

RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

BRUNA LODIGIANI

**Sulla differenziabilità asintotica regolare delle
funzioni di più variabili**

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 22 (1953), p. 251-257

[<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1953__22__251_0>](http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1953__22__251_0)

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1953, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*
<http://www.numdam.org/>

SULLA DIFFERENZIABILITÀ ASINTOTICA REGOLARE DELLE FUNZIONI DI PIÙ VARIABILI

Nota (*) di BRUNA LODIGIANI (a Mantova)

In questa Nota mi propongo di esporre alcuni teoremi¹⁾ relativi alla differenziabilità asintotica regolare per le funzioni di più variabili.

La differenziabilità asintotica regolare è stata studiata da Radò²⁾, Caccioppoli e Scorza Dragoni³⁾.

Una funzione di due variabili si dice *dotata di differenziale asintotico regolare nel punto* $P_0 \equiv (x_0, y_0)$, se esistono due costanti a e b tali da aversi

$$(1) \quad f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = a\Delta x + b\Delta y + \omega,$$

con ω infinitesimo d'ordine superiore rispetto a $\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ quando il punto $P \equiv (x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ tende a P_0 , senza abbandonare un conveniente insieme I di densità superficiale 1 in P_0 e costituito dai contorni di quadrati di centro P_0 e di lati paralleli agli assi.

(*) Pervenuta in Redazione il 15 aprile 1953.

1) Tolti dalla mia Tesi di Laurea in Matematica pura, discussa a Padova il 13-12-1952.

2) T. RADÒ: *On the derivative of the Lebesgue area of continuous surfaces*. [Fundamenta Mathematicae, Vol. XXX (1938), pagg. 34-39], n. 13-14; *On absolutely continuous transformations in the plane*. [Duke Mathematical Journal, Vol. IV (1938), pagg. 219-220].

3) R. CACCIOPPOLI - G. SCORZA DRAGONI: *Necessità della condizione di Weierstrass per la semicontinuità di un integrale sopra una data superficie*. [Reale Accademia d'Italia. Memorie della Classe di Scienze fisiche, matematiche, naturali, Vol. IV (1938), pagg. 251-268], n. 6

Il teorema fondamentale di Radò, Caccioppoli, Scorza Dragoni afferma in sostanza che se $f(x, y)$ è continua nel quadrato

$$Q: 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1$$

ed è quivi dotata quasi ovunque delle derivate parziali prime, essa è asintoticamente differenziabile in modo regolare in quasi tutti i punti di Q .

Per le funzioni di più variabili si può ovviamente introdurre un analogo concetto di differenziabilità asintotica regolare. Limitandoci per semplicità alle funzioni di tre variabili, la definizione sarà la seguente: una funzione $f(x, y, z)$ si dice *dotata di differenziale asintotico regolare nel punto* $P_0 \equiv (x_0, y_0, z_0)$, se esistono tre costanti a, b, c tali da aversi

$$(2) \quad \begin{aligned} f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z) - f(x_0, y_0, z_0) = \\ = a\Delta x + b\Delta y + c\Delta z + \omega \end{aligned}$$

con ω infinitesimo d'ordine superiore rispetto a $\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$, quando il punto $P \equiv (x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z)$ tende a P_0 , senza abbandonare un conveniente insieme I di densità volumetrica 1 in P_0 e costituito dalle facce di cubi di centro P_0 e di spigoli paralleli agli assi.

Il problema di determinare condizioni sufficienti per la differenziabilità asintotica regolare di una funzione in tre o più variabili è tuttora insoluto ⁴⁾.

In questo lavoro io considero questo problema alla luce dei recenti studi di Scorza Dragoni ⁵⁾, Bayada ⁶⁾, Stampac-

⁴⁾ Per la differenziabilità asintotica *quasi regolare* si veda: L. TRIBALDO: *Sulla differenziabilità asintotica quasi regolare delle funzioni di tre variabili*. [Rendiconti del Seminario Matematico dell'Università di Padova, Vol. XIII (1942), pagg. 78-88].

