

RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

ANTONIO DE CASTRO

**Sulle oscillazioni non-lineari dei sistemi in
uno o più gradi di libertà**

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 22 (1953), p. 294-304

[<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1953__22__294_0>](http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1953__22__294_0)

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1953, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SULLE OSCILLAZIONI NON - LINEARI DEI SISTEMI IN UNO O PIÙ GRADI DI LIBERTÀ

Nota (*) di ANTONIO DE CASTRO (a Firenze)

1. - Nella teoria delle oscillazioni non-lineari è noto l'interesse che presenta lo studio dei sistemi a più gradi di libertà. In alcuni lavori recenti dedicati a questo tema¹⁾ si ha iniziato con successo questo studio.

In questo articolo noi cominciamo con lo studio dell'equazione

$$\ddot{x} + f(x, \dot{x}, t) + g(x) = 0,$$

e dimostriamo, sotto certe condizioni, nella sezione I, l'esistenza di una soluzione periodica. Nella sezione II generalizziamo questo risultato ai sistemi differenziali della forma

$$\begin{aligned}\ddot{x}_1 + f_1(x_1, \dot{x}_1, x_2, \dot{x}_2, t) + g_1(x_1) &= 0 \\ \ddot{x}_2 + f_2(x_1, \dot{x}_1, x_2, \dot{x}_2, t) + g_2(x_2) &= 0.\end{aligned}$$

Nella sezione III stabiliamo per il sistema

$$\begin{aligned}\ddot{x}_1 + f_1(x_1, \dot{x}_1, x_2, \dot{x}_2)\dot{x}_1 + g_1(x_1) &= 0 \\ \ddot{x}_1 + f_1(x_1, \dot{x}_1, x_2, \dot{x}_2)\dot{x}_2 + g_2(x_2) &= 0\end{aligned}$$

un nuovo criterio di esistenza di soluzioni periodiche che non rientra nel precedente.

(*) Pervenuta in Redazione il 24 Aprile 1953.

¹⁾ Cfr.: G. COLOMBO, *Sulle oscillazioni non-lineari in due gradi di libertà*. Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, XIX (1950) 413-441; D. GRAFFI, *Forced oscillations for several nonlinear circuits*. Ann. of Math., 54 (1951), 262-271; G. COLOMBO, *Sopra un sistema non-lineare in due gradi di libertà*. Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, XXI (1952), 64-98.

§ 1. - L'equazione $\ddot{x} + f(x, \dot{x}, t) + g(x) = 0$.

2. - Consideriamo l'equazione differenziale

$$\ddot{x} + f(x, \dot{x}, t) + g(x) = 0 \quad (2.1)$$

equivalente al sistema del primo ordine

$$\dot{x} = v \quad \dot{v} = -f(x, v, t) - g(x) \quad (2.2)$$

dove $f(x, v, t)$ e $g(x)$ sono funzioni continue dei loro argomenti, $f(x, v, t)$ è lipschitziana in x, v , $g(x)$ in x , in ogni dominio limitato, e supponiamo che sia

- i) $g(x) = -g(-x)$, $g(x) \neq 0$ per $x \neq 0$, $g(x)$ crescente e $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \infty$,

e che esistano due costanti positive a, E e due funzioni, $\varphi_1(x, v)$ e $\varphi_2(x, v)$, anche continue e lipschitziane, tali che si abbia

- ii) $f(x, v, t) > 0$ per $x > a$, $v \geq 0$ e per $x < -a$, $v \geq E$
 $f(x, v, t) < 0$ per $x > a$, $v \leq -E$ e per $x < -a$, $v \leq 0$;

iii) sia

$$\int_{-a}^a \frac{\varphi_i(x, v)}{v} dx \geq \alpha > 0$$

per qualunque funzione continua $v(x)$ ($|v(x)| > E$), e

$$0 < \frac{\varphi_1(x, v)}{v} < A \quad \text{per } x > a \quad v > E$$

$$0 < \frac{\varphi_2(x, v)}{v} < A \quad \text{per } x < -a \quad v < -E;$$

iv) essendo e, c, b, N costanti positive definite per

$$g(e) = \frac{AE^2}{\alpha},$$

$$G(c) = \frac{1}{2} E^2 + G(e) \quad (\text{essendo } G(x) = \int_0^x g(\xi) d\xi),$$

