RENDICONTI
*del*
SEMINARIO MATEMATICO
*della*
UNIVERSITÀ DI PADOVA

EMILIO GAGLIARDO

# Un'osservazione sui criteri di unicità per gli integrali di un'equazione differenziale ordinaria del primo ordine

*Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova*, tome 23 (1954), p. 214-223

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1954__23__214_0>

# UN'OSSERVAZIONE SUI CRITERI DI UNICITÀ PER GLI INTEGRALI DI UN'EQUAZIONE DIFFERENZIALE ORDINARIA DEL PRIMO ORDINE

*Nota* (*) *di* EMILIO GAGLIARDO (*a Genova*)

I criteri di unicità per il problema di CAUCHY relativo ad una equazione differenziale ordinaria del primo ordine: $y' = f(x, y)$ sono stati oggetto di studio — anche recentemente — da parte di vari Autori [1]).

I criteri trovati si riferiscono principalmente a soluzioni intese nel senso di CARATHÉODORY, cioè come funzioni assolutamente continue che soddisfano quasi ovunque l'equazione [2]).

Il principale scopo di questa Nota è quello di fare osservare come cambiando la classe delle funzioni da considerare come soluzioni dell'equazione differenziale, si possono dare dei nuovi criteri relativi all'unicità per il problema di CAUCHY, i quali non sussistono quando le soluzioni siano intese nel senso di CARATHÉODORY

---

(*) Pervenuta in Redazione il 21 gennaio 1954.

1) Per la bibliografia confronta: F. CAFIERO, *Sui teoremi di unicità relativi ad un'equazione differenziale*, ecc., «Giornale di Matematiche di Battaglini», serie IV, vol. 78, (1948), Memoria I, pp. 10-41, Memoria II, pp. 193-215; ed anche un lavoro di G. ZWIRNER, *Criteri di unicità per gli integrali*, ecc. «Rend. Sem. Mat.» di Padova, vol. XIX (1950), pp. 273-293. Cfr. anche: G. SANSONE, *Equazioni differenziali nel campo reale*, (1949), parte II, cap. VIII.

2) Alcuni teoremi delle Note citate in 1) si riferiscono a soluzioni intese come funzioni continue nel loro campo di esistenza, ivi quasi ovunque soddisfacenti all'equazione.

**1.** - In questo numero diamo un criterio di unicità il quale si riferisce a soluzioni intese come funzioni continue, derivabili a destra, e ovunque soddisfacenti all'equazione differenziale presa in considerazione.

Precisamente diremo che una funzione $y = y(x)$ è *soluzione di tipo* $(A)$ dell'equazione $y' = f(x, y)$ se è *continua* e dotata di derivata destra $D^+y(x)$ in ogni punto e si ha *ovunque*: $D^+y(x) = f(x, y(x))$.

*Sia* $f(x, y)$ *una funzione reale definita nel rettangolo* $R: a \leq x \leq b,\ c \leq y \leq d$, *e ivi soddisfacente alla limitazione*:

$$f(x, y) \leq g(x) \tag{1}$$

*con* $g(x)$ *sommabile in* $(a, b)$.

*Per ogni punto* $\alpha$ *dell'intervallo* $a \leq x < b$ *si possano trovare un punto* $\bar{\alpha} > \alpha$ *e una funzione* $\varphi(x)$ *misurabile in* $(\alpha, \bar{\alpha})$ *e sommabile in ogni intervallo* $(\alpha + \delta, \bar{\alpha})$ *con* $\delta > 0$, *tali che risulti*:

$$\min_{\delta \to 0+} \lim \int_{\alpha+\delta}^{\bar{\alpha}} \left(\varphi(x) - \frac{1}{x - \alpha}\right) dx \neq +\infty \text{ [3])} \tag{2}$$

$$f(x, y_1) - f(x, y_2) \leq \varphi(x)(y_1 - y_2) \tag{3}$$

*quest'ultima essendo verificata per quasi tutti i valori di* $x$ *appartenenti all'intervallo* $(\alpha, \bar{\alpha})$, *e per* $y_1 > y_2$ *appartenenti all'intervallo* $(c, d)$.

