

RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

BRUNO PINI

**Sui sistemi di equazioni lineari a derivate parziali del
secondo ordine dei tipi ellittico e parabolico**

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 22 (1953), p. 265-280

http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1953__22__265_0

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1953, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUI SISTEMI DI EQUAZIONI LINEARI A DERIVATE PARZIALI DEL SECONDO OR- DINE DEI TIPI ELLITTICO E PARABOLICO

Nota () di BRUNO PINI (a Bologna)*

Passando da una singola equazione a un sistema di equazioni lineari, per esempio del secondo ordine in due variabili

$$\begin{aligned}\mathfrak{L}[\mathbf{u}] = & A(x, y) \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial x^2} + 2B(x, y) \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial x \partial y} + C(x, y) \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial y^2} + L(x, y) \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} + \\ & + M(x, y) \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} + N(x, y) \mathbf{u} = \mathbf{f}\end{aligned}$$

ove A, B, C, L, M, N sono assegnate matrici quadrate d'ordine n , $\mathbf{f}$ un assegnato vettore ad n componenti ed $\mathbf{u}$ un vettore incognito ad n componenti, la condizione che si presenta spontaneamente come estensione della condizione di ellitticità per una sola equazione è che

$$\det. || \alpha^2 A + 2\alpha B + C || = 0$$

abbia tutte le radici complesse. Non è noto se tale condizione basti ad assicurare alle soluzioni del sistema un comportamento simile a quello che si ha nel caso di una sola equazione per quanto riguarda un teorema di alternativa per il primo problema di valori al contorno

$$\mathfrak{L}[\mathbf{u}] = \mathbf{f} \quad \text{in} \quad D - \mathfrak{F}D, \quad \mathbf{u} = \overline{\mathbf{u}} \quad \text{su} \quad \mathfrak{F}D,$$

(ove D è un fissato dominio (limitato) del piano x, y , e $\overline{\mathbf{u}}$ un assegnato vettore su $\mathfrak{F}D$) e, per quanto riguarda un cor-

(*) Pervenuta in Redazione il 9 Giugno 1953.

rispondente problema di autovalori, circa la discretezza dello spettro. È da ricordare che A. V. BIZADZE¹⁾ ha costruito un sistema di due equazioni a coefficienti costanti del tipo $A \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial x^2} + 2B \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial y^2} = 0$, soddisfacente l'anzidetta condizione di ellitticità, il quale ammette una soluzione, non nulla, annullantesi sulla frontiera di un opportuno dominio (limitato) del piano x, y .

Recentemente M. I. VISCIK²⁾ ha studiato sistemi lineari di equazioni d'ordine $2m$

$$\mathcal{L}[u] = (-1)^m \sum_{(k)} A^{(k_1, k_2, \dots, k_{2m})}(x) \frac{\partial^{2m} u(x)}{\partial x_{k_1} \partial x_{k_2} \dots \partial x_{k_{2m}}} + Tu = f(x)$$

ove $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $A^{(k_1, k_2, \dots, k_{2m})}(x)$ è la matrice $\|a_{i,j}^{(k_1, k_2, \dots, k_{2m})}(x)\|$, $i, j = 1, 2, \dots, N$, $u(x)$ è il vettore di componenti $u_1(x), u_2(x), \dots, u_N(x)$, $f(x)$ il vettore di componenti $f_1(x), f_2(x), \dots, f_N(x)$ e Tu indica un operatore differenziale lineare arbitrario d'ordine $< 2m$.

Egli suppone soddisfatta una condizione, che chiama di ellitticità forte, consistente nel supporre che la matrice

$$\sum_{(k)} (A^{(k_1, k_2, \dots, k_{2m})} + \overline{A}^{(k_1, k_2, \dots, k_{2m})}) \xi_{k_1} \xi_{k_2} \dots \xi_{k_{2m}},$$

ove il soprassegno indica trasposizione, sia definita positiva qualunque siano i numeri reali $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$, non tutti nulli. Per un siffatto sistema, e per il suo aggiunto, VISCIK riesce a provare un teorema di alternativa per il problema consistente nell'annullare su $\mathcal{F}D$, in un certo senso generalizzato, la soluzione e le sue prime $m - 1$ derivate. Studia poi il corrispondente problema di autovalori provando, tra l'altro, la discretezza dello spettro per l'operatore $\mathcal{L}$.

Nella presente Nota, riservandoci di ritornare sull'argomento da un punto di vista più generale, prendiamo in consi-

¹⁾ A. V. BIZADZE, *Sull'unicità della soluzione del problema di Dirichlet per le equazioni ellittiche a derivate parziali*, Uspechi matematicheskikh nauk, t. III, n. 6, (28) (1948) 211-212 (in russo).

