, \quad q_F(I) = \frac{1}{2} \int_I [|f(x)| - f(x)] d\mu$$

e, quindi, tenendo presente la definizione di μ -derivata per una funzione d'insieme additiva e non negativa,

$$\frac{dp_F}{d\mu} = \frac{1}{2} [|f(x)| + f(x)] \quad , \quad \frac{dq_F}{d\mu} = \frac{1}{2} [|f(x)| - f(x)] ;$$

ciò implica:

$$\frac{dF}{d\mu} = f(x).$$

Viceversa sia $F(I)$ μAC . Per dimostrare il teorema, basta far vedere che le funzioni μAC $p_F(I)$ e $q_F(I)$ (cfr. teor. VIII) sono gli integrali delle rispettive μ -derivate. Possiamo pertanto limitarci a considerare il caso di una $F(I)$ μAC non negativa. Detta $F'(x)$ la μ -derivata di $F(I)$ in I_0 , poniamo:

$$F^*(I) = F(I) - \int_I F'(x) d\mu.$$

La $F^*(I)$ è $CAVL$ non negativa (ed è μ -singolare in I_0 come segue immediatamente dalla definizione di μ -derivata).

Supponiamo che in qualche $I \subset I_0$ sia $F^*(I) > 0$. Poichè la $F^*(I)$ è μAC , esistono, per il lemma premesso, un insieme B di tipo (b) contenuto in I ed un numero positivo σ tali che:

$$\mu(B) > 0, \quad \sigma\mu(B \cdot I') \leq F^*(B \cdot I') = F(B \cdot I') - \int_{B \cdot I'} F'(x) d\mu$$

per ogni I' di $\{I\}$ contenuto in I .

Sia $\varphi_B(x)$ la funzione che vale 1 in B e 0 in $S - B$ (funzione caratteristica di B). Si ha per ogni $I' \subset I$:

$$\begin{aligned} \int_{I'} [F'(x) + \sigma\varphi_B(x)] d\mu &= \int_{I'} F'(x) d\mu + \sigma\mu(B \cdot I') = \\ &= \int_{I'-B} F'(x) d\mu + \int_{B \cdot I'} F'(x) d\mu + \sigma\mu(B \cdot I') \leq \int_{I'-B} F'(x) d\mu + F(B \cdot I') \leq F(I') \end{aligned}$$

e, d'altra parte, è:

$$J_I(F' + \sigma\varphi_B) = \int_I [F'(x) + \sigma\varphi_B(x)] d\mu = J_I(F') + \sigma\mu(B),$$

cioè:

$$J_I(F' + \sigma\varphi_B) > J_I(F').$$

Questo è assurdo. Deve quindi essere $F^*(I) = 0$ per ogni $I \subset I_0$. Sussiste quindi la (1).

È utile osservare il seguente teorema che inverte la proposizione X.

XIII. Se $F(I)$ e $\mu(I)$ sono due misure definite nella stessa famiglia elementare $\{I\}$, se la μ è non negativa e se per ogni insieme N di tipo (b) tale che $\mu(N) = 0$ è anche $v_F(N) = 0$, allora $F(I)$ è μAC .

I teoremi XI e XII seguitano a sussistere con dimostrazione inalterata se all'ipotesi che $F(I)$ è μAC , si sostituisce quella del presente teorema. Ciò significa che nella detta ipotesi sussiste la (1) per ogni $I \subset I_0$ e qualunque sia I_0 in $\{I\}$. Ne segue che $F(I)$ è μAC .

Per gli ulteriori sviluppi è anche utile il seguente teorema:

XIV. Condizione necessaria e sufficiente perchè la misura $F(I)$ sia μ -singolare su I_0 è che esista un insieme N di tipo (b) contenuto in I_0 tale che $\mu(N) = 0$ ed $F(B) = 0$ per ogni $B \subset I_0 - N$.

La condizione è sufficiente. Sia infatti N l'insieme indicato nell'enunciato. Se $F(I)$ non è μ -singolare su I_0 , sarà $\frac{dp_F}{d\mu} > 0$ oppure $\frac{dq_F}{d\mu} > 0$ in un insieme L contenuto in I_0 e di misura positiva rispetto a μ .

Avremo, ammesso — per fissare le idee — che si verifichi la prima circostanza:

$$p_F(L - N) \geq \int_{L-N} \frac{dp_F}{d\mu} d\mu > 0.$$

Ciò esclude possa essere $F(B) = 0$ per ogni $B \subset L - N$, contrariamente all'ipotesi.

