

RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

FRANCESCO G. TRICOMI

Un teorema di media per certe equazioni di tipo ellittico

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 22 (1953), p. 350-353

[<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1953__22__350_0>](http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1953__22__350_0)

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1953, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

UN TEOREMA DI MEDIA PER CERTE EQUAZIONI DI TIPO ELLITTICO

Nota (*) di FRANCESCO G. TRICOMI (a Torino)

1. — Nel preparare un corso di lezioni sulle equazioni a derivate parziali — da cui potrà forse scaturire un giorno una continuazione delle mie « Equazioni Differenziali », di cui è apparsa in questi giorni la seconda edizione ¹⁾ — mi sono accorto che il classico principio della media di Gauss per l'equazione di Laplace poteva estendersi in modo più semplice del consueto ²⁾ alle più generali equazioni di tipo ellittico della forma

$$(1) \quad \mathfrak{L}[z] \equiv \Delta_2 z + a(x, y)z_x + b(x, y)z_y + c(x, y)z = f(x, y),$$
$$(\Delta_2 z \equiv z_{xx} + z_{yy}),$$

facendo intervenire le curve di livello della *soluzione fondamentale* della (1).

Non sono però per nulla sicuro che la formula cui così si perviene: la seguente formula (6), sia nuova. Ad ogni modo, non si tratta certo di una formula « ben nota » ai competenti, e non mi sembra perciò del tutto inutile indicarne qui la ben semplice dimostrazione, tanto più che di un'analogia

(*) Pervenuta in Redazione il 25 giugno 1953.

1) Torino, Einaudi, 1953. Questo per rispondere a vari Colleghi che mi hanno rivolte gentili esortazioni in tal senso.

2) Vedi p. es. G. ASCOLI, P. BURGATTI e G. GIRAUD, *Equazioni alle derivate parziali dei tipi ellittico e parabolico* (Firenze, Sansoni, 1936). In epoca più recente un notevole teorema di media, di tipo assai diverso da quello di cui qui ci si occupa, è stato dato da G. CIMMINO, *Ann. Sc. Normale Sup. Pisa*, (2), **7** (1928), 73-96. Per un'ulteriore generalizzazione v. PINI, *Rend. Mat. e Appl. Roma*, (5) **11** (1952).

formula di PICONE non è stato finora pubblicato che un cenno incidentale ³⁾).

È quasi superfluo avvertire che le considerazioni che seguono sarebbero suscettibili di ampie, più o meno facili, generalizzazioni; ma mettendosi su questa via ci sarebbe il pericolo che esse verrebbero a perdere l'unico pregio cui possono forse aspirare: la semplicità.

2. — Sia $U \equiv U(x, y; \xi, \eta)$ la *soluzione fondamentale*, od *elementare* che dir si voglia, della (1) e cioè la soluzione dell'equazione *aggiunta*

$$(2) \quad \mathfrak{M}[u] \equiv \Delta_2 u - \frac{\partial}{\partial x}(au) - \frac{\partial}{\partial y}(bu) + cu = 0$$

avente come sua sola singolarità nel dominio $\mathfrak{D}$ che si considera (che supporremo tutto al finito), una singolarità logaritmica nel punto interno $Q \equiv (\xi, \eta)$, e più precisamente una soluzione tale che, al tendere del punto $P \equiv (x, y)$ a Q , risulti

$$\lim \frac{U}{\log r} = -1, \quad (r^2 = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2).$$

L'esistenza di tale soluzione è ormai assicurata sotto condizioni assai poco restrittive per l'equazione data ⁴⁾.

Com'è ben noto vale d'identità

$$u\mathfrak{L}[z] - z\mathfrak{M}[u] = \frac{\partial}{\partial x}(uz_x - zu_x + azu) + \frac{\partial}{\partial y}(uz_y - zu_y + bzu)$$

da cui — supposto $u = U$ e che z sia una qualsiasi soluzione della (1) *regolare* in $\mathfrak{D}$, cioè continua assieme con le sue derivate prime — con un classico procedimento (integrazione in $\mathfrak{D}$ meno un cerchietto di raggio ε col centro in Q e passaggio al limite per $\varepsilon \rightarrow 0$) si deduce la *formula (generalizzata) di Green*:

$$(3) \quad 2\pi z(\xi, \eta) = \oint_{\gamma} \left[z \frac{dU}{dn} - U \frac{dz}{dn} - \left(a \frac{dx}{dn} + b \frac{dy}{dn} \right) zU \right] ds - \iint_{\mathfrak{D}} U \cdot f \cdot dx dy,$$

³⁾ Vedi la nota a piè di p. 82 nella Memoria di G. FICHERA in *Ann. Sc. Normale Sup. Pisa*, (3) 1 (1947).