²⁾ M. I. VISCIK, *Sui sistemi fortemente ellittici di equazioni differenziali*, Mat. Sbornik N. S. (29) 71 (1951) 615-676 (in russo).

derazione il sistema autoaggiunto

$$(1) \quad \mathfrak{L}[\mathbf{u}] = \frac{\partial}{\partial x} \left(A \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} + B \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(B \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} + C \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} \right) - N \mathbf{u} = \mathbf{f},$$

ove A, B, C, N , sono matrici simmetriche d'ordine n , continue su un dominio D , con A, B, C dotate delle derivate prime continue, ed $\mathbf{f}$ un vettore continuo ad n componenti, nell'ipotesi che le matrici $\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}$ ed N siano definite positive. È allora evidentemente soddisfatta la condizione di ellitticità forte di VISCIK perchè

$$(\alpha^2 A + 2\alpha\beta B + \beta^2 C) \mathbf{c} \times \mathbf{c} = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \alpha & \beta \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \mathbf{c} \\ \mathbf{c} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \alpha & \beta \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \mathbf{c} \\ \mathbf{c} \end{vmatrix}.$$

Per tale sistema consideriamo il primo problema di valori al contorno nel senso generalizzato di G. CIMMINO³⁾. Cioè, se $\mathcal{C}(t)$ per $t \rightarrow 0$ è un sistema di curve approssimanti la $\mathfrak{F}D$, per esempio parallele alla $\mathfrak{F}D$, la condizione al contorno consiste nell'essere

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int_{\mathcal{C}(t)} |\mathbf{u} - \overline{\mathbf{u}}|^2 ds = 0$$

per un assegnato vettore $\overline{\mathbf{u}}$ con la norma di quadrato sommabile su $\mathfrak{F}D$.

Solo per semplicità ci limitiamo a considerare sistemi in due variabili; la trattazione si estende subito a sistemi in un numero qualsiasi di variabili.

Noi però, una volta conseguito un teorema di unicità, non svilupperemo tutti i calcoli necessari per provare l'esistenza della soluzione, limitandoci a provare quanto basta ad assicurare la possibilità di ripetere ragionamenti già fatti in altre

³⁾ G. CIMMINO, *Nuovo tipo di condizioni al contorno e nuovo metodo di trattazione per il problema generalizzato di Dirichlet*, Rend. Circolo Mat. di Palermo, 61 (1937) 177-220; *Sul problema generalizzato di Dirichlet per l'equazione di Poisson*, Rend. Sem. Mat. Padova (7) 1 (1940) 28-96.

occasioni ⁴⁾. Insieme al sistema (1) considereremo anche un analogo sistema di tipo parabolico

$$(2) \quad \mathfrak{L}[\mathbf{u}] = \frac{\partial}{\partial x} \left(A \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} + B \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(B \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} + C \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} \right) - \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} - N\mathbf{u} = \mathbf{f}$$

e mostreremo come anche per questo possa trattarsi il primo problema di valori al contorno nel senso generalizzato anzidetto.

Sistemi di tipo ellittico.

Sia D un dominio la cui frontiera sia una unica (per semplicità) curva semplice chiusa $\mathfrak{C}$ di classe 2, di cui $x = \bar{x}(s)$, $y = \bar{y}(s)$, $0 \leq s \leq L$, siano le equazioni parametriche in funzione dell'arco. Indichiamo con $\mathfrak{C}(t)$ la curva $x = \bar{x}(s) + \lambda t$, $y = \bar{y}(s) + \mu t$, $0 \leq s \leq L$, essendo λ e μ i coseni direttori della normale interna e t un numero positivo variabile in un intorno dello zero.

Sussiste il seguente teorema di unicità:

Se $\bar{\mathbf{u}}(s)$ è un vettore con la norma di quadrato sommabile sull'intervallo $0 \leq s \leq L$, esiste al più un vettore $\mathbf{u}(x, y)$ che in $D - \mathfrak{F}D$ è soluzione regolare (ha derivate prime e seconde continue) di $\mathfrak{L}[\mathbf{u}] = \mathbf{f}$ e soddisfa la condizione al contorno

$$(3) \quad \lim_{t \rightarrow 0} \int_{\mathfrak{C}(t)} |\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}|^2 d\sigma = 0.$$

Sia $\mathbf{u}$ la differenza di due eventuali soluzioni regolari distinte di $\mathfrak{L}[\mathbf{u}] = \mathbf{f}$, soddisfacenti la detta condizione al contorno. Con semplici integrazioni per parti si prova, integrando $\mathfrak{L}[\mathbf{u}] \times \mathbf{u}$ sul dominio limitato $D(t)$ avente per frontiera la $\mathfrak{C}(t)$, che

$$(4) \quad \int_{\mathfrak{C}(t)} \left[\left(A \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} + B \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} \right) \times \mathbf{u} dy - \left(B \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} + C \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} \right) \times \mathbf{u} dx \right] = \\ = \int_{D(t)} \left(A \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} \times \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} + 2B \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} \times \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} + C \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} \times \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} + N\mathbf{u} \times \mathbf{u} \right) dx dy$$

⁴⁾ Cfr. per esempio B. PINI, *Sul primo problema di valori al contorno della teoria dell'elasticità*, Rend. Sem. Mat. Padova, 21 (1952) 345-369.

da cui, integrando sull'intervallo t, T , supposto $0 < t < T$,

$$\int_t^T d\tau \int_{\mathcal{Q}(\tau)} \left[\lambda \left(A \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} + B \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} \right) + \mu \left(B \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} + C \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} \right) \right] \times \mathbf{u} d\sigma = - \\ - \int_t^T d\tau \int_{D(\tau)} \left(A \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} \times \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} + 2B \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} \times \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} + C \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} \times \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} + N\mathbf{u} \times \mathbf{u} \right) dx dy$$

tenendo presente che

$$\frac{d(\bar{y} + \mu t)}{d\sigma} = \frac{d\bar{y}}{ds} = -\lambda, \quad \frac{d(\bar{x} + \lambda t)}{d\sigma} = \frac{d\bar{x}}{ds} = \mu.$$