La condizione è necessaria. Escludiamo il caso banale che $F(I)$ sia nulla per ogni $I \subset I_0$. Non può allora essere la $v_F(I)$ μAC nella famiglia $\{I \cdot I_0\}$ perchè allora essendo tale anche $F(I)$, la $F(I)$ sarebbe l'integrale della sua derivata e quindi nulla per $I \subset I_0$.

Diciamo λ l'estremo superiore dei valori che v_F assume sugli insiemi di misura nulla rispetto a μ contenuti in I_0 . Sarà $\lambda \leq v_F(I_0)$. Sia $\{N_k\}$ una successione di insiemi contenuti in I_0 e tali che:

$$\mu(N_k) = 0 \quad , \quad v_F(N_k) > \lambda - \frac{1}{k}.$$

Posto $N = \sum_{k=1}^{\infty} N_k$, si ha:

$$\mu(N) = 0 \quad , \quad \nu_F(N) = \lambda.$$

Per ogni insieme di tipo (b): $B \subset I_0$ poniamo:

$$\Phi_1(B) = p_F(B) - p_F(B \cdot N), \quad \Phi_2(B) = q_F(B) - q_F(B \cdot N) \quad (1^a).$$

La Φ_i ($i=1, 2$) è una misura μAC . Infatti se N' è tale che $\mu(N') = 0$, essendo:

$$\Phi_1(N') = p_F(N' - N \cdot N') \quad , \quad \Phi_2(N') = q_F(N' - N \cdot N'),$$

deve essere $\Phi_i(N') = 0$ ($i=1, 2$) perchè, diversamente, sarebbe $\nu_F(N' - N \cdot N') > 0$ e quindi:

$$\mu(N + N') = 0 \quad , \quad \nu_F(N + N') > \lambda.$$

Abbiamo quindi:

$$p_F(B) = p_F(B \cdot N) + \int_B \frac{d\Phi_1}{d\mu} d\mu \quad , \quad q_F(B) = q_F(B \cdot N) + \int_B \frac{d\Phi_2}{d\mu} d\mu.$$

Poichè è in I_0 :

$$\frac{d\Phi_1}{d\mu} \leq \frac{dp_F}{d\mu} \quad , \quad \frac{d\Phi_2}{d\mu} \leq \frac{dq_F}{d\mu},$$

posto:

$$p_F^*(B) = p_F(B) - \int_B \frac{dp_F}{d\mu} d\mu \quad , \quad q_F^*(B) = q_F(B) - \int_B \frac{dq_F}{d\mu} d\mu,$$

riesce:

$$p_F^*(B) \leq p_F(B \cdot N) \quad , \quad q_F^*(B) \leq q_F(B \cdot N).$$

Ne segue che le funzioni $p_F^*(B)$ e $q_F^*(B)$ sono nulle se è $B \subset I_0 - N$.

1^a) E' da assumere $p_F(B \cdot N) = q_F(B \cdot N) = 0$ se $B \cdot N$ è vuoto.

Essendo per ipotesi quasi ovunque (rispetto a μ) in I_0 :

$$\frac{dp_F}{d\mu} = \frac{dq_F}{d\mu},$$

si ha:

$$F B = p_F^*(B) - q_F^*(B)$$

e, quindi, la tesi.

Dal teorema dimostrato segue ovviamente:

XV. Se $F(I)$ è una misura μ -singolare su I_0 , tali sono ivi $v_F(I)$, $p_F(I)$ e $q_F(I)$

5. La decomposizione di Lebesgue di una funzione AVL.

Sia $\{I\}$ la solita famiglia elementare di insiemi astratti e $F(I)$ una funzione AVL in essa definita. In $\{I\}$ sia anche definita la misura non negativa μ . Fissato I_0 in $\{I\}$, sia A un insieme di tipo (a) contenuto in I_0 .

Poniamo:

$$\Psi(A) = \text{estr. sup.}_{P \subset A} v_F(P).$$

Con P si è indicato un arbitrario insieme di tipo (p) contenuto in A .

Sussiste il seguente teorema:

XVI. Condizione necessaria e sufficiente perchè $F(I)$ sia μAC è che riesca:

$$(2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \Psi(A_n) = 0$$

qualunque sia la successione non crescente $\{A_n\}$ di insiemi di tipo (a), tale che $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) = 0$.