⁵⁾ G. SCORZA DRAGONI: *Un teorema sulle funzioni continue rispetto ad una e misurabili rispetto ad un'altra variabile*. [Rendiconti del Seminario Matematico dell'Università di Padova, Vol. XVII (1948), pagg. 102-106].

⁶⁾ E. BAYADA: *Sulle funzioni continue separatamente rispetto alle variabili e gli integrali curvilinei*. [Rendiconti del Seminario Matematico dell'Università di Padova, Vol. XVII (1948), pagg. 201-218], n. 2.

chia ⁷⁾, Scorza Toso ⁸⁾ sulle funzioni separatamente continue rispetto alle variabili o alle singole coppie di variabili e ottengo un criterio di differenziabilità asintotica regolare per funzioni di tre ⁹⁾ variabili.

Ecco precisamente il teorema a cui sono pervenuta:

Se nel cubo

$$S: 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1, \quad 0 \leq z \leq 1$$

la funzione $f(x, y, z)$ è derivabile parzialmente rispetto a x, y, z , con derivate continue rispetto alle singole coppie delle variabili, allora $f(x, y, z)$ è quasi ovunque in S differenziabile asintoticamente in modo regolare.

1. - Ipotesi. — La funzione $f(x, y, z)$ sia definita nel cubo

$$S: 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1, \quad 0 \leq z \leq 1$$

e sia derivabile parzialmente rispetto a x, y, z , con derivate continue rispetto alle coppie di variabili. In virtù di un risultato di Stampacchia, dato il numero positivo ϵ , possiamo determinare tre insiemi perfetti

$$\alpha_1, \quad \beta_1, \quad \gamma_1,$$

contenuti rispettivamente nei segmenti

$$0 \leq x \leq 1, \quad y = 0, \quad z = 0$$

$$x = 0, \quad 0 \leq y \leq 1, \quad z = 0$$

$$x = 0, \quad y = 0, \quad 0 \leq z \leq 1$$

⁷⁾ G. STAMPACCHIA: *Sopra una classe di funzioni in n variabili*. [Ricerche di Matematica, Vol. I (1952), fascicolo I, pagg. 27-54], n. 1.

⁸⁾ A. M. SCORZA TOSO: *Un'osservazione sulle funzioni di due variabili continue separatamente rispettivamente a queste*. [Rendiconti del Seminario Matematico dell'Università di Padova, Vol. XX (1951), pagg. 468-469].

⁹⁾ L'estensione al caso di 4, 5, ... variabili non dovrebbe presentare nessuna difficoltà.

in guisa che sia

$$m(\alpha_1) > 1 - \varepsilon \quad , \quad m(\beta_1) > 1 - \varepsilon \quad , \quad m(\gamma_1) > 1 - \varepsilon \quad {}^{10)}$$

e che $f'_x(x, y, z)$ sia continua qualora la si consideri come definita soltanto negli insiemi

$$A_1 \quad , \quad B_1 \quad , \quad C_1$$

costituiti, nell'ordine, da quei punti di S che hanno rispettivamente la x in α_1 , la y in β_1 e la z in γ_1 .

Gli insiemi

$$\alpha_2 \quad , \quad \beta_2 \quad , \quad \gamma_2 \quad ,$$

$$A_2 \quad , \quad B_2 \quad , \quad C_2 \quad ,$$

abbiano nei riguardi di $f'_y(x, y, z)$ un significato analogo al precedente e così pure

$$\alpha_3 \quad , \quad \beta_3 \quad , \quad \gamma_3 \quad ,$$

$$A_3 \quad , \quad B_3 \quad , \quad C_3$$

nei riguardi di $f'_z(x, y, z)$.