L'integrale a sinistra si può scrivere

$$\int_{D(t)-D(T)} \left[\lambda \left(A \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} + B \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} \right) + \mu \left(B \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} + C \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} \right) \right] \times \mathbf{u} dx dy$$

poichè $\frac{\partial(x, y)}{\partial(s, t)} = \frac{\partial \sigma}{\partial s}$. Eseguendo delle integrazioni per parti si riconosce che questo è eguale a

$$\frac{1}{2} \int_{\mathfrak{F}[D(t)-D(T)]} [(\lambda A + \mu B)\mathbf{u} \times \mathbf{u} dy - (\lambda B + \mu C)\mathbf{u} \times \mathbf{u} dx] - \\ - \frac{1}{2} \int_{D(t)-D(T)} \left[\frac{\partial}{\partial x} (\lambda A + \mu B) + \frac{\partial}{\partial y} (\lambda B + \mu C) \right] \mathbf{u} \times \mathbf{u} dx dy.$$

Infine, passando al limite per $t \rightarrow 0$, tenendo presente che

$$(5) \quad \lim_{t \rightarrow 0} \int_{\mathcal{Q}(t)} |\mathbf{u}|^2 d\sigma = 0,$$

si ha

$$\int_{\mathcal{Q}(T)} (\lambda^2 A + 2\lambda\mu B + \mu^2 C) \mathbf{u} \times \mathbf{u} d\sigma = \int_{D-D(T)} \left[\frac{\partial}{\partial x} (\lambda A + \mu B) + \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial y} (\lambda B + \mu C) \right] \mathbf{u} \times \mathbf{u} dx dy - 2 \int_0^T dt \int_{D(t)} \left(A \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} \times \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} + \right. \\ \left. + 2B \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} \times \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} + C \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} \times \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} + N\mathbf{u} \times \mathbf{u} \right) dx dy.$$

$$\text{Ora, poichè } (\lambda^2 A + 2\lambda \mu B + \mu^2 C) \mathbf{u} \times \mathbf{u} = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \lambda \mathbf{u} \\ \mu \mathbf{u} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \lambda \mathbf{u} \\ \mu \mathbf{u} \end{vmatrix},$$

essendo per ipotesi la matrice $\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}$ definita positiva, il primo membro è una quantità positiva per dei T comunque prossimi a zero; infatti in caso contrario la $\mathbf{u}$ dovrebbe annullarsi in una corona attorno a $\mathcal{C}$ e quindi, riuscendo biregolare in tutto D , sarebbe identicamente nulla per la (4).

Il primo integrale a secondo membro si può scrivere

$$\int_0^T dt \int_{\mathcal{C}(t)} \left[\frac{\partial}{\partial x} (\lambda A + \mu B) + \frac{\partial}{\partial y} (\lambda B + \mu C) \right] \mathbf{u} \times \mathbf{u} d\sigma$$

e quindi, essendo $\mathcal{C}$ di classe 2 ed essendo le matrici A, B, C dotate delle derivate parziali prime continue, causa la (5), si riconosce che per $T \rightarrow 0$ esso è un infinitesimo di ordine maggiore di uno (rispetto a T). Il secondo integrale sulla destra è invece al più infinitesimo come T , poichè $A \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} \times \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} + 2B \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} \times \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} + C \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} \times \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y}$ è una quantità positiva non necessariamente sommabile su D , ed $N\mathbf{u} \times \mathbf{u}$ è non negativa. Dunque per T abbastanza piccolo il secondo membro è negativo. Di qui l'assurdo.

Notiamo espressamente che se $\mathbf{u}$ è una soluzione di $\mathcal{L}[\mathbf{u}] = 0$ soddisfacente la (3), il ragionamento ora fatto porta a stabilire la seguente maggiorazione

$$(6) \quad \int_{\mathcal{C}(t)} (\lambda^2 A + 2\lambda \mu B + \mu^2 C) \mathbf{u} \times \mathbf{u} d\sigma < \int_{\mathcal{C}} (\lambda^2 A + 2\lambda \mu B + \mu^2 C) \bar{\mathbf{u}} \times \bar{\mathbf{u}} ds$$

della media, sulle curve approssimanti, di una certa forma quadratica nelle componenti di $\mathbf{u}$ mediante la media di una analoga forma quadratica nelle componenti del vettore $\bar{\mathbf{u}}$ assegnato su $\mathcal{C}$, se $\left| \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} \right|^2 + \left| \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} \right|^2$ non è sommabile su D .

Il teorema di unicità ora provato, insieme a una opportuna formola di media⁵⁾, permette di stabilire l'esistenza

⁵⁾ Cfr. B. PINI, *Sulle equazioni lineari a derivate parziali d'ordine 2n di tipo ellittico ecc.*, Rend. di Mat. e delle sue appl. V (XI) (1952) 176-195.

della soluzione per il teorema in oggetto. La prova si conduce su uno schema noto ⁶⁾, sul quale qui non ci soffermiamo.