*Allora le eventuali soluzioni di tipo* $(A)$ *dell'equazione differenziale* $y' = f(x, y)$ *sono, a destra del punto iniziale, univocamente determinate dal valore iniziale.*

Osserviamo anzitutto che l'ipotesi (1) assicura [4]) l'assoluta continuità delle soluzioni che si considerano (e può essere soppressa se queste si suppongono già assolutamente continue) [5]).

---

[3]) Nel senso che questo minimo limite sia finito, oppure $-\infty$.

[4]) Cfr. S. SAKS, *Theory of the Integral*, (1937), p. 271: Theorem (4.6), p. 285: Theorem (7.7). Alla (1) si potrebbe ovviamente sostituire la limitazione: $f(x, y) \geq g(x)$; in tale caso il teorema (7.7) cit., si applicherà alle funzioni in esame cambiate di segno.

[5]) Pertanto quasi ovunque si ha: $D^+ y(x) = y'(x)$.

Supponiamo ora per assurdo che da un punto $P$ di $R$ escano (verso destra) due integrali (del tipo (A)) distinti: siano essi: $y = y(x)$, $y = \bar{y}(x)$.

Sia allora $\beta$ un valore interno ad $(a, b)$ e maggiore dell'ascissa di $P$, dove si abbia: $\bar{y}(\beta) > y(\beta)$; per la continuità di $y(x)$, e $\bar{y}(x)$, la diseguaglianza: $\bar{y}(x) - y(x) > 0$ sarà verificata in un intorno sinistro di $\beta$ avente estremo inferiore $\alpha$ (maggiore o eguale all'ascissa di $P$) in cui: $\bar{y}(\alpha) = y(\alpha)$.

Le funzioni: $y(x)$, $\bar{y}(x)$, dovendo soddisfare anche per $x = \alpha$ all'equazione differenziale data, hanno per $x = \alpha$ la stessa derivata destra, e quindi per $x$ compreso nell'intervallo $\alpha < x \leq \beta$ si potrà scrivere:

$$\bar{y}(x) - y(x) = (x - \alpha)\varepsilon(x) \tag{4}$$

con:

$$\lim_{x \to \alpha +} \varepsilon(x) = 0 \tag{5}$$

essendo inoltre nello stesso intervallo $\varepsilon(x) > 0$.

La funzione $\log \varepsilon(x)$ è ovviamente assolutamente continua in ogni intervallo chiuso interno all'intervallo $\alpha < x \leq \beta$ (poichè ivi $\varepsilon(x)$ — assolutamente continua — resta, per continuità, maggiore di una costante positiva) e la sua derivata è ivi quasi ovunque data da: $\varepsilon'(x)/\varepsilon(x)$.

È lecito scrivere pertanto, per ogni $\alpha^*$ compreso tra $\alpha$ e $\beta$:

$$\lim_{\delta \to 0+} \int_{\alpha+\delta}^{\alpha^*} \frac{\varepsilon'(x)}{\varepsilon(x)} dx = \lim_{\delta \to 0+} [\log \varepsilon(\alpha^*) - \log \varepsilon(\alpha + \delta)] = +\infty \tag{6}$$

Tenendo conto dell'ipotesi (3) si ha quasi ovunque in $(\alpha, \beta)$:

$$\varphi(x) \geq \frac{f(x, \bar{y}(x)) - f(x, y(x))}{\bar{y}(x) - y(x)} = \frac{\bar{y}'(x) - y'(x)}{\bar{y}(x) - y(x)}$$

Dalla (4) segue allora, quasi ovunque in $(\alpha, \beta)$:

$$\varphi(x) \geq \frac{1}{x - \alpha} + \frac{\varepsilon'(x)}{\varepsilon(x)}$$