Se $F(I)$ è μAC , tale è $v_F(I)$. Essendo allora $v_F(I)$ completamente additiva (teor. IX), risulta $\Psi(A) = v_F(A)$. In virtù del teor. X si ha la (2).

Dimostriamo ora la sufficienza della condizione. Facciamo intanto vedere che la $F(I)$ è una misura, cioè è completamente additiva. Sia:

$$I = \sum_{k=1}^{\infty} I_k, \quad P_n = I - \sum_{k=1}^n I_k.$$

Per l'ipotesi ammessa si ha:

$$\begin{aligned} |F(I) - \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n F(I_k)| &= \lim_{n \rightarrow \infty} |F(P_n)| \leq \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} v_F(P_n) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \Psi(P_n) = 0. \end{aligned}$$

Sia N un insieme di tipo (b) tale che $\mu(N) = 0$. Se faremo vedere che N non contiene alcun insieme C di tipo (c) tale che $v_F(C) > 0$, avremo dimostrato il teorema.

Sia infatti C un insieme di tipo (c) contenuto in N . Per definizione esiste una successione $\{Q_n\}$ non crescente di insiemi di tipo (p) tale che $\lim Q_n = C$. Poichè si ha $\mu(C) = 0$ ed essendo i Q_n particolari insiemi di tipo (a), per ipotesi avremo, tenendo presente che v_F è una misura: $\lim_{n \rightarrow \infty} v_F(Q_n) = v_F(C) = 0$.

Il seguente teorema può riguardarsi come una estensione alle funzioni $F(I)$ AVL del teorema XIV valido per una misura.

XVII. Condizione necessaria e sufficiente perchè la funzione AVL $F(I)$ non negativa sia μ -singolare su I_0 è che, dato arbitrariamente $\eta > 0$, esista un insieme A_η di tipo (a), contenuto in I_0 , per il quale $\mu(A_\eta) < \eta$ e tale che, assunto comunque un insieme C di tipo (c) in $I_0 - A_\eta$, riesca:

$$\text{estr. inf.}_{P \supset C} F(P) = 0,$$

essendo P un arbitrario insieme di tipo (p) contenente C .

La condizione è necessaria. Sia $F(I)$ μ -singolare su I_0 . Introdotta la funzione $\Psi(A)$, già considerata nel teorema XII ed escluso che $F(I)$ sia μAC — ciò che implicherebbe $F(I) = 0$ per ogni $I \subset I_0$ — esisteranno successioni $\{A_n\}$ del tipo considerato nell'enunciato del teorema XVI, tali che:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Psi(A_n) > 0.$$

Diciamo λ l'estremo superiore dei numeri $\lim_{n \rightarrow \infty} \Psi(A_n)$ ottenuti al variare della successione $\{A_n\}$ nell'insieme delle successioni non crescenti di insiemi di tipo (a), contenuti in I_0 e tali che $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) = 0$.

Fissato l'intero positivo k , si scelga una successione $\{A_n^{(k)}\}$ di insiemi di tipo (a) tale che:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n^{(k)}) = 0 \quad , \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \Psi(A_n^{(k)}) > \lambda - \frac{1}{k} \quad , \quad A_n^{(k)} \supset A_{n+1}^{(k)}.$$

Sia n_k un indice per il quale riesca:

$$\mu(A_{n_k}^{(k)}) < \frac{\eta}{2^k}.$$

Poniamo: $A_\eta = \sum_{k=1}^{\infty} A_{n_k}^{(k)}$. Sarà $\mu(A_\eta) < \eta$.

Per ogni insieme C di tipo (c) contenuto in $I_0 - A_\eta$, poniamo:

$$\Phi(C) = \text{estr. inf.}_{P \supset C} F(P).$$

Sia $\{C\}_{I_0 - A_\eta}$ la totalità degli insiemi di tipo (c) contenuti in $I_0 - A_\eta$. Sia $\{C_n\}$ una successione non crescente di insiemi di $\{C\}_{I_0 - A_\eta}$, convergente all'insieme C . Sia $\{P_n\}$ una successione non crescente di insiemi di tipo (p) tali che:

$$P_n \supset C_n \quad , \quad \mu(P_n) - \mu(C_n) < \frac{1}{n} \quad , \quad F(P_n) - \Phi(C_n) < \frac{1}{n}.$$

Sia $\{R_n\}$ una successione non decrescente di insiemi di tipo (p) contenuti in A_η tali che:

$$\Psi(A_\eta) - F(R_n) < \frac{1}{n}.$$

Poniamo $Q_n = P_n - R_n$. La successione $\{Q_n\}$ è non crescente e verifica le condizioni:

$$Q_n \supset C_n \quad , \quad \mu(Q_n) - \mu(C_n) < \frac{1}{n} \quad , \quad F(Q_n) - \Phi(C_n) < \frac{1}{n}.$$

Sia $\Gamma = \lim Q_n$. L'insieme Γ è di tipo (c) ed è $\Gamma \supset C$. Riesce inoltre $\mu(\Gamma - C) = 0$, potendo anche essere $\Gamma - C$ vuoto.