Lo stesso tipo di ragionamento permetterebbe anche di acquisire un teorema di esistenza per il primo problema di valori al contorno, ordinario

$$\mathfrak{L}[\mathbf{u}] = \mathbf{f} \quad \text{in } D - \mathfrak{F}D, \quad \mathbf{u} = \overline{\mathbf{u}} \quad \text{su } \mathfrak{F}D,$$

(nel senso che $\lim \mathbf{u}(x, y) = \overline{\mathbf{u}}(s)$ al tendere di (x, y) a un punto qualsiasi della $\mathfrak{F}D$) qualora si possedesse una formola di maggiorazione puntuale, anzichè globale come la (6), della soluzione in funzione dei dati ⁷⁾.

Di ciò ci occuperemo in un'altra Nota. Vogliamo però fare fin d'ora un'osservazione.

È notissimo che se in un campo A l'equazione

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}[u] = a(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + l(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} + \\ + m(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} + n(x, y)u = 0 \end{aligned}$$

è ellittico-parabolica ($a\alpha^2 + 2b\alpha\beta + c\beta^2$ semidefinita positiva), se in A è $n < 0$, una soluzione non può avere in A nè un minimo negativo nè un massimo positivo.

Passando da una equazione singola a un sistema, non sembra possibile ripetere i ragionamenti elementari coi quali si consegue il risultato riportato. Sembra invece possibile conseguire dei risultati in tal senso basandosi su una opportuna formola di media ⁸⁾.

⁶⁾ Cfr. i lavori citati in ³⁾.

⁷⁾ Cfr. B. PINI, *Sul problema di Dirichlet per le equazioni a derivate parziali del secondo ordine di tipo ellittico*, Rend. Acc. Naz. Lincei (8) II (1951) 325-333.

⁸⁾ Indicando con $\mathfrak{N}$ l'operatore differenziale aggiunto di $\mathfrak{L}$ (in convenienti ipotesi di regolarità dei coefficienti e supponendo $a > 0$, $ac - b^2 > 0$), G. CIMMINO in *Nuove proprietà caratteristiche per le soluzioni delle equazioni lineari alle derivate parziali di tipo ellittico del secondo ordine*, (Atti del 2° Congresso U.M.I., Aprile 1940) ha stabilito la formola di media

$$u(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi \sqrt{(ac - b^2)_{x_0, y_0}}} \int_{\mathfrak{D}_r} (u \mathfrak{N}[V] - fV) dx dy$$

Consideriamo il sistema particolare

$$(7) \quad \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial y^2} - N(x, y)\mathbf{u} = 0$$

nell'ipotesi che N sia una matrice continua definita positiva.

Fissato nel campo A un punto (x_0, y_0) , indicando con $\mathfrak{D}_r$ il cerchio $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \leq r^2$, con r opportunamente piccolo in modo che $\mathfrak{D}_r$ appartenga ad A , detto α un numero positivo < 1 e posto $\rho = [(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2]^{1/2}$, si può provare che la

$$u(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathfrak{D}_r} \left[u(x, y) \frac{\alpha \rho^{\alpha-2}}{r^\alpha} - \left(\lg \frac{r}{\rho} + \frac{\rho^\alpha - r^\alpha}{\alpha r^\alpha} \right) f(x, y) \right] dx dy$$

caratteristica delle soluzioni dell'equazione $\mathfrak{L}[u] = f$, ove $\mathfrak{D}_r$ è il dominio ellittico

$$c(x_0, y_0)(x - x_0)^2 - 2b(x_0, y_0)(x - x_0)(y - y_0) + a(x_0, y_0)(y - y_0)^2 = \rho^2, \\ 0 \leq \rho \leq r$$

e

$$V = \lg \frac{r}{\rho} + \frac{\rho^\alpha - r^\alpha}{\alpha r^\alpha};$$

da tale formola deduce che una soluzione dell'equazione omogenea in cui è nullo il coefficiente n della funzione incognita non può avere massimi o minimi nell'interno del campo. Per quanto riguarda l'equazione completa, poichè

$$1 = \frac{1}{2\pi \sqrt{(ac - b^2)_{x_0, y_0}}} \int_{\mathfrak{D}_r} (\mathfrak{N}[V] - nV) dx dy$$

si ha

$$\int_{\mathfrak{D}_r} \{ \mathfrak{N}[V][u(x, y) - u(x_0, y_0)] + (nu(x_0, y_0) - f) \} dx dy = 0.$$

Ora, poichè nell'interno di $\mathfrak{D}_r$ è $V > 0$ ed $\mathfrak{N}[V] > 0$, per r abbastanza piccolo, è evidente che se $n \leq 0$, non vi può essere un massimo positivo se $f \geq 0$, nè un minimo negativo se $f \leq 0$, a meno che $u(x, y)$ non sia costante in tutto un contorno di (x_0, y_0) ; si riottiene in tal modo un noto risultato (cfr. E. HOPF, *Elementare Betrachtungen über die Lösung partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung vom elliptischen Typus*, Sitzungsab. Ak. Berl. (1927), 147-152; cfr. anche un recente lavoro di C. MIRANDA, *Sulle proprietà di minimo e di massimo delle soluzioni delle equazioni a derivate parziali lineari del secondo ordine di tipo ellittico*, Atti Acc. Naz. Lincei (8) X (1951) 117-120.

è una formola di media caratteristica per le soluzioni di $\Delta u = f$.