2. - Un lemma. — Posto ora

$$A = A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \quad , \quad B = B_1 \cdot B_2 \cdot B_3 \quad , \quad C = C_1 \cdot C_2 \cdot C_3 \quad ,$$

$$H(\varepsilon) = A + B + C \quad ,$$

di guisa che $m(H(\varepsilon)) > 1 - 3\varepsilon$, dimostriamo che:

Se $P \equiv (x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z)$ tende, in $H(\varepsilon)$, verso il punto $P_0 \equiv (x_0, y_0, z_0)$ ¹¹⁾, risulta

$$\lim_{P \rightarrow P_0} \frac{1}{PP_0} \{ f(P) - f(P_0) - f'_x(P_0)\Delta x - f'_y(P_0)\Delta y - f'_z(P_0)\Delta z \} = 0.$$

Infatti, sia P un punto di $H(\varepsilon)$. Allora P o appartiene ad A , o a B , o a C .

¹⁰⁾ $m(\alpha_1)$ = misura di α_1 , $m(\beta_1)$ = misura di β_1 , $m(\gamma_1)$ = misura di γ_1 .

¹¹⁾ di $H(\varepsilon)$.

Tanto per fissare le idee, supponiamo che si verifichi il primo caso.

Possiamo scomporre così l'incremento $f(P) - f(P_0)$:

$$\begin{aligned} & f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z) - f(x_0, y_0, z_0) = \\ & = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z) - f(x_0 + \Delta x, y_0, z_0 + \Delta z) + \\ & + f(x_0 + \Delta x, y_0, z_0 + \Delta z) - f(x_0 + \Delta x, y_0, z_0) + \\ & + f(x_0 + \Delta x, y_0, z_0) - f(x_0, y_0, z_0). \end{aligned}$$

Per il teorema del valor medio risulta

$$\begin{aligned} & f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z) - f(x_0 + \Delta x, y_0, z_0 + \Delta z) = \\ & = f'_y(x_0 + \Delta x, y_0 + \theta \Delta y, z_0 + \Delta z) \Delta y \\ & f(x_0 + \Delta x, y_0, z_0 + \Delta z) - f(x_0 + \Delta x, y_0, z_0) = \\ & = f'_z(x_0 + \Delta x, y_0, z_0 + \theta_1 \Delta z) \Delta z \end{aligned}$$

con $0 < \theta < 1$, $0 < \theta_1 < 1$, dove $(x_0 + \Delta x, y_0 + \theta \Delta y, z_0 + \Delta z)$ e $(x_0 + \Delta x, y_0, z_0 + \theta_1 \Delta z)$ sono punti di A , e per quello del differenziale totale

$$f(x_0 + \Delta x, y_0, z_0) - f(x_0, y_0, z_0) = f'_x(x_0, y_0, z_0) \Delta x + \omega$$

con ω infinitesimo d'ordine superiore rispetto a Δx ; inoltre le differenze

$$\begin{aligned} & f'_y(x_0 + \Delta x, y_0 + \vartheta \Delta y, z_0 + \Delta z) - f'_y(x_0, y_0, z_0) \\ & f'_z(x_0 + \Delta x, y_0, z_0 + \vartheta_1 \Delta z) - f'_z(x_0, y_0, z_0) \end{aligned}$$

sono infinitesime con $\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$, poichè le derivate parziali $f'_x(x, y, z)$, $f'_y(x, y, z)$ ed $f'_z(x, y, z)$ sono continue se considerate come definite soltanto sull'insieme $H(\varepsilon)$. Ne segue così la (1).

3. - Un primo teorema. — Accanto all'insieme $H(\varepsilon)$ si consideri ora l'insieme

$$K(\varepsilon) = A \cdot B \cdot C ;$$

allora $K(\varepsilon)$ è misurabile e appartiene ad $H(\varepsilon)$, inoltre risulta

$m(K(\varepsilon)) > 1 - 9\varepsilon$. Per un noto teorema di Lebesgue, quasi tutti i punti di $K(\varepsilon)$ sono di densità lineare 1 per le sezioni di $K(\varepsilon)$ con le parallele agli assi passanti per essi. Sia $K^*(\varepsilon)$ l'insieme di tali punti; si avrà $m(K^*(\varepsilon)) = m(K(\varepsilon))$, con $K^*(\varepsilon)$ contenuto in $K(\varepsilon)$.