Sia $\{\bar{P}_n\}$ una successione di insiemi di tipo (p) non crescente e tale che $\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{P}_n = C$, $\lim_{n \rightarrow \infty} F(\bar{P}_n) = \Phi(C)$. Possiamo supporre che sia $\bar{P}_n \subset Q_n$, perchè diversamente potremmo sostituire $\{\bar{P}_n\}$ con $\{\bar{P}_n \cdot Q_n\}$.

Poniamo: $A_n = \sum_{k=n}^{\infty} (Q_k - \bar{P}_k)$; $\lim_{n \rightarrow \infty} \Psi(A_n) = \rho$.

La successione non crescente $\{A_n\}$ di insiemi di tipo (a) è tale che:

$$\lim A_n = \prod_{n=1}^{\infty} \sum_{k=n}^{\infty} (Q_k - \bar{P}_k) = \Gamma - C$$

e quindi $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) = 0$.

Supponiamo $\rho > 0$ e sia h un intero positivo tale che $\frac{1}{h} < \frac{1}{2} \rho$. Fissato l'intero n ed assegnato comunque $\varepsilon > 0$, sia P_ε un insieme di tipo (p) tale che:

$$P_\varepsilon \subset A_n^{(h)}, \quad \Psi(A_n^{(h)}) - F(P_\varepsilon) < \varepsilon.$$

Si ha:

$$\Psi(A_n^{(h)} \cdot R_h) - F(P_\varepsilon \cdot R_h) > 0.$$

Supposto $n > n_h$, essendo allora $P_\varepsilon - R_h \subset A_n - R_h$, si ha:

$$\begin{aligned} \Psi(A_n^{(h)}) - \Psi(A_n^{(h)} \cdot R_h) &= \Psi(A_n^{(h)}) - F(P_\varepsilon) + \\ &+ F(P_\varepsilon - R_h) + F(P_\varepsilon \cdot R_h) - \Psi(A_n^{(h)} \cdot R_h) < \varepsilon + \frac{1}{h}. \end{aligned}$$

Da ciò segue, data l'arbitrarietà di ε :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Psi(A_n^{(h)} \cdot R_h) \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \Psi(A_n^{(h)}) - \frac{1}{h} > \lambda - \frac{2}{h}.$$

Si ha per $n > h$:

$$\Psi(A_n + A_n^{(h)} \cdot R_h) = \Psi(A_n) + \Psi(A_n^{(h)} \cdot R_h),$$

dato che allora A_n e $A_n^{(h)} \cdot R_h$ non hanno punti in comune. Ne segue:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Psi(A_n + A_n^{(h)} \cdot R_h) > \rho + \lambda - \frac{2}{h},$$

ciò che è assurdo, dato che la successione $\{A_n + A_n^{(h)} \cdot R_h\}$ di insiemi di tipo (a) è non crescente e riesce $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n + A_n^{(h)} \cdot R_h) = 0$.

Deve quindi essere $\rho = 0$. Ciò implica $\lim_{n \rightarrow \infty} F(Q_n - \bar{P}_n) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \Psi(A_n) = 0$ e quindi, dato che è:

$$\Phi(C_n) + \frac{1}{n} - F(\bar{P}_n) \geq F(Q_n - \bar{P}_n) \geq \Phi(C_n) - F(\bar{P}_n),$$

si ottiene:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Phi(C_n) = \Phi(C).$$

Siano C_1 e C_2 due insiemi di $\{C\}_{I_0-A_n}$. Si ha ovviamente:

$$\Phi(C_1) + \Phi(C_2) \geq \Phi(C_1 + C_2).$$

Sia $C_1 \cdot C_2$ vuoto e sia $\{P_n^{(i)}\}$ ($i=1, 2$) una successione non crescente di insiemi di tipo (p) tale che:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n^{(i)} = C_i, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} F(P_n^{(i)}) = \Phi(C_i).$$

Possiamo supporre che $P_n^{(i)} \cdot R_n$ sia vuoto per ogni n , perchè diversamente sostituiremmo $\{P_n^{(i)}\}$ con $\{P_n^{(i)} - R_n\}$.