Si avrà così per una soluzione del sistema (7) la formola di media

$$\mathbf{u}(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathfrak{D}_r} \left[\frac{\alpha \rho^{\alpha-2}}{r^\alpha} \mathbf{u}(x, y) - \left(\lg \frac{r}{\rho} + \frac{\rho^\alpha - r^\alpha}{\alpha r^\alpha} \right) N(x, y) \mathbf{u}(x, y) \right] dx dy.$$

Poichè

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathfrak{D}_r} \frac{\alpha \rho^{\alpha-2}}{r^\alpha} dx dy = 1$$

si deduce

$$\int_{\mathfrak{D}_r} \left\{ \frac{\alpha \rho^{\alpha-2}}{r^\alpha} [\mathbf{u}(x, y) - \mathbf{u}(x_0, y_0)] - \left(\lg \frac{r}{\rho} + \frac{\rho^\alpha - r^\alpha}{\alpha r^\alpha} \right) N(x, y) \mathbf{u}(x, y) \right\} dx dy = 0,$$

e quindi anche

$$\begin{aligned} & \int_{\mathfrak{D}_r} \left\{ \frac{\alpha \rho^{\alpha-2}}{r^\alpha} [\mathbf{u}(x, y) \times \mathbf{u}(x_0, y_0) - |\mathbf{u}(x_0, y_0)|^2] - \right. \\ & \left. - \left(\lg \frac{r}{\rho} + \frac{\rho^\alpha - r^\alpha}{\alpha r^\alpha} \right) N(x, y) \mathbf{u}(x, y) \times \mathbf{u}(x_0, y_0) \right\} dx dy = 0. \end{aligned}$$

Di qui segue che $|\mathbf{u}(x, y)|$ non può avere massimi relativi in A . Infatti se in (x_0, y_0) la $|\mathbf{u}(x, y)|$ presentasse un massimo, si avrebbe $\mathbf{u}(x, y) \times \mathbf{u}(x_0, y_0) \leq |\mathbf{u}(x_0, y_0)|$ in tutto un intorno $\mathfrak{D}_r$ di (x_0, y_0) ; ora dall'essere N definita positiva si ha che per r abbastanza piccolo riesce $N(x, y) \mathbf{u}(x, y) \times \mathbf{u}(x_0, y_0) > 0$, essendo $N(x, y) \mathbf{u}(x_0, y_0) \times \mathbf{u}(x_0, y_0) > 0$; d'altra parte $\frac{\alpha \rho^{\alpha-2}}{r^\alpha}$ è sempre > 0 mentre $\lg \frac{r}{\rho} + \frac{\rho^\alpha - r^\alpha}{\alpha r^\alpha}$ è > 0 nell'interno di $\mathfrak{D}_r$ e nulla sulla $\mathfrak{F}\mathfrak{D}_r$. Si conclude che

$$|\mathbf{u}(x, y)| \leq \max_{\mathfrak{F}A} |\mathbf{u}(x, y)|$$

Lo stesso risultato si può stabilire per la norma di una soluzione del sistema

$$a(x, y) \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial x^2} + 2b(x, y) \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial x \partial y} + c(x, y) \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial y^2} - N(x, y) \mathbf{u} = 0$$

almeno nell'ipotesi che sia assicurata la continuità dei coefficienti del sistema aggiunto e sia $a > 0$, $ac - b^2 > 0$.

Sistemi di tipo parabolico.

Considerazioni simili a quelle svolte per i sistemi ellittici si possono ripetere per certi sistemi parabolici.

Anzitutto, mentre per una equazione

$$a(x_1, x_2, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + 2b(x_1, x_2, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} + c(x_1, x_2, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

si ha l'unicità della soluzione per il problema ordinario di valori al contorno, se $a\lambda^2 + 2\lambda\mu + c\mu^2$ è una forma definita, passando a un sistema

$$\mathfrak{L}[u] = A \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial x_1^2} + 2B \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial x_1 \partial x_2} + C \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial x_2^2} - \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} = 0,$$

la condizione che sia

$$(8) \quad \det. \parallel \rho^2 A + 2\rho B + C \parallel \neq 0$$

per ogni numero reale ρ , non assicura più il verificarsi di un analogo fatto.

Ciò si vede facilmente adattando al caso parabolico certe considerazioni svolte da BIZADZE e da VISCIK⁹⁾ nel caso ellittico.

Poniamo

$$\mathbf{u} = (\sum_1^2 \alpha_{ij} x_i x_j - hy) \mathbf{a}$$

essendo $\mathbf{a}$ un vettore costante, $\alpha_{11} + \alpha_{22} > 0$, $\alpha_{12} = \alpha_{21}$, $\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}^2 \geq 0$, $h > 0$. Riesce

$$\mathfrak{L}[\mathbf{u}] = [2(\alpha_{11}A + 2\alpha_{12}B + \alpha_{22}C) + hE] \mathbf{a}.$$

Pertanto se si vuole che il primo problema di valori al contorno abbia una sola soluzione è necessario che sia

$$(9) \quad \det. \parallel 2(\alpha_{11}A + 2\alpha_{12}B + \alpha_{22}C) + hE \parallel \neq 0$$

⁹⁾ Cfr. l. c. in 2).