$$b = \max.(a, c), \quad N = 2 \frac{G(b)}{\alpha},$$

sia

$$f(x, v, t) > \varphi_1(x, v) \quad \text{per } |x| < b \quad v > N$$

$$f(x, v, t) < \varphi_2(x, v) \quad \text{per } |x| < b \quad v < -N;$$

v) $f(x, v, t)$ è periodica in t a periodo T , e $f(0, 0, t) \equiv 0$.

È interessante considerare l'equazione differenziale

$$\frac{dv}{dx} = - \frac{g(x) + f(x, v, t)}{v} \quad (2.3)$$

alla quale associamo queste altre

$$\frac{dv}{dx} = - \frac{g(x) + \varphi_1(x, v)}{v} \quad (2.4)$$

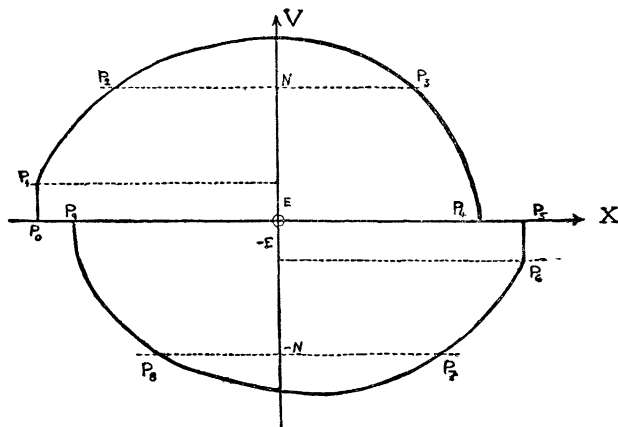
$$\frac{dv}{dx} = - \frac{g(x) + \varphi_2(x, v)}{v} \quad (2.5)$$

che sono rispettivamente l'equazioni caratteristiche dei sistemi

$$\dot{x} = v \quad \dot{v} = -\varphi_1(x, v) - g(x) \quad (2.6)$$

$$\dot{x} = v \quad \dot{v} = -\varphi_2(x, v) - g(x). \quad (2.7)$$

3. - Ciò premesso consideriamo la curva C , $C \equiv P_0 P_1 P_2 \dots P_9 P_0$ (vedi figura); $P_i = P_i(x_i, v_i)$; $x_2 = b$, $v_i = 0$ per $i = 0, 4, 5$; $v_1 = E$, $v_6 = -E$, $v_3 = N$; $v_7 = v_8 = -N$.



P_2P_1 è l'arco della curva $\lambda(x, v) = \frac{1}{2}v^2 + G(x) = \text{cte}$ che passa per P_2 , ed hanno anche l'equazione $\lambda(x, v) = \text{cte}$ gli archi P_3P_4 , P_6P_7 , e P_8P_9 .

P_0P_1 e P_5P_6 sono segmenti verticali, e $x_5 = |x_0|$.

P_4P_5 e P_9P_0 sono segmenti di OX .

P_2P_3 è l'arco della curva integrale dell'equazione

$$\frac{dv}{dx} = - \frac{g(x) + \varphi_1(x, v)}{v}$$

che passa per P_2 . Segue subito dalle condizioni iii) che l'arco P_2P_3 ha la forma indicata in figura. P_7P_8 è l'arco della curva integrale dell'equazione

$$\frac{dv}{dx} = - \frac{g(x) + \varphi_2(x, v)}{v}$$

che passa per P_7 .

Ciò posto dimostriamo che le curve integrali della (2.2) tagliano C penetrando nel suo dominio interno.