Infine tenendo conto anche della (6) si ottiene:

$$\lim_{\delta \to 0+} \int_{\alpha+\delta}^{\alpha^*} \left( \varphi(x) - \frac{1}{x - \alpha} \right) dx = +\infty . \tag{7}$$

Quest'ultima relazione sussiste ovviamente anche se $\alpha^*$ è maggiore di $\beta$, cioè per ogni $\alpha^* > \alpha$, purchè naturalmente la funzione $\varphi(x)$ sia sommabile in ogni intervallo del tipo: $(\alpha + \delta, \alpha^*)$ con $\delta > 0$.

Si è giunti con ciò ad un assurdo, in quanto per il valore trovato $\alpha$ non si può determinare alcun valore $\bar{\alpha} > \alpha$ per cui sia verificata l'ipotesi (2).

Il teorema resta così dimostrato.

Osserviamo ora che il criterio dimostrato non è valido rispetto alle (eventuali) soluzioni continue che non soddisfacciano ovunque all'equazione.

Consideriamo infatti il seguente esempio: sia $f(x, y)$ una funzione definita con la seguente legge: $f(x, y) = 0$ per $x = 0$, $f(x, y) = y/x$ per $|y| \leq |x| \neq 0$, $f(x, y) = xy/|xy|$ per $|y| > |x| \neq 0$; in tal caso sono verificate tutte le ipotesi del teorema ove si prenda: $g(x) = 1$, $\varphi(x) = 1/x$. Dal punto (0, 0) escono infiniti integrali soddisfacenti quasi ovunque all'equazione (le rette: $y = mx$, con $|m| \leq 1$), ma uno solo di essi ($y = 0$) soddisfa *ovunque* all'equazione (anche nel punto iniziale).

Osserviamo ancora che, se nell'integrando della (2) in luogo di $\dfrac{1}{x - \alpha}$ si scrive $\dfrac{k}{x - \alpha}$, il teorema non è più vero non appena si prende $k > 1$. Infatti per l'equazione: $y' = f(x, y)$ con $f(x, y)$ definita dalla seguente legge: $f(x, y) = 0$ per $x = 0$, $f(x, y) = ky/x$ per $|y| \leq |x|^k \neq 0$, $f(x, y) = xy \cdot k\,|x|^{k-1}/|xy|$ per $|y| > |x|^k \neq 0$, sarebbero verificate tutte le ipotesi di tale enunciato (con $k > 1$) ove si prenda: $g(x) = k\,|x|^{k-1}$, $\varphi(x) = k/x$, mentre dal punto (0, 0) escono infiniti integrali (del tipo: $y = mx^k$ con $|m| \leq 1$) tutti soddisfacenti all'equazione anche nel punto iniziale.

**2.** - Il primo dei due esempi dati sopra prova che il criterio del n. 1 non rientra in alcuni dei criteri noti che si riferiscono a soluzioni assolutamente continue soddisfacenti all'equazione differenziale quasi ovunque [6]).

Se nell'enunciato del n. 1 la funzione $\varphi(x)$ che compare nella (3) si suppone sommabile in $(\alpha, \bar{\alpha})$ — con il che la (2) è certamente verificata — allora l'unicità è assicurata rispetto alle soluzioni nel senso di CARATHÉODORY da un noto criterio di TONELLI [7]).

In base a questa osservazione si può porre la questione di sapere se, sostituendo nell'enunciato precedente l'ipotesi (2) con un'altra meno generale, il nuovo criterio è valido rispetto a soluzioni intese in senso più generale di quanto fatto precedentemente.

Dimostreremo nei nn. seguenti che la risposta a questo quesito è affermativa.

**3.** - Diremo che una funzione $y = y(x)$ è una *soluzione di tipo* $(B)$ dell'equazione data se $y(x)$ è una funzione *continua* e la sua derivata destra approssimativa (o asintotica) [8]): $D^{+}_{\text{ap}}\, y(x)$ esiste ovunque e soddisfa *ovunque* all'equazione.