qualunque sia la matrice $\|\alpha_{ij}\|$ semidefinita positiva e qualunque sia $h > 0$. Infatti, in caso contrario, in corrispondenza a una certa matrice $\|\alpha_{ij}\|$ semidefinita positiva e a un certo $h > 0$, si potrebbe trovare una vettore $\mathbf{a}$ tale che $\mathfrak{L}[(\sum_{i,j}^2 \alpha_{ij} x_i x_j - hy)\mathbf{a}] = 0$ e quindi $\mathbf{u} = (\sum_{i,j}^2 \alpha_{ij} x_i x_j - hy)\mathbf{a}$ sarebbe un integrale di $\mathfrak{L}[\mathbf{u}] = 0$ nullo sul paraboloide, o cilindro parabolico,

$$y = \frac{1}{h} \sum_{i,j}^2 \alpha_{ij} x_i x_j.$$

Consideriamo il seguente caso particolare

$$(10) \left\| \begin{matrix} a_1 & -a_2 \\ a_2 & a_1 \end{matrix} \right\| \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial x_1^2} + 2 \left\| \begin{matrix} b_1 & -b_2 \\ b_2 & b_1 \end{matrix} \right\| \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial x_1 \partial x_2} + \left\| \begin{matrix} c_1 & -c_2 \\ c_2 & c_1 \end{matrix} \right\| \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial x_2^2} - \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} = 0;$$

posto $a = a_1 + ia_2$, $b = b_1 + ib_2$, $c = c_1 + ic_2$, $u = u_1 + iu_2$, si può scrivere

$$a \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + 2b \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} + c \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

La condizione (8) è che sia

$$\left| \begin{matrix} a_1 \rho^2 + 2b_1 \rho + c_1 & -(a_2 \rho^2 + 2b_2 \rho + c_2) \\ a_2 \rho^2 + 2b_2 \rho + c_2 & a_1 \rho^2 + 2b_1 \rho + c_1 \end{matrix} \right| = \|a\rho^2 + 2b\rho + c\|^2 \neq 0.$$

Posto $\rho = \cotg \varphi$, nel piano complesso $z = x_1 + ix_2$, la $z = a \cos^2 \varphi + 2b \sin \varphi \cos \varphi + c \sin^2 \varphi$ rappresenta una ellisse; la condizione menzionata è che questa ellisse non passi per l'origine.

La condizione (9) è che sia

$$\left| \begin{matrix} a_1 \alpha_{11} + 2b_1 \alpha_{12} + c_1 \alpha_{22} + h & -(a_2 \alpha_{11} + 2b_2 \alpha_{12} + c_2 \alpha_{22}) \\ a_2 \alpha_{11} + 2b_2 \alpha_{12} + c_2 \alpha_{22} & a_1 \alpha_{11} + 2b_1 \alpha_{12} + c_1 \alpha_{22} + h \end{matrix} \right| = \\ = \|a\alpha_{11} + 2b\alpha_{12} + c\alpha_{22} + h\|^2 \neq 0.$$

Ora, posto $\frac{\alpha_{11}}{\alpha_{11} + \alpha_{22}} = \cos^2 \varphi$, $\frac{\alpha_{22}}{\alpha_{11} + \alpha_{22}} = \sin^2 \varphi$, $\frac{\alpha_{12}}{\alpha_{11} + \alpha_{22}} = \beta$ (onde $\beta^2 \leq \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi$) e $\frac{h}{\alpha_{11} + \alpha_{22}} = k$, nel piano complesso z la $z = a \cos^2 \varphi + 2\beta b + c \sin^2 \varphi$ al variare di φ e di β rappre-

senta in generale tutti i punti interni alla precedente ellisse. Supponiamo che quest'ultima pur non passando per l'origine tagli il semiasse negativo x_1 . Allora è soddisfatta la condizione (8) mentre avendosi per un punto comune al semiasse x_1 negativo e a $z = a \cos^2 \varphi + 2\beta b + c \sin^2 \varphi$, $x_1 = a_1 \cos^2 \varphi + 2b_1\beta + c_1 \sin^2 \varphi < 0$, $x_2 = a_2 \cos^2 \varphi + 2b_2\beta + c_2 \sin^2 \varphi = 0$, si possono scegliere φ e β (e quindi α_{11} , α_{12} , α_{22}) e poi $k > 0$, e quindi $h > 0$, in modo che sia $\|a\alpha_{11} + 2b\alpha_{12} + c\alpha_{22} + h\|^2 = 0$, da cui segue l'esistenza di uno (infiniti) domini parabolici sulla cui frontiera si annulla una soluzione non identicamente nulla del sistema (10).

Prendiamo ora in considerazione il sistema

$$(11) \quad \mathfrak{L}[\mathbf{u}] = \frac{\partial}{\partial x} \left(A \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} + B \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(B \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} + C \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} \right) - \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} - N\mathbf{u} = \mathbf{f}$$

ove A , B , C , N sono matrici simmetriche, funzioni continue di (x, y, z) con A , B , C dotate anche delle derivate rispetto a x e y continue; $\mathbf{f}$ un vettore continuo.

Siano $z = a$, $z = b$ due piani caratteristici; $\mathfrak{S} \equiv (x = \bar{x}(s, z), y = \bar{y}(s, z), z = z; 0 \leq s \leq L, a \leq z \leq b)$ una superficie di classe 2 che coi precedenti piani caratteristici individui un dominio D , di cui indichiamo con B_a e B_b le basi. Per ogni valore di z le $x = \bar{x}(s, z)$, $y = \bar{y}(s, z)$ sono le equazioni parametriche di una curva regolare semplice chiusa $\mathcal{C}_z$; supponiamo, come al solito, che al variare di s da 0 ad L tale curva sia percorsa positivamente in modo che nella rappresentazione parametrica adottata per $\mathfrak{S}$ la normale sia orientata verso l'esterno.

