

RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

JAURÈS CECCONI

Un complemento al teorema di Stokes

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 22 (1953), p. 23-37

[<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1953__22__23_0>](http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1953__22__23_0)

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1953, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*
<http://www.numdam.org/>

UN COMPLEMENTO AL TEOREMA DI STOKES

Nota (*) di JAURÈS CECCONI (a Pisa)

1. - INTRODUZIONE.

Sia S una superficie orientata di Frechèt, del tipo della 2-cella, e sia

$$(T, Q) : x = x(u, v), y = y(u, v), z = z(u, v), (u, v) \in Q,$$

una sua rappresentazione sul quadrato unitario; $0 \leq u, v \leq 1$; del piano uv .

In un precedente lavoro [2] ho dimostrato il seguente:

TEOREMA A. — Se

- a) S è quadrabile secondo Lebesgue,
- b) la linea contorno $\partial(S)$ di S è rettificabile,
- c) $F(x, y, z)$ è una funzione continua in un insieme aperto R , contenente il sostegno $[S]$ di S , insieme con le sue derivate parziali $F_x(x, y, z)$, $F_y(x, y, z)$,

allora sussiste la seguente uguaglianza (di Stokes)

$$(1) \quad \int_{(T, Q)} F_z(x, y, z) dz dx - \int_{(T, Q)} F_y(x, y, z) dx dy = \int_{\partial(S)} F(x, y, z) dx,$$

gli integrali nei due membri essendo appropriati integrali di Weierstrass di superficie (L. CESARI [4]) e di linea (L. TONELLI [8], [9]).

Le ipotesi a) e b) dell'enunciato del Teorema A sono legate alla esistenza degli integrali di superficie e di linea che si

(*) Pervenuta in Redazione il 28 ottobre 1952.

sono considerati, e pertanto non possono essere rimosse, l'ipotesi c), invece, può essere allargata in più maniere.

Nel presente lavoro, in quest'ordine di idee, ed in armonia con quanto è stato fatto da C. B. MORREY [5], G. SCORZA DRAGONI [6], E. BAJADA [1], G. STAMPACCHIA [7], prendo in considerazione funzioni $F(x, y, z)$ soltanto approssimativamente continue e limitate in R ; dotate, inoltre, di derivate parziali $F_x(x, y, z)$, $F_y(x, y, z)$ soltanto approssimativamente continue e limitate in R ¹⁾.

A questo scopo ho bisogno, innanzitutto, di estendere i concetti di integrale di linea e di superficie che entrano nella (1), in modo che essi abbiano significato per le funzioni che saranno prese in considerazione.

2. - ESTENSIONE DELLA NOZIONE DI INTEGRALE DI SUPERFICIE

Sia $S \equiv (T, Q)$ la superficie considerata nel n. 1, sia $[S]$ il sostegno di S , R un insieme aperto contenente $[S]$.

Sia $f(x, y, z)$ una funzione definita in R , ivi misurabile, limitata ed approssimativamente continua, salvo al più per i punti di un sotto insieme di R che si proietta in un insieme I_{xy} di misura nulla nel piano xy .

Consideriamo una rappresentazione « assolutamente continua » nel senso di L. CESARI [3] di S , che per brevità supporremo a stessa (T, Q) del n. 1, consideriamo il Jacobiano $H_3(u, v)$ (L. CESARI [3]) della trasformazione piana

$$(T_3, Q) : x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = 0, \quad (u, v) \in Q,$$

associata a (T, Q) , e consideriamo infine la funzione

$$f[x(u, v), y(u, v), z(u, v)] \cdot H_3(u, v).$$

definita quasi ovunque su Q .

Affermo che questa funzione è misurabile su Q , e quindi, in virtù delle ipotesi fatte su (T, Q) e su $f(x, y, z)$, sommabile su Q .

¹⁾ La approssimativa continuità delle funzioni $F(x, y, z)$, $F_x(x, y, z)$, $F_y(x, y, z)$ non è richiesta su tutto R , per una formulazione delle ipotesi che si fanno su queste funzioni si vedano gli enunciati dei Teoremi B e C.

Affermo quindi che l'integrale

$$\int_Q \int f[x(u, v), y(u, v), z(u, v)] \cdot H_3(u, v) du dv$$

è indipendente dalla rappresentazione « assolutamente continua » considerata per S .

Dopo di che sarà lecito indicare questo integrale con la notazione

$$\int_{(T, Q)} f(x, y, z) dx dy.$$

3. - DIMOSTRAZIONE DELLA MISURABILITÀ DELLA FUNZIONE
 $f[x(u, v), y(u, v), z(u, v)] \cdot H_3(u, v)$.