*Sotto le stesse ipotesi del teorema del n.* 1, *quando la* (2) *si sostituisca con la*:

$$(2') \qquad \max \lim_{\delta \to 0+} \text{ap} \int_{\alpha+\delta}^{\bar{\alpha}} \left( \varphi(x) - \frac{1}{x - \alpha} \right) dx \neq +\infty$$

*le eventuali soluzioni di tipo* $(B)$ *dell'equazione differenziale*

---

6) Esso non rientra neppure, come è ovvio, nei noti criteri in cui la $f(x, y)$ è supposta continua (o uniformemente continua rispetto ad y) appunto perchè nella presente Nota non viene formulata per la $f(x, y)$ alcuna ipotesi di continuità.

7) Per una forma più affinata confronta: G. SCORZA DRAGONI, *Sugli integrali dell'equazione* $y' = f(x, y)$. «Rend. Acc. Naz. Lincei», (6) (1929) IX, pp. 378-382.

8) Per la definizione e le proprietà del limite e delle derivate approssimative (o asintotiche), vedi S. SAKS, loc. cit., pp. 218-220.

*$y' = f(x, y)$ sono, a destra del punto iniziale univocamente determinate dal valore iniziale.*

Osserviamo a tale scopo anzitutto che una soluzione di tipo (B) dell'equazione $y' = f(x, y)$ è, per la (1) [9]), assolutamente continua [10]).

Per dimostrare il criterio ora enunciato basta ragionare come si è fatto al n. 1; si ottiene però in luogo della (5) la relazione:

$$\lim_{x \to \alpha +} \operatorname{ap} \varepsilon(x) = 0 . \tag{5'}$$

Infatti, chiamando $M$ il comune valore delle derivate destre approssimative di $y(x)$, $\bar{y}(x)$, calcolate in $x = \alpha$, per ogni fissato $\sigma > 0$ gli insiemi (a destra di $\alpha$) ove sono verificate le disuguaglianze:

$$\left| \frac{y(x) - y(\alpha)}{x - \alpha} - M \right| < \sigma/2 ; \qquad \left| \frac{\bar{y}(x) - \bar{y}(\alpha)}{x - \alpha} - M \right| < \sigma/2$$

devono avere $\alpha$ come punto di densità 1; $\alpha$ sarà allora anche punto di densità 1 per il prodotto di questi due insiemi, sul quale sussisterà la relazione:

$$0 < \varepsilon(x) = \frac{\bar{y}(x) - y(x)}{x - \alpha} = \frac{\bar{y}(x) - \bar{y}(\alpha)}{x - \alpha} - \frac{y(x) - y(\alpha)}{x - \alpha} < \sigma$$

la quale dimostra la (5').

Procedendo come al n. 1 otterremo in luogo delle (6), (7), le relazioni:

$$\lim_{\delta \to 0+} \operatorname{ap} \int_{\alpha+\delta}^{\alpha^*} \frac{\varepsilon'(x)}{\varepsilon(x)}\, dx = +\infty \tag{6'}$$

$$\lim_{\delta \to 0+} \operatorname{ap} \int_{\alpha+\delta}^{\alpha^*} \left( \varphi(x) - \frac{1}{x - \alpha} \right) dx = +\infty \tag{7'}$$

---

[9]) S. SAKS, loc. cit., p. 240: nota in calce, p. 225: Theorem (6.1), p. 285: Theorem (7.7).

[10]) Pertanto quasi ovunque si ha: $D^{+}_{\text{ap.}}\, y(x) = y'(x)$.

la quale ultima contraddice all'ipotesi (2'). Il teorema è così dimostrato.

**4.** - Seguendo ancora l'ordine di idee del n. 2 ci riferiamo alle soluzioni intese come funzioni *continue* soddisfacenti *ovunque* all'equazione con la loro derivata destra superiore.