Detti λ e μ i coseni direttori della normale interna a $\mathcal{C}_z$ sul piano caratteristico cui essa appartiene, chiamiamo $\mathcal{C}_z(t)$ la curva $x = \bar{x}(s, z) + \lambda t$, $y = \bar{y}(s, z) + \mu t$, $0 \leq s \leq L$; $\mathfrak{S}(t)$ la superficie $x = \bar{x}(s, z) + \lambda t$, $y = \bar{y}(s, z) + \mu t$, $z = z$ per $0 \leq s \leq L$, $a \leq z \leq b$; $D(t)$ il dominio limitato da $\mathfrak{S}(t)$ e dai piani $z = a$, $z = b$; $B_a(t)$ e $B_b(t)$ le basi di $D(t)$.

Sussiste il seguente teorema di unicità:

Esiste al più un vettore $\mathbf{u}$ che in $D - \mathfrak{S}$ è soluzione regolare di $\mathfrak{L}[\mathbf{u}] = \mathbf{f}$, che si annulla nei punti interni di B_a

e soddisfa la condizione al contorno

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int_{\hat{S}(t)} |\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}|^2 ds = 0$$

essendo $\bar{\mathbf{u}}$ un assegnato vettore con la norma di quadrato sommabile su $\mathcal{S}$.

Detta $\mathbf{u}$ la differenza di due eventuali siffatte soluzioni, integrando $\mathcal{Q}[\mathbf{u}] \times \mathbf{u}$ su $D(t)$ si ha

$$\begin{aligned} \int_{\hat{D}(t)} \left[\left(A \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} + B \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} \right) \times \mathbf{u} dydz + \left(B \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} + C \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} \right) \times \mathbf{u} dzdx - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} |\mathbf{u}|^2 dx dy \right] = \int_{D(t)} \left(A \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} \times \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} + 2B \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} \times \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} + \right. \\ \left. + C \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} \times \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} + N\mathbf{u} \times \mathbf{u} \right) dx dy dz, \end{aligned}$$

ossia

$$\begin{aligned} \int_{\hat{S}(t)} \left[\left(A \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} + B \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} \right) \times \mathbf{u} dydz + \left(B \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} + C \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} \right) \times \mathbf{u} dzdx \right] = \\ = \frac{1}{2} \int_{\hat{S}(t)} |\mathbf{u}|^2 dx dy + \frac{1}{2} \int_{B_b(t)} |\mathbf{u}|^2 dx dy + \int_{D(t)} \left(A \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} \times \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} + 2B \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} \times \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} + \right. \\ \left. + C \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} \times \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} + N\mathbf{u} \times \mathbf{u} \right) dx dy dz. \end{aligned}$$

Ma

$$\frac{\partial(y, z)}{\partial(s, z)} = \frac{\partial y}{\partial s} = -\lambda \frac{\partial \sigma}{\partial s}, \quad \frac{\partial(z, x)}{\partial(s, z)} = -\frac{\partial x}{\partial s} = -\mu \frac{\partial \sigma}{\partial s},$$

indicando con σ l'arco di C_z ; pertanto si ha

$$\begin{aligned} \int_a^b dz \int_{\hat{C}_z(t)} \left[\lambda \left(A \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} + B \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} \right) + \mu \left(B \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} + C \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} \right) \right] \times \mathbf{u} d\sigma = - \\ - \frac{1}{2} \int_{\hat{S}(t)} |\mathbf{u}|^2 dx dy - \frac{1}{2} \int_{B_b(t)} |\mathbf{u}|^2 dx dy - \int_{D(t)} \left(A \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} \times \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} + 2B \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} \times \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} + \right. \\ \left. + C \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} \times \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} + N\mathbf{u} \times \mathbf{u} \right) dx dy dz. \end{aligned}$$

Se ora è $0 < t < T$, integrando da t a T , procedendo come nel caso ellittico, si ottiene in definitiva

$$\begin{aligned} \int_a^b dz \int_{C_z(T)} (\lambda^2 A + 2\lambda \mu B + \mu^2 C) \mathbf{u} \times \mathbf{u} d\sigma &= \int_a^b dz \int_{B_z - B_z(T)} \left[\frac{\partial}{\partial x} (\lambda A + \mu B) + \right. \\ &+ \left. \frac{\partial}{\partial y} (\lambda B + \mu C) \right] \mathbf{u} \times \mathbf{u} dx dy - \int_0^T dt \int_{S(t)} |\mathbf{u}|^2 dx dy - \int_0^T dt \int_{B_y(t)} |\mathbf{u}|^2 dx dy - \\ &- 2 \int_0^T dt \int_{D(t)} \left(A \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} \times \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} + 2B \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} \times \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} + C \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} \times \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} + \right. \\ &\quad \left. + N \mathbf{u} \times \mathbf{u} \right) dx dy dz, \end{aligned}$$

indicando con B_z e $B_z(t)$ le sezioni di D e $D(t)$ col piano caratteristico $z = z$. Pertanto si conclude nell'asserto con un ragionamento simile a quello già fatto nel caso dei sistemi di tipo ellittico, tenendo presente che il terzo termine sulla destra è essenzialmente negativo.