Sia $2\delta > 0$ la distanza fra l'insieme chiuso $[S]$ e l'insieme chiuso R^* , frontiera dell'insieme aperto R .

Sia $(R)_\delta$ l'insieme dei punti di R che hanno da R^* distanza $\leq \delta$ e sia R_δ l'insieme aperto $R - (R)_\delta$.

Ogni punto di questo insieme ha la proprietà che ogni sfera di centro in esso e raggio $< \delta$ appartiene ad R .

Sia $0 < h < \delta$; risulta perciò definita nell'insieme R_δ la funzione continua

$$f^{(h)}(x, y, z) = \frac{1}{(2h)^3} \int_{-h}^h d\xi \int_{-h}^h d\eta \int_{-h}^h f[x + \xi, y + \eta, z + \zeta] d\zeta$$

costituente la media integrale di $f(x, y, z)$.

Ed in virtù di note proprietà delle medie integrali per ogni punto di R che non si proietta su I_{xy} si ha intanto

$$\lim_{h \rightarrow 0} f^{(h)}(x, y, z) = f(x, y, z).$$

4. - Richiamo il risultato di L. CESARI ([3] pag. 357) espresso dal seguente

LEMMA 1. — Sia (T_3, Q) la trasformazione piana « assolutamente continua » considerata nel n. 2, sia B un insieme misurabile del piano xy tale che

$$\int_B \int \Psi(x, y; T_3, Q) dx dy = 0,$$

essendo $\Psi(x, y; T_3, Q)$ la funzione di molteplicità assoluta [3] della trasformazione (T_3, Q) . Sia $T_3^{(-1)}(B)$ l'insieme dei modelli dei punti di B secondo (T_3, Q) .

Allora esiste un insieme misurabile $D \subset Q$ contenente $T_3^{(-1)}(B)$ tale che

$$\int_D \int |H_3(u, v)| du dv = 0.$$

Da questo Lemma si deduce il seguente

LEMMA 2. — Nelle stesse ipotesi del Lemma 1, sia I un insieme di punti del piano xy , di misura nulla, e sia G l'insieme di punti del piano uv in cui è $H_3(u, v) \neq 0$.

Allora è nulla la misura dell'insieme $T_3^{(-1)}(I) \cdot G$.

Infatti in virtù delle ipotesi è

$$\int_I \int \Psi(x, y; T_3, Q) dx dy = 0$$

e perciò in virtù del Lemma 1 esiste un insieme W contenente $T_3^{(-1)}(I)$ sul quale è

$$\int_W \int |H_3(u, v)| du dv = 0.$$

E' quindi

$$\int_{W \cdot G} \int |H_3(u, v)| du dv = 0,$$

essendo $H_3(u, v) \neq 0$ in ogni punto di $W \cdot G$.

E' quindi nulla la misura dell'insieme $W \cdot G$ e perciò anche quella dell'insieme $T_3^{(-1)}(I) \cdot G$ in esso contenuto.

5. - Essendo I_{xy} l'insieme introdotto nel n. 2, sia $E_3(u, v)$ l'insieme $T_3^{(-1)}(I_{xy})$. Distinguo alcuni casi per il punto (u, v) .

Se (u, v) è un punto di Q non appartenente ad $E_3(u, v)$ si ha intanto in virtù del risultato sulle medie integrali, richiamato nel n. 3,

$$\lim_{h \rightarrow 0} f^{(h)}[x(u, v), y(u, v), z(u, v)] = f[x(u, v), y(u, v), z(u, v)],$$

e quindi in ogni punto di $Q - E_3(u, v)$ in cui $H_3(u, v)$ è definito, cioè a dire in quasi ogni punto di $Q - E_3(u, v)$, si ha

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} f^{(h)}[x(u, v), y(u, v), z(u, v)] \cdot H_3(u, v) = \\ = f[x(u, v), y(u, v), z(u, v)] \cdot H_3(u, v). \end{aligned}$$

Se $(u, v) \in E_3(u, v)$ ed è $H_3(u, v) = 0$ la uguaglianza sopra scritta sussiste ugualmente.

L'insieme dei punti $(u, v) \in E_3(u, v)$ per i quali è $H_3(u, v) \neq 0$ ha, in virtù del Lemma 2 del n. precedente, misura nulla; risulta così provato che la relazione

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} f^{(h)}[x(u, v), y(u, v), z(u, v)] \cdot H_3(u, v) = \\ = f[x(u, v), y(u, v), z(u, v)] \cdot H_3(u, v) \end{aligned}$$

sussiste quasi ovunque su Q .