In P_0P_1 questo segue da essere $\dot{x} > 0$, e in P_5P_6 da essere $\dot{x} < 0$. Per la funzione $\lambda(x, v)$ sarà per $x = x(t)$ e ricordando (2.2)

$$\frac{d\lambda}{dt} = v\dot{v} + g(x)v = -f(x, v, t)v$$

e perciò in virtù delle condizioni ii) sarà $\frac{d\lambda}{dt} < 0$ negli archi

P_1P_2 , P_3P_4 , P_6P_7 e P_8P_9 , cioè in questi archi le curve integrali della (1.2) tagliano C nel modo indicato. Questo accade anche per gli archi P_2P_3 e P_7P_8 , come segue subito confrontando (2.3) con (2.4) e (2.5) e ricordando iv). Lo stesso accade per gli archi P_4P_5 e P_9P_0 se è $x_5 > x_4$, $|x_0| > |x_9|$.

4. - Dimostriamo che è $x_5 \geq x_4$. Le seguenti relazioni sono conseguenze immediate della definizione di C ,

$$x_0 = x_1$$

$$\frac{1}{2}E^2 + G(x_1) = \frac{1}{2}N^2 + G(x_2)$$

$$\frac{1}{2}N^2 + G(x_3) = G(x_4),$$

e da queste segue che è

$$G(x_0) - G(x_4) = G(x_2) - G(x_3) - \frac{1}{2}E^2 \quad (4.1)$$

Dimostriamo che il secondo membro è positivo. Integriamo (2.4) fra P_2 e P_3 ; si ha

$$\begin{aligned} v_3 - v_2 &= - \int_{x_2}^{x_3} \frac{g(x) + \varphi_1(x, v)}{v} dx \\ &= - \int_{x_2}^0 \frac{g(x)}{v} dx - \int_0^{x_3} \frac{g(x)}{v} dx - \int_{x_2}^{|x_2|} \frac{\varphi_1(x, v)}{v} dx - \int_{|x_2|}^{x_3} \frac{\varphi_1(x, v)}{v} dx \end{aligned}$$

perciò

$$0 < \frac{G(x_2)}{N} - \alpha - \int_{|x_2|}^{x_3} \frac{\varphi(x, v)}{v} dx$$

cioè

$$0 < -\frac{1}{2}\alpha + (|x_2| - x_3)A$$

e

$$|x_2| - x_3 > \frac{\alpha}{2A}$$

ed essendo $|x_2| > \xi > x_3$ sarà

$$G(x_2) - G(x_3) = (|x_2| - x_3)g(\xi) > \frac{\alpha}{2A} g(x_3)$$

Se è $x_3 \geq e$ sarà.

$$\frac{\alpha}{2A} g(x_3) \geq \frac{1}{2}E^2$$

e se è $x_3 \leq e$ sarà

$$G(x_2) - G(x_3) \geq G(x_2) - G(e) > \frac{1}{2}E^2$$

perciò in ambedue i casi segue che è

$$G(x_0) - G(x_4) \geq 0$$

cioè

$$x_5 \geq x_4.$$

Nel semipiano $v < 0$ la dimostrazione è la stessa, e si ha

$$x_5 \geq |x_9|$$

e perciò, essendo $|x_0| = x_5$ segue

$$|x_0| \geq |x_9|.$$

5. - Ciò premesso dimostriamo l'esistenza di almeno una soluzione periodica. Consideriamo come punto iniziale ($t=0$) di una curva integrale il punto $A_0[x(0), y(0)]$ interno o su C . Tutti i punti della curva restano interni a C per $t > 0$, e in particolare questo accade al punto $A_T[x(T), y(T)]$. Se consideriamo la trasformazione topologica dal dominio limitato per C in se stesso, definita per $\mathcal{T}A_0 = A_T$, trasformazione che lascia inalterata (2.1), questa trasformazione ha almeno un punto unito che corrisponde a una soluzione periodica.

§ 2. - Sistemi dipendenti dal tempo.