Si prenda ora un punto $P_0 \equiv (x_0, y_0, z_0)$ di $K^*(\varepsilon)$. Ci proponiamo di dimostrare il seguente teorema:

È possibile associare a P_0 un insieme $J(P_0)$ misurabile, di densità (volumetrica) 1 in P_0 , formato dai contorni di tanti cubi col centro in P_0 e con le facce parallele ai piani coordinati, in modo che

$$\frac{1}{PP_0} \{ f(P) - f(P_0) - f'_x(P_0)\Delta x - f'_y(P_0)\Delta y - f'_z(P_0)\Delta z \}$$

tenda a zero quando $P \equiv (x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z)$ tende a P_0 mantenendosi in $J(P_0)$.

Infatti si considerino le rette r_1, r_2, r_3 uscenti da P_0 e parallele rispettivamente agli assi x, y, z . Dato che l'intersezione di tre insiemi di una retta di densità 1 in un punto è ancora di densità 1 in questo punto e poichè P_0 appartiene a $K^*(\varepsilon)$, entro le sezioni di $K(\varepsilon)$ con le rette r_1, r_2, r_3 si possono trovare tre insiemi i_1, i_2, i_3 di densità lineare 1 in P_0 , simmetrici rispetto a P_0 e a due a due congruenti. Consideriamo ora i cubi che hanno il centro in P_0 e le facce parallele ai piani coordinati, quelle parallele al piano xy passando per i punti di i_3 , quelle parallele al piano yz passando per i punti di i_1 e quelle parallele al piano zx passando per i punti di i_2 . Come insieme $J(P_0)$ prenderemo l'insieme formato da tutti i contorni dei cubi di tale tipo. Ora $J(P_0)$ è di densità spaziale 1 in P_0 , poichè i_1, i_2, i_3 sono in P_0 di densità lineare 1 ¹²). Inoltre è contenuto per costruzione nell'insieme $H(\varepsilon)$, e di qui e dalla (1) segue il teorema.

¹²) Vedi TIBALDO: *Sulla differenziabilità asintotica quasi regolare delle funzioni di tre variabili*. [Rendiconti del Seminario matematico dell'Università di Padova, Vol. XII (1942), pagg. 78-88], n. 5.

4. - Conclusione. — Dal risultato precedente si trae subito, nelle ipotesi del n. 1, la differenziabilità asintotica regolare della $f(x, y, z)$ per quasi tutti i punti di S . Precisamente $f(x, y, z)$ è asintoticamente differenziabile in modo regolare nell'insieme

$$K^* = K^*(1) + K^*\left(\frac{1}{2}\right) + K^*\left(\frac{1}{3}\right) + \dots K^*\left(\frac{1}{n}\right) + \dots,$$

$K^*\left(\frac{1}{n}\right)$ essendo l'insieme $K^*(\varepsilon)$ per $\varepsilon = \frac{1}{n}$. È ovvio che la misura di K^* è uguale alla misura di S .

OSSERVAZIONE. — Aggiungo infine un esempio di funzione derivabile parzialmente rispetto a x, y, z , tale che essa e le sue derivate siano continue in un punto, rispetto alle coppie di variabili, ma non rispetto al complesso.

Allo scopo basta considerare la funzione $f(x, y, z)$ definita dalle

$$\begin{cases} f(x, y, z) = \frac{x^2 y^2 z^2}{x^6 + y^6 + z^6} & \text{se } x^2 + y^2 + z^2 \neq 0 \\ f(0, 0, 0) = 0 \end{cases}$$

e verificare che essa ha, nell'origine, il comportamento ora descritto.

Come si vede da questo esempio, l'esistenza delle derivate $f'_x(x, y, z)$, $f'_y(x, y, z)$, $f'_z(x, y, z)$ e la loro continuità rispetto alle coppie di variabili, non porta come conseguenza la continuità della $f(x, y, z)$ rispetto al complesso delle variabili, mentre porta come conseguenza immediata la continuità della $f(x, y, z)$ rispetto alle coppie di variabili.