Assumeremo ora $A_n = P_n^{(1)} \cdot P_n^{(2)}$; la successione $\{A_n\}$ di insiemi di tipo (a) è non crescente ed è tale che $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) = 0$.

Ripetendo il ragionamento, testè fatto, per questa nuova successione $\{A_n\}$ si trae $\lim_{n \rightarrow \infty} F(P_n^{(1)} \cdot P_n^{(2)}) = 0$. Detta $\{P_n\}$ una successione non crescente che converge a $C_1 + C_2$ e tale che $\lim_{n \rightarrow \infty} F(P_n) = \Phi(C_1 + C_2)$, si ha:

$$\begin{aligned} \Phi(C_1) + \Phi(C_2) &= \lim_{n \rightarrow \infty} [F(P_n^{(1)}) + F(P_n^{(2)})] = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} [F(P_n^{(1)} \cdot P_n) + F(P_n^{(2)} \cdot P_n)] = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \{F[(P_n^{(1)} + P_n^{(2)}) \cdot P_n] + F(P_n^{(1)} \cdot P_n^{(2)} \cdot P_n)\} \leq \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} F(P_n) + \lim_{n \rightarrow \infty} F(P_n^{(1)} \cdot P_n^{(2)}) = \Phi(C_1 + C_2) \end{aligned}$$

e quindi

$$\Phi(C_1 + C_2) = \Phi(C_1) + \Phi(C_2).$$

La famiglia $\{C\}_{I_0 - A_\eta}$ verifica le proprietà 1), 2), 3), 4) del teor. IV. La verifica di 1), 2), 3), è ovvia. Occorre solo provare la 4). Assunto C in $\{C\}_{I_0 - A_\eta}$, sia P_n una successione di insiemi di tipo (p) non crescente e convergente a C . Assumiamo $A_n = C_n = (I_0 - A_\eta) \cdot P_n$. Basta far vedere che $(I_0 - A_\eta) \cdot P_n$ appartiene a $\{C\}_{I_0 - A_\eta}$ e che vi appartiene altresì il suo complementare rispetto a $I_0 - A_\eta$. Infatti $I_0 - A_\eta$ è di tipo (c) e poichè è tale anche P_n , lo è la loro intersezione. Inoltre poichè il complementare di $(I_0 - A_\eta) \cdot P_n$, rispetto a $I_0 - A_\eta$, è $I_0 - (A_\eta + P_n)$, essendo I_0 di tipo (p) e $A_\eta + P_n$ di tipo (a) , il detto complementare è di tipo (c) .

La 4) è così provata.

La funzione non negativa $\Phi(C)$ definita in $\{C\}_{I_0 - A_\eta}$ verifica le tre proprietà a), b), c) del teorema IV; essa è quindi prolungabile nella famiglia totalmente additiva minima che contiene $\{C\}$ ed è una misura ivi definita.

Sia C un insieme di $\{C\}_{I_0 - A_\eta}$ tale che $\mu(C) = 0$. Sia $\{P_n\}$ una successione di insiemi di tipo (p) non crescente, convergente a C e tale che $\lim_{n \rightarrow \infty} F(P_n) = \Phi(C)$. Possiamo supporre $P_n \cdot R_n$ vuoto per ogni n .

Sostituendo nel ragionamento fatto in precedenza A_n con P_n , si prova che $\lim_{n \rightarrow \infty} \Psi(P_n) = 0$ e quindi $\lim_{n \rightarrow \infty} F(P_n) = 0$ e da ciò $\Phi(C) = 0$. Ne viene che Φ è μAC . Sia C un insieme di $\{C\}_{I_0 - A_\eta}$. Si ha:

$$\Phi(C) = \int_C \Phi'(x) d\mu.$$

Se, per assurdo, riuscisse $\Phi(C) > 0$, detta $f(x)$ la funzione che coincide con $\Phi'(x)$ per $x \subset C$ ed è nulla in $I_0 - C$, sarebbe:

$$\int_{I_0} f(x) d\mu = \int_C \Phi'(x) d\mu > 0,$$

avendosi, per ogni I di $\{I\}$ contenuto in I_0 :

$$F(I) \geq \Phi(I \cdot C) = \int_{I \cdot C} \Phi'(x) d\mu = \int_I f(x) d\mu;$$

ciò contraddice all'ipotesi che $F(I)$ sia μ -singolare su I_0 .