6. - Consideriamo adesso il sistema di equazioni differenziali

$$\ddot{x}_1 + f_1(x_1, \dot{x}_1, x_2, \dot{x}_2, t) + g_1(x_1) = 0 \quad (6.1)$$

$$\ddot{x}_2 + f_2(x_1, \dot{x}_1, x_2, \dot{x}_2, t) + g_2(x_2) = 0 \quad (6.2)$$

equivalenti al sistema del primo ordine

$$\dot{x}_1 = v_1 \quad \dot{v}_1 = -f_1(x_1, v_1, x_2, v_2, t) - g_1(x_1) \quad (6.3)$$

$$\dot{x}_2 = v_2 \quad \dot{v}_2 = -f_2(x_1, v_1, x_2, v_2, t) - g_2(x_2) \quad (6.4)$$

dove le funzioni $f_i(x_1, v_1, x_2, v_2, t)$ e $g_i(x_i)$ sono continue dei loro argomenti, f_i lipschitziane in x_1, x_2, v_1, v_2 ; $g_i(x_i)$ in x_i , in ogni dominio limitato, e verificando le condizioni seguenti (per $i=1, 2$):

- i) $g_i(x_i)$ sono funzioni dispari, $g_i(x_i) \neq 0$ per $x_i \neq 0$, crescenti e $\lim_{x_i \rightarrow \infty} g_i(x_i) = \infty$.

ii) essendo $\varphi_i^j(x_i, v_i)$ ($i, j = 1, 2$) funzioni continue e lipschitziane e a, E , due costanti positive tali che si abbia

$$\int_{-a}^a \frac{\varphi_i^j(x_i, v_i)}{v_i} dx_i \geq \alpha > 0$$

per qualunque funzione continua $v(x)$ ($|v(x)| > E$) è

$$0 < \frac{\varphi_i^j(x_i, v_i)}{v_i} < A \quad \text{per} \quad x_i > a \quad v_i > E$$

$$0 < \frac{\varphi_i^j(x_i, v_i)}{v_i} < A \quad \text{per} \quad x_i < -a \quad v_i < -E$$

ed essendo $e_i, c_i, b_i, B_i, b, B, N$, costanti positive definite per

$$g_i(e_i) = \frac{1}{\alpha} A E^2,$$

$$G_i(c_i) = \frac{1}{2} E^2 + G(e_i), \quad \text{essendo} \quad G(x) = \int_0^x g(\xi) d\xi$$

$$b = \max(a, c_i)$$

$$N = \frac{2}{\alpha} G(b),$$

$$G_i(B_i) = G_i(b) + \frac{1}{2} (N^2 - E^2), \quad B = \max(B_1, B_2).^2)$$

è

$$f_i(x_1, v_1, x_2, v_2, t) > \varphi_i^{11}(x_i, v_i) \quad \text{per} \quad v_i \geq N \quad |x_i| \leq b, |x_j| \leq B (i \neq j)$$

$$f_i(x_1, v_1, x_2, v_2, t) < \varphi_i^{21}(x_i, v_i) \quad \text{per} \quad v_i \leq -N \quad |x_i| \leq b, |x_j| \leq B (i \neq j)$$

$$\text{iii) } f_i(x_1, v_1, x_2, v_2, t) > 0 \quad \text{per} \quad x_i \geq a, |x_j| \leq B, v_i \geq 0 \quad \text{e per} \\ x_i < -a, |x_j| \leq B, v_i \geq E,$$

$$f_i(x_1, v_1, x_2, v_2, t) < 0 \quad \text{per} \quad x_i \geq a, |x_j| \leq B, v_i \leq -E \quad \text{e} \\ \text{per} \quad x_i \leq -a, |x_j| \leq B, v_i \leq 0.$$

$$\text{iv) } \text{le funzioni } f_i \text{ sono periodiche rispetto a } t, \text{ a periodo } T, \\ \text{e } f_i(0, 0, 0, 0, t) \equiv 0.$$

²⁾ È chiaro che la costante B si definisce con lo scopo di avere un limite massimo per $|x|$.