Precisamente diremo che una funzione *continua* $y = y(x)$ è una *soluzione del tipo* $(C)$ se la derivata destra superiore $\overline{D}^+ y(x)$ esiste ovunque finita, e si ha *ovunque*: $\overline{D}^+ y(x) = f(x, y(x))$.

Sussiste il seguente criterio:

*Sotto le stesse ipotesi del teorema del n.* 1, *quando la* (2) *si sostituisce con la*:

$$(2'') \qquad \max_{\delta \to 0+} \lim \int_{\alpha+\delta}^{\bar{\alpha}} \left( \varphi(x) - \frac{1}{x - \alpha} \right) dx \neq +\infty$$

*le eventuali soluzioni di tipo* $(C)$ *dell'equazione differenziale sono, a destra del punto iniziale univocamente determinate dal valore iniziale.*

Una soluzione di tipo (C) dell'equazione differenziale data, a causa della (1) è intanto assolutamente continua [11]).

Per dimostrare questo criterio basta ancora ragionare come al n. 1 pervenendo però in luogo della (5) alla relazione:

$$(5'') \qquad \min_{x \to \alpha+} \lim \varepsilon(x) = 0 .$$

Infatti, chiamando $M$ il comune valore delle derivate destre superiori di $\bar{y}(x)$, $y(x)$, calcolate per $x = \alpha$, si ha:

$$\max_{x \to \alpha+} \lim \frac{y(x) - y(\alpha)}{x - \alpha} = M$$

$$(8) \qquad \max_{x \to \alpha+} \lim \frac{\bar{y}(x) - \bar{y}(\alpha)}{x - \alpha} = M$$

Per la prima di queste due relazioni, si potrà trovare una

---

[11]) Per i Teoremi citati in [4]).

successione decrescente: $\{x_n\} \to \alpha +$ tale che:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{y(x_n) - y(\alpha)}{x_n - \alpha} = M \tag{9}$$

ricordando ora la disuguaglianza:

$$\varepsilon(x) = \frac{\bar{y}(x) - y(x)}{x - \alpha} = \frac{\bar{y}(x) - \bar{y}(\alpha)}{x - \alpha} - \frac{y(x) - y(\alpha)}{x - \alpha} > 0$$

si ottiene:

$$\min_{n \to \infty} \lim \frac{\bar{y}(x_n) - \bar{y}(\alpha)}{x_n - \alpha} \geq M$$

ma tenendo conto della (8) si deduce:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\bar{y}(x_n) - \bar{y}(\alpha)}{x_n - \alpha} = M \tag{10}$$

e quindi, dalle (9), (10):

$$\lim_{n \to \infty} \varepsilon(x_n) = \lim_{n \to \infty} \left[\frac{\bar{y}(x_n) - \bar{y}(\alpha)}{x_n - \alpha} - \frac{y(x_n) - y(\alpha)}{x_n - \alpha}\right] = 0$$

ed essendo $\varepsilon(x) > 0$ la (5″) resta dimostrata.

Inoltre in luogo delle (6), (7), perverremo alle relazioni:

$$\max_{\delta \to 0+} \lim \int_{\alpha+\delta}^{\alpha^*} \frac{\varepsilon'(x)}{\varepsilon(x)}\, dx = +\infty \tag{6''}$$

$$\max_{\delta \to 0+} \lim \int_{\alpha+\delta}^{\alpha^*} \left(\varphi(x) + \frac{1}{x - \alpha}\right) dx = +\infty \tag{7''}$$

la quale ultima contraddice all'ipotesi (2″). Il teorema è così dimostrato.

**5.** - I criteri precedentemente trovati si riferiscono a soluzioni che soddisfano *ovunque* l'equazione differenziale; il criterio che ora diamo si riferisce invece a soluzioni continue che soddisfano *quasi ovunque* l'equazione differenziale, ma che hanno in ogni punto numeri derivati finiti.