Dimostriamo ora la sufficienza della condizione.

Se per assurdo la $F(I)$ non fosse μ -singolare su I_0 , dettane $F'(x)$ la μ -derivata, avremmo:

$$J_{I_0}(F') = \int_{I_0} F'(x) d\mu > 0.$$

Posto $q^2 = J_{I_0}(F')$, fissiamo $\varepsilon > 0$ tale che $q^2 - \varepsilon > 0$. In corrispondenza ad ε esiste un $\sigma_\varepsilon > 0$ tale che, per ogni U μ -misurabile contenuto in I_0 e per il quale $\mu(U) < \sigma_\varepsilon$, riesce:

$$\int_U F'(x) d\mu < \varepsilon.$$

Assumiamo $\eta = \frac{\sigma_\varepsilon}{2}$ e sia C un insieme di tipo (c) contenuto in $I_0 - A_\eta$ e per il quale $\mu(I_0 - A_\eta - C) < \frac{\sigma_\varepsilon}{2}$. Per ogni insieme P di tipo (p) contenente C sarà:

$$F(P) \geq \int_P F'(x) d\mu \geq \int_C F'(x) d\mu > q^2 - \varepsilon.$$

Ciò contraddice l'ipotesi del teorema.

XVIII. *La somma di due funzioni AVL: $F(I)$ e $G(I)$, μ -singolari su I_0 è μ -singolare su I_0 .*

Supponiamo dapprima $F(I)$ e $G(I)$ non negative. Dato $\eta > 0$, esistono due insiemi A'_η e A''_η , contenuti in I_0 , tali che $\mu(A'_\eta) < \eta$, $\mu(A''_\eta) < \eta$ e per ogni C di tipo (c), contenuto in $I_0 - A'_\eta - A''_\eta$, si abbia, detto P un insieme di tipo (p):

$$\text{estr. inf.}_{P \supset C} F(P) = 0 \quad , \quad \text{estr. inf.}_{P \supset C} G(P) = 0.$$

Ne segue, posto: $H(I) = F(I) + G(I)$:

$$\text{estr. inf.}_{P \supset C} H(P) = 0.$$

Infatti, se $\{P_n\}$ e $\{Q_n\}$ sono due successioni non crescenti di insiemi di tipo (p) tali che:

$$P_n \supset C, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} F(P_n) = 0; \quad Q_n \supset C, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} G(Q_n) = 0,$$

sarà:

$$P_n \cdot Q_n \supset C, \quad 0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} H(P_n \cdot Q_n) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} F(P_n) + \lim_{n \rightarrow \infty} G(Q_n) = 0.$$

La $H(I)$ verifica, pertanto, le condizioni del teorema XVII ed è quindi μ -singolare su I_0 .

Da quanto si è finora provato, segue che se $F(I)$ e $G(I)$ sono due funzioni additive e non negative, si ha:

$$(3) \quad \frac{d(F+G)}{d\mu} = \frac{dF}{d\mu} + \frac{dG}{d\mu}.$$

Infatti, si ponga per ogni $I \subset I_0$:

$$F^*(I) = F(I) - \int_I \frac{dF}{d\mu} d\mu, \quad G^*(I) = G(I) - \int_I \frac{dG}{d\mu} d\mu.$$

È evidente che $F^*(I)$ e $G^*(I)$ sono μ -singolari su I_0 . Sia inoltre:

$$H(I) = F(I) + G(I), \quad H^*(I) = H(I) - \int_I \frac{dH}{d\mu} d\mu.$$

Anche $H^*(I)$ è μ -singolare su I_0 . Si ha d'altra parte:

$$H(I) = F^*(I) + G^*(I) + \int_I \left(\frac{dF}{d\mu} + \frac{dG}{d\mu} \right) d\mu.$$

La funzione $\frac{dF}{d\mu} + \frac{dG}{d\mu}$ appartiene a $\Theta[H, I_0]$ e quindi è in I_0 :

$$\frac{dH}{d\mu} \geq \frac{dF}{d\mu} + \frac{dG}{d\mu}.$$

Ma si ha:

$$F^*(I) + G^*(I) = H^*(I) + \int_I \left(\frac{dH}{d\mu} - \frac{dF}{d\mu} - \frac{dG}{d\mu} \right) d\mu$$

e poichè $F^*(I) + G^*(I)$ è μ -singolare, ne segue il sussistere della (3).