7. - Nello stesso modo che abbiamo usato nella sezione precedente per l'equazione differenziale (2.1), si può definire nei piani $x_i v_i$ ($i = 1, 2$) due curve C_i in modo che le curve integrali delle (6.1), (6.2) le tagliano penetrando nel suo dominio interno.

Restano così definiti due domini R_i limitati per C_i (topologicamente equivalenti ciascuno a un circolo) dei quali non escono integrali del sistema (6.1), (6.2).

8. - Per dimostrare adesso l'esistenza di almeno una soluzione periodica consideriamo lo spazio S_4 dove x_1, v_1, x_2, v_2 sono coordinate di punto, e in S_4 la regione chiusa R^* luogo dei punti $M, M = (x_1, v_1, x_2, v_2)$ tale che il punto $M_1 = (x_1, v_1)$ appartenga a R_1 ed il punto $M_2 = (x_2, v_2)$ appartenga a R_2 . Segue di quello che abbiamo detto prima che una traiettoria che penetra in R^* non esce mai di questa regione.

Definita adesso una trasformazione topologica di R in se stessa facendo corrispondere a ogni punto $[x_1(0), v_1(0), x_2(0), v_2(0)]$ il punto $[x_1(T), v_1(T), x_2(T), v_2(T)]$, questa ha almeno un punto unito, che corrisponde a una soluzione periodica.

§ 3. - Sistemi indipendenti dal tempo.

9. - Consideriamo il sistema di equazioni differenziali

$$\ddot{x}_1 + f_1(x_1, \dot{x}_1, x_2, \dot{x}_2)\dot{x}_1 + g_1(x_1) = 0 \quad (9.1)$$

$$\ddot{x}_2 + f_2(x_1, \dot{x}_1, x_2, \dot{x}_2)\dot{x}_2 + g_2(x_2) = 0 \quad (9.2)$$

equivalente al sistema del primo ordine

$$\dot{x}_1 = v_1 \quad \dot{v}_1 = -f_1(x_1, v_1, x_2, v_2)v_1 - g_1(x_1) \quad (9.3)$$

$$\dot{x}_2 = v_2 \quad \dot{v}_2 = -f_2(x_1, v_1, x_2, v_2)v_2 - g_2(x_2) \quad (9.4)$$

dove le funzioni $f_i(x_1, v_1, x_2, v_2)$ e $g_i(x_i)$ ($i = 1, 2$) sono funzioni continue e lipschitziane dei loro argomenti in ogni dominio limitato e verificano le condizioni (per $i = 1, 2$),

- i) $g_i(x_i)$ sono funzioni dispari crescenti, $x_i g(x_i) > 0$ per $x_i \neq 0$ e $\lim_{x_i \rightarrow \infty} g_i(x_i) = \infty$
- ii) $f_1(0, 0, x_2, v_2) < 0, f_2(x_1, v_1, 0, 0) < 0$

- iii) esistono due funzioni $\varphi_i(x_i, v_i)$ [$\varphi_i(x_i, v_i) = \varphi_i(-x_i - v_i)$] anche continue e lipschitziane dei loro argomenti, e tali che essendo per $i = 1, 2$

$$f_i(x_i, v_i, x_2, v_2) > \varphi_i(x_i, v_i)$$

esistano quattro costanti positive $a_i, b_i, b_i \geq a_i$, tali che sia

$$\varphi_i(x_i, v_i) \geq 0 \quad \text{per} \quad |x_i| \geq a_i$$

$$\int_{-a_i}^{b_i} \varphi_i(x_i, v_i) dx_i \geq \alpha > 0$$

per qualunque funzione continua $v_i(x)$.

10. - Se consideriamo la funzione $\lambda(x, v)$

$$\lambda(x, v) = \frac{1}{2} v^2 + \int_0^x g(\xi) d\xi$$

sarà per $x = x_i(t)$ e ricordando (9.3), (9.4)

$$\frac{d\lambda}{dt} = v_i \dot{v}_i + g_i(x_i) v_i = -v_i^2 f_i(x_i, v_i, x_2, v_2)$$

e per tanto $\lambda(x, v)$ è crescente in un dintorno abbastanza piccolo di $x_i = 0, v_i = 0$.