Osserviamo ora che nell'ipotesi che la matrice $\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}$ sia definita positiva, è certamente soddisfatta la condizione di parabolicità di PETROVSKI¹⁰). Questa richiede che le radici dell'equazione

$$\det. || \lambda E + \alpha^2 A + 2\alpha\beta B + \beta^2 C || = 0$$

abbiano tutte parte reale $<$ di un certo $\delta < 0$, qualunque siano α e β con $\alpha^2 + \beta^2 = 1$.

Ora, detti $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ gli autovalori della matrice $-(\alpha^2 A + 2\alpha\beta B + \beta^2 C)$, si ha intanto che essi sono tutti negativi e le loro proprietà estremali assicurano che

$$|\lambda_i| \geq \min_{\substack{|\mathbf{u}|=1 \\ \alpha^2 + \beta^2 = 1}} (\alpha^2 A + 2\alpha\beta B + \beta^2 C) \mathbf{u} \times \mathbf{u} \geq \min_{|\mathbf{u}_1|, |\mathbf{u}_2|=1} \left\| \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} \right\| \frac{\|\mathbf{u}_1\|}{\|\mathbf{u}_2\|} \times \frac{\|\mathbf{u}_1\|}{\|\mathbf{u}_2\|},$$

¹⁰) I. PETROVSKI, *über das Cauchysche Problem für ein System linearer partieller Differentialgleichungen in Gebiete der nichtanalytischen Funktionen*, Bull. de l'Univ. d'État de Moscou, Mathém. et Mécanique, fasc. 7, vol. 1 (1938).

poichè il vettore a $2n$ componenti $\alpha u_1, \dots, \alpha u_n, \beta u_1, \dots, \beta u_n$ ha la norma eguale a 1 se è $\sum_1^n u_k^2 = 1$.

Ciò posto, potremo stabilire una formola di media facendo ricorso alle soluzioni fondamentali del sistema

$$(12) \quad A \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial \xi^2} + 2B \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial \xi \partial \eta} + C \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial \eta^2} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \zeta} = 0,$$

ove i coefficienti si suppongono costanti, calcolati in un punto $(x, y, z)^{11)}$.

Detti $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \dots, \mathbf{c}_n$ gli autovettori relativi alla matrice $-(x^2 A + 2\alpha\beta B + \beta^2 C)$ corrispondenti agli autovalori $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, poniamo

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_k(x, y, z; \xi, \eta, \zeta) = & \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp[\lambda_k(z - \zeta) + i\alpha(x - \xi) + \\ & + i\beta(y - \eta)] \mathbf{c}_k dx d\beta, \quad k = 1, 2, \dots, n. \end{aligned}$$

Fissato ora un punto $P(x, y, z)$, tenendo variabile il punto $Q(\xi, \eta, \zeta)$, indichiamo con $\mathfrak{D}_r$ la semisfera $(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2 \leq r^2, \zeta \leq z$. Poniamo

$$\mathbf{w}_k = \left(1 - \frac{\rho^2}{r^2}\right) \mathbf{v}_k$$

essendo $\rho = \overline{PQ}$. Ciò fatto, nelle formole di reciprocità

$$\begin{aligned} \int_{\mathfrak{D}_r - \mathfrak{D}_\varepsilon} (\mathfrak{L}[\mathbf{u}] \times \mathbf{w}_k - \mathbf{u} \times \mathfrak{M}[\mathbf{w}_k]) d\xi d\eta d\zeta = & \int_{\mathfrak{I}(\mathfrak{D}_r - \mathfrak{D}_\varepsilon)} \left[\left(A \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi} \times \mathbf{w}_k - \right. \right. \\ & - A \frac{\partial \mathbf{w}_k}{\partial \xi} \times \mathbf{u} + B \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \eta} \times \mathbf{w}_k - B \frac{\partial \mathbf{w}_k}{\partial \eta} \times \mathbf{u} \Big) d\eta d\zeta + \left(B \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi} \times \mathbf{w}_k - \right. \\ & \left. - B \frac{\partial \mathbf{w}_k}{\partial \xi} \times \mathbf{u} + C \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \eta} \times \mathbf{w}_k - C \frac{\partial \mathbf{w}_k}{\partial \eta} \times \mathbf{u} \Big) d\zeta d\xi - \mathbf{u} \times \mathbf{w}_k d\xi d\eta \right] \\ & k = 1, 2, \dots, n \end{aligned}$$

¹¹⁾ Si potrebbe anche ricorrere senz'altro alle soluzioni fondamentali del sistema (11); cfr. S. Z. BRUK, *Soluzioni fondamentali di un sistema di equazioni differenziali del tipo parabolico*, Akad. Nauk. S.S.S.R., Doklady (N.S.) 60 (1948) 9-12, (in russo).

ove $\mathfrak{M}$ indica l'operatore differenziale aggiunto di $\mathfrak{L}$, ed ε è un numero positivo $< r$, se A, B, C verificano una condizione di HÖLDER, è lecito passare al limite per $\varepsilon \rightarrow 0$. Si giunge in tal modo, con un procedimento che abbiamo già applicato in analoghe occasioni, a conseguire una formola di media.

Sulla base di questa e del provato teorema di unicità si può dimostrare l'esistenza della soluzione del problema di valori al contorno in oggetto.