Possiamo ora dimostrare la tesi del teorema nel caso che $F(I)$ e $G(I)$ siano due qualsivogliano funzioni AVL μ -singolari su I_0 .

Dalla posizione $H(I) = F(I) + G(I)$ segue:

$$p_F(I) + p_G(I) + q_H(I) = q_F(I) + q_G(I) + p_H(I)$$

e quindi:

$$\frac{dp_F}{d\mu} + \frac{dp_G}{d\mu} + \frac{dq_H}{d\mu} = \frac{dq_F}{d\mu} + \frac{dq_G}{d\mu} + \frac{dp_H}{d\mu}.$$

Essendo per ipotesi $\frac{dp_F}{d\mu} - \frac{dq_F}{d\mu} = \frac{dp_G}{d\mu} - \frac{dq_G}{d\mu} = 0$, segue:

$$\frac{dH}{d\mu} = \frac{dp_H}{d\mu} - \frac{dq_H}{d\mu} = 0,$$

cioè la tesi.

Possiamo adesso dare il teorema della *decomposizione di Lebesgue di una funzione AVL*.

XIX. Se $F(I)$ è AVL, fissato I_0 in $\{I\}$, per ogni I di $\{I\}$ contenuto in I_0 sussiste la decomposizione:

$$(4) \quad F(I) = F^*(I) + \int_I \frac{dF}{d\mu} d\mu$$

con $F^*(I)$ μ -singolare su I_0 .

Tale decomposizione di $F(I)$, nella somma di una funzione μ -singolare su I_0 e di una funzione μAC , è unica.

Posto per $I \subset I_0$:

$$p_F^*(I) = p_F(I) - \int_I \frac{dp_F}{d\mu} d\mu, \quad q_F^*(I) = q_F(I) - \int_I \frac{dq_F}{d\mu} d\mu,$$

la $p_F^*(I)$ e la $q_F^*(I)$ sono μ -singolari su I_0 .

Assumendo $F^*(I) = p_F^*(I) - q_F^*(I)$, si ha la (4) ed $F^*(I)$ — per il teorema precedente — è μ -singolare su I_0 .

Sia per ogni $I \subset I_0$:

$$F(I) = \bar{F}(I) + \int_I f(x) d\mu$$

con $\bar{F}(I)$ μ -singolare su I_0 ed $f(x)$ ivi μ -sommabile. Si ha:

$$\bar{F}(I) - F^*(I) = \int_I \left(\frac{dF}{d\mu} - f \right) d\mu.$$

Ne segue che la funzione μ -singolare $\bar{F}(I) - F^*(I)$ ha per μ -derivata (cfr. teor. XI) $\frac{dF}{d\mu} - f$. Ciò implica che $\frac{dF}{d\mu}$ è μ -equivalente a f in I_0 , donde la tesi.

Osservazione. - Se $\{I\}$ è la famiglia degli intervalli superiormente aperti di S_μ e μ l'ordinaria misura di Lebesgue, l'unicità asserita nel teorema ora dimostrato ci assicura che la derivata di $F(I)$ secondo la definizione adottata nella presente Memoria coincide quasi ovunque con quella ottenuta come limite del rapporto $\frac{F(I)}{\mu(I)}$ quando I tende ad un punto x con un fissato parametro di regolarità o su un sistema di reticoli.

Def. - La funzione μ -singolare $F^*(I)$ che interviene nella (4) sarà chiamata la *componente μ -singolare* di $F(I)$, mentre la funzione $\int_I \frac{dF}{d\mu} d\mu$ verrà detta la *componente μAC* di $F(I)$.

È essenziale osservare il seguente teorema:

XX. *La trasformazione, che ad ogni funzione AVL definita nel semi-anello $\{I\}$ fa corrispondere — per ogni fissato I_0 di $\{I\}$ — la sua μ -derivata su I_0 , è lineare.*

In altri termini, se $F(I)$ e $G(I)$ sono definite in $\{I\}$ ed ivi AVL, dette a e b due quasivogliano costanti reali, per ogni I_0 di $\{I\}$ si ha:

$$\frac{d(aF + bG)}{d\mu} = a \frac{dF}{d\mu} + b \frac{dG}{d\mu}.$$

L'asserzione si prova immediatamente se è $b = 0$. Basta di-

mostrarla per $a = b = 1$ ¹⁹). Si ha :

$$F(I) = F^*(I) + \int_I \frac{dF}{d\mu} d\mu, \quad G(I) = G^*(I) + \int_I \frac{dG}{d\mu} d\mu$$

con $F^*(I)$ e $G^*(I)$ μ -singolari su I_0 . Ne segue :

$$F(I) + G(I) = F^*(I) + G^*(I) + \int_I \left(\frac{dF}{d\mu} + \frac{dG}{d\mu} \right) d\mu.$$

Essendo $F^*(I) + G^*(I)$ μ -singolare su I_0 , per l'unicità asserita dal teor. XIX, si ha la tesi.