Le curve $\lambda(x, v) = c^{te}$ sono curve chiuse simmetriche rispetto ad O , « concentriche ». Segue che in un dintorno abbastanza piccolo di $(0, 0)$, le curve integrali delle (9.3), (9.4) tagliano queste curve $\lambda(x, v) = c^{te}$ verso il dominio esterno.

Interessa considerare anche le due equazioni

$$\dot{x}_i = v_i \quad \dot{v}_i = -\varphi_i(x_i, v_i) v_i - g_i(x_i) \quad (i = 1, 2) \quad (10.1)$$

In un lavoro precedente (*) abbiamo dimostrato sotto condizioni più generali delle poste in 9, che esiste per ciascuna delle (10.1) una curva chiusa nel piano $x-v$ in modo che le

³⁾ A. DE CASTRO, *Sol. per. di una eq. diff. del secondo ordine*. Boll. della U.M.I. (3), 8 (1953) 26-29.

altre curve integrali la tagliano penetrando nel suo dominio interno. Nello stesso modo possiamo qui costruire due curve chiuse C_i simmetriche rispetto ad O (formata ciascuna da due archi di curva integrale e due segmenti paralleli ad OV) con la stessa proprietà. E basta confrontare l'equazione caratteristica di (10.1)

$$\frac{dv_i}{dx_i} = -\varphi_i(x_i, v_i) - \frac{g_i(x_i)}{v_i} \quad (i = 1, 2) \quad (10.2)$$

con quest'altra che segue da (9.3), (9.4)

$$\frac{dv_i}{dx_i} = -f_i(x_1, v_1, x_2, v_2) - \frac{g_i(x_i)}{v_i} \quad (i = 1, 2)$$

e ricordare iii) per trovare che anche le curve integrali del sistema (9.1), (9.4) tagliano C_i penetrando nel suo dominio interno.

Siano R_i i domini (ciascuno topologicamente equivalente a una corona circolare) limitati da C_i e da una curva $\lambda(x, v) = c$, con c abbastanza piccolo; una curva che penetra R_i non esce mai da questo dominio.

11. - Consideriamo adesso lo spazio S_4 ove x_1, v_1, x_2, v_2 sono coordinate di punto, e applichiamo un noto ragionamento di G. Colombo. Una soluzione generica del sistema (9.1), (9.2) rappresenta una traiettoria in tale spazio. L'unico punto singolare per il sistema è l'origine O . Consideriamo la regione finita chiusa R^* di questo S_4 definita come il luogo dei punti M , $M = (x_1, v_1, x_2, v_2)$ tali che il punto M_1 , $M_1 = (x_1, v_1)$ appartenga a R_1 ed il punto M_2 , $M_2 = (x_2, v_2)$ appartenga a R_2 . Una traiettoria che abbia un punto $M = (M_1, M_2)$ completamente a questo dominio.

Premesso ciò consideriamo l'intersezione di R^* con il semiperipiano π definito dalle $v_1 = 0, v_2 \geq 0$. Se denotiamo con x_{1n}, x_{1N} , gli estremi del segmento di intersezione di R_1 con il semiasse OX_1 , l'intersezione di π con R^* è una tricella C_3 definita per

$$x_{1n} \leq x \leq x_{1N}, \quad v_1 = 0, \quad M_2 = (x_2, v_2) \quad M_2 \in R_2$$

e consideriamo anche la tricella C_3' simmetrica di C_3 rispetto ad O .

Consideriamo la trasformazione topologica di C_3 in sè stessa che fa corrispondere ad ogni punto M il simmetrico di M' (intersezione della traiettoria per M con C_3') rispetto ad O . In detta trasformazione esiste almeno un punto unito M^* che corrisponde a un ciclo in virtù della simmetria del sistema.