⁴⁾ Vedi p. es. il libro cit. sotto ¹⁾.

avendo indicata con γ la frontiera di $\mathfrak{D}$ e con n la sua normale (diretta verso l'interno). Naturalmente l'applicazione del metodo richiede alcune condizioni di regolarità per la frontiera γ di $\mathfrak{D}$ che sono ampiamente soddisfatte se γ è una curva *analitica* ⁵⁾.

Se invece si applica lo stesso procedimento alla coppia di funzioni z, u_0 , essendo u_0 una qualsiasi soluzione regolare dell'equazione

$$\mathfrak{M}[u] = g(x, y),$$

viene a mancare il termine a primo membro e si ottiene la identità

$$(4) \quad \oint_{\gamma} \left[z \frac{du_0}{dn} - u_0 \frac{dz}{dn} - \left(a \frac{d\bar{y}}{dn} + b \frac{dy}{dn} \right) z u_0 \right] ds - \iint_{\mathfrak{D}} (u_0 f - z g) dx dy = 0$$

che per $u_0 \equiv 1$, il che si può fare a patto che si ponga

$$g = c - a_x - b_y,$$

fornisce in particolare

$$(5) \quad \oint_{\gamma} \left[\frac{dz}{dn} + \left(a \frac{dx}{dn} + b \frac{dy}{dn} \right) z \right] ds = \iint_{\mathfrak{D}} [(c - a_x - b_y)z - f] dx dy.$$

3. — Ciò posto supponiamo che la frontiera γ del dominio $\mathfrak{D}$ sia una curva di livello $U = C$ della soluzione fondamentale U , curva di livello che, tenuto conto del fatto che U tende a $+\infty$ per $P \rightarrow Q$, è certamente una curva chiusa comprendente il punto Q nel suo interno, purchè C sia una costante positiva sufficientemente grande. Inoltre si tratterà di una curva *analitica*, epperò di « regolarità » largamente sufficiente per consentire la deduzione della formula di Green, perchè, sotto condizioni largamente soddisfatte nei casi che si presentano nelle applicazioni ⁶⁾, le soluzioni delle equazioni di tipo ellittico sono tutte funzioni analitiche.

⁵⁾ Vedi p. es. L. LICHTENSTEIN, *Neuere Entwicklung der Theorie partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung vom elliptischen Typus. Encyklop. d. math. Wissen.* II. C. 12 (1924).

⁶⁾ Basta, in sostanza, che i coefficienti dell'equazione data siano funzioni analitiche di x .

L'ipotesi di cui sopra permette di porre la (3) sotto la forma

$$2\pi z(\xi, \eta) = \oint_{\gamma} z \frac{dU}{dn} ds - C \oint_{\gamma} \left[\frac{dz}{dn} + \left(a \frac{dx}{dn} + b \frac{dy}{dn} \right) z \right] ds - \iint_{\mathfrak{D}} U \cdot f \cdot dxdy$$

da cui, servendosi della (5), segue senz'altro la formula

$$(6) \quad 2\pi z(\xi, \eta) = \oint_{\gamma} \frac{dU}{dn} z ds - C \iint_{\mathfrak{D}} (c - a_x - b_y) z dxdy + \iint_{\mathfrak{D}} (C - U) f dxdy.$$

È questo il « teorema di media » che volevasi stabilire, teorema che nel caso particolare $f \equiv 0$, $c - a_x - b_y \equiv 0$ assume la forma particolarmente semplice

$$(7) \quad z(\xi, \eta) = \frac{1}{2\pi} \oint_{\gamma} \frac{dU}{dn} z ds.$$

È tuttavia da osservare che, ferma restando l'ipotesi $f \equiv 0$, la (6) si può considerare come un vero e proprio *teorema di media*, soltanto se il 2° membro, diviso per 2π , costituisce un operatore che applicato alla funzione $z \equiv 1$ dà come risultato 1; cioè quando è verificata l'uguaglianza

$$(8) \quad 2\pi = \oint_{\gamma} \frac{dU}{dn} ds - C \iint_{\mathfrak{D}} (c - a_x - b_y) dxdy.$$

Ma, considerato che $z \equiv 1$ è soluzione dell'equazione $\mathfrak{L}[z] = c$, dalla (6) si deduce in particolare che

$$2\pi = \oint_{\gamma} \frac{dU}{dn} ds - C \iint_{\mathfrak{D}} (c - a_x - b_y) dxdy + \iint_{\mathfrak{D}} (C - U) c dxdy;$$

dunque la precedente condizione (8) è certamente soddisfatta se $c \equiv 0$. Altrimenti la (6) dovrà più appropriatamente dirsi una *rappresentazione integrale* della soluzione z .

In particolare la (6) permette di dimostrar subito che nel caso $c \equiv f \equiv 0$ le soluzioni della (1) sono necessariamente *estremate al contorno*, ma questa è cosa ben nota.