Il seguente teorema è l'estensione alle funzioni AVL del teor. XIV.

XXI. *Se la funzione AVL $F(I)$ è μ -singolare su I_0 , tali sono ivi $v_F(I)$, $p_F(I)$ e $q_F(I)$.*

Dette $p_F^*(I)$ e $q_F^*(I)$ le componenti μ -singolari di $p_F(I)$ e $q_F(I)$, si ha :

$$F(I) \doteq p_F^*(I) - q_F^*(I).$$

Ciò implica :

$$v_F(I) \leq p_F^*(I) + q_F^*(I),$$

ne segue che $v_F(I)$ è μ -singolare su I_0 . Tali sono, pertanto, anche p_F e $q_F(I)$.

Osservazione. - La teoria, finora svolta sulla derivazione di una funzione AVL $F(I)$, è suscettibile di essere generalizzata considerando, anzichè una misura μ non negativa, una misura di segno variabile. Fissato I_0 in $\{I\}$ e considerata la decomposizione di Hahn di I_0 relativa alla misura μ : $I_0 = I_0^+ \dot{+} I_0^-$, definiremo al modo seguente la μ -derivata $\frac{dF}{d\mu}$ di $F(I)$ su I_0 :

$$\frac{dF}{d\mu} \left\{ \begin{array}{l} = \frac{dF}{dv_\mu} \quad \text{nei punti di } I_0^+, \\ = -\frac{dF}{dv_\mu} \quad \text{nei punti di } I_0^-. \end{array} \right.$$

¹⁹) Ciò è già stato fatto se F e G sono non negative nel corso della dimostrazione del teor. XVIII.

È evidente che la $F(I)$ è μ -singolare su I_0 (cioè è tale che $\frac{dF}{d\mu} = 0$ su I_0) se e solo se è ν_μ -singolare.

È anche evidente che sussiste la decomposizione di Lebesgue (4) e che, detta μAC una $F(I)$ che sia $\nu_\mu AC$, sussiste il teorema di Lebesgue-Radon-Nikodym.

BIBLIOGRAFIA

- [1] R. CACCIOPPOLI, *Sulle funzioni additive d'insieme*. Rend. Acc. Sci. Fis. e Mat. di Napoli, t. 33, 1927, pag. 150-153.
- [2] F. CAFIERO, *Funzioni additive d'insieme e integrazione negli spazi astratti*. Istituto Matem. Univ. Napoli, Edit. Liguori, 1953.
- [3] G. FICHERA, *Lezioni sulle trasformazioni lineari*. Vol. I, Istituto Matem. Univ. Trieste, 1954.
- [4] H. HAHN - A. ROSENTHAL, *Set functions*. The University of New Mexico Press Albuquerque, 1947.
- [5] P. R. HALMOS, *Measure theory*. D. Van Nostrand Co. Inc. New York, 1950.
- [6] O. HAUPT - C. PAUC, *Über die durch allgemeine Ableitungsbasen bestimmten Topologien*. Annali di Mat., s. IV, t. XXXVI, 1954, pp. 245-271.
- [7] K. MAYRHOFER, *Inhalt und Mass*. Springer, Wien, 1952.
- [8] J. v. NEUMANN, *Functional Operators*. Vol I: *Measures and Integrals*. Annals of Math. Studies N. 21, 1950.
- [9] O. NIKODYM, *Sur une généralisation des intégrales des M. J. Radon*. Fund. Math. 15, 1930, pp. 131-179.
- [10] J. RADON, *Theorie und Anwendungen der absolut additiven Mengenfunktionen*. S. B. Akad. Wiss. Wien, 122, 1913, pp. 1295-1438.
- [11] S. SAKS, *Theory of the Integral*. II. Ed. Hafner Pub. Co. New York, 1937.
- [12] A. C. ZAAZEN, *Linear Analysis*. North Holland Publ. Co. Amsterdam, 1953.