Diremo che una funzione continua $y = y(x)$ è una *soluzione di tipo* (D) dell'equazione differenziale $y' = f(x, y)$ se $y(x)$ ha numeri derivati destri finiti in ogni punto e di conseguenza derivata quasi ovunque[12], per la quale si abbia quasi ovunque: $y'(x) = f(x, y(x))$.

A questo proposito dimostriamo il seguente criterio:

*Sotto le stesse ipotesi del teorema del n.* 1, *quando la* (2) *si sostituisca con la seguente*:

$$(2''') \qquad \min_{\delta \to 0+} \lim \int_{\alpha+\delta}^{\bar{\alpha}} \left( \varphi(x) - \frac{1}{x - \alpha} \right) dx = -\infty$$

*le eventuali soluzioni di tipo* (D) *dell'equazione differenziale* $y' = f(x, y)$ *sono, a destra del punto iniziale, univocamente determinate dal valore iniziale.*

Analogamente a quanto abbiamo già osservato nei nn. precedenti, anche le soluzioni di tipo (D) della equazione data sono, a causa della (1), assolutamente continue[13].

Procedendo nella dimostrazione in modo analogo al n. 1 otteniamo in luogo della (5) la relazione:

$$(5''') \qquad \max_{x \to \alpha+}\text{-}\lim \varepsilon(x) \neq +\infty .$$

Infatti chiamando $M$, $N$, i numeri derivati destri rispettivamente superiore e inferiore di $\bar{y}(x)$, e di $y(x)$, calcolati per $x = \alpha$, si ha ovviamente:

$$\max_{x \to \alpha+} \lim \varepsilon(x) = \max_{x \to \alpha+} \lim \left[ \frac{\bar{y}(x) - y(x)}{x - \alpha} \right] = \max_{x \to \alpha+} \lim \left[ \frac{\bar{y}(x) - \bar{y}(\alpha)}{x - \alpha} - \right.$$

$$\left. - \frac{y(x) - y(\alpha)}{x - \alpha} \right] \leq \max_{x \to \alpha+} \lim \left[ \frac{\bar{y}(x) - \bar{y}(\alpha)}{x - \alpha} \right] -$$

$$- \min_{x \to \alpha+} \lim \left[ \frac{y(x) - y(\alpha)}{x - \alpha} \right] = M - N \neq +\infty .$$

---

12) S. SAKS, loc. cit., p. 270: Theorem (4.2)

13) Ancora per i Teoremi citati in 4).

Seguitando a ragionare come al n. 1 otterremo, in luogo delle (6), (7), le relazioni:

$$\min_{\delta \to 0+} \lim \int_{\alpha+\delta}^{\alpha^*} \frac{\varepsilon'(x)}{\varepsilon(x)} dx \neq -\infty \tag{6'''}$$

$$\min_{\delta \to 0+} \lim \int_{\alpha+\delta}^{x^*} \left(\varphi(x) - \frac{1}{x-\alpha}\right) dx \neq -\infty \tag{7'''}$$

la quale ultima contraddice all'ipotesi (2'''). Il teorema è così dimostrato.

Mostriamo ora, con un esempio, che le ipotesi del criterio di questo numero non sono sufficienti ad assicurare l'unicità delle soluzioni nel senso di CARATHÉODORY. Sia $f(x, y) = 0$ per $x = 0$; $f(x, y) = ky/x$, con $0 < k < 1$, per $|y| \leq |x|^k \neq 0$; $f(x, y) = xy \cdot k\,|x|^{k-1}/|xy|$ per $|y| > |x|^k \neq 0$. Le ipotesi del teorema sono verificate assumendo $g(x) = k\,|x|^{k-1}$, $\varphi(x) = = k/x$. Gli integrali, assolutamente continui e soddisfacenti quasi ovunque all'equazione, che escono dal punto $(0, 0)$ sono infiniti ($y = mx^k$, $|m| \leq 1$) ma uno solo di essi ($y = 0$) ha anche nel punto iniziale numeri derivati destri finiti.