La funzione $f[x(u, v), y(u, v), z(u, v)] \cdot H_3(u, v)$ risulta perciò misurabile su Q . Ma $f(x, y, z)$ è limitata su R , $H_3(u, v)$ è sommabile su Q in virtù della ipotesi che (T_3, Q) è « assolutamente continua », ne viene quindi che la funzione $f[x(u, v), y(u, v), z(u, v)] \cdot H_3(u, v)$ è sommabile su Q .

Esiste perciò finito l'integrale

$$\iint_Q f[x(u, v), y(u, v), z(u, v)] \cdot H_3(u, v) du dv.$$

6. - DIMOSTRAZIONE DELLA INDIPENDENZA DI $\iint_Q f[x(u, v), y(u, v), z(u, v)] \cdot H_3(u, v) du dv$ **DALLA RAPPRESENTAZIONE « ASSOLUTAMENTE CONTINUA ADOTTATA PER S .**

A questo scopo enuncio intanto la seguente proposizione che è contenuta in alcuni Teoremi stabiliti da L. CESARI in [4].

TEOREMA. — *Sia $S \equiv (T, Q)$ una superficie orientata di Freché, data come nel n. 1, di area secondo Lebesgue finita. Sia $g(x, y, z, u, v, w)$ una funzione continua delle variabili (x, y, z, u, v, w) per (x, y, z) appartenente ad R ed (u, v, w) qualunque, positivamente omogenea, nelle variabili u, v, w , di grado 1.*

Allora esiste l'integrale di Weierstrass-Cesari della funzione $g(x, y, z, u, v, w)$ su S , che gode, fra l'altro, della proprietà:

- a) è indipendente dalla rappresentazione (T, Q) adottata per S ,
- b) si riduce nella ipotesi che (T, Q) sia « assolutamente continua » all'integrale di Lebesgue ²⁾

$$\int_Q \int g[x(u, v), y(u, v), z(u, v), H_1(u, v), H_2(u, v), H_3(u, v)] du dv.$$

Nel caso particolare in cui $g(x, y, z, u, v, w)$ sia della forma $G(x, y, z) \cdot w$ questo integrale viene qui indicato con la notazione

$$\int_S \int G(x, y, z) dx dy$$

e si riduce, nelle stesse ipotesi di « assoluta continuità » di (T, Q) all'integrale di Lebesgue

$$\int_Q \int G[x(u, v), y(u, v), z(u, v)] \cdot H_3(u, v) du dv.$$

Sia allora

$$(T', Q) : x = x'(u, v), y = y'(u, v), z = z'(u, v), (u, v) \in Q,$$

un'altra rappresentazione « assolutamente continua » di S .

In virtù del teorema di L. CESARI ora enunciato e della continuità in R^{δ} delle funzioni $f^{(h)}(x, y, z)$; $0 < h < \delta$; si ha intanto ³⁾

$$\begin{aligned} & \int_Q \int f^{(h)}[x(u, v), y(u, v), z(u, v)] \cdot H_3(u, v) du dv = \\ & = \int_Q \int f^{(h)}[x'(u, v), y'(u, v), z'(u, v)] \cdot H_3'(u, v) du dv. \end{aligned}$$

²⁾ $H_1(u, v)$ e $H_2(u, v)$ hanno significato analogo a $H_3(u, v)$. Il teorema sussiste anche se $g(x, y, z, u, v, w)$ è soltanto continua e positivamente omogenea per $(x, y, z) \in [S]$ e (u, v, w) qualunque.

³⁾ $H_1'(u, v)$, $H_2'(u, v)$, $H_3'(u, v)$ sono definiti rispetto a (T', Q) così come $H_1(u, v)$, $H_2(u, v)$, $H_3(u, v)$ lo sono rispetto a (T, Q) .

Passando al limite, in virtù del Teorema di integrazione di Lebesgue, se ne deduce

$$\begin{aligned} & \int_Q \int f[x(u, v), y(u, v), z(u, v)] \cdot H_3(u, v) du dv = \\ & = \int_Q \int f[x'(u, v), y'(u, v), z'(u, v)] \cdot H_3'(u, v) du dv \end{aligned}$$

e questo prova la indipendenza di

$$\int_Q \int f[x(u, v), y(u, v), z(u, v)] \cdot H_3(u, v) du dv$$

dalla rappresentazione (T, Q) .

7. - ESTENSIONE DELLA NOZIONE DI INTEGRALE DI LINEA.

Sia γ una linea orientata di Frechét del tipo della circonferenza, di lunghezza finita L , e sia

$$(\mathcal{C}, Q^*): x = \xi(p), \quad y = \eta(p), \quad z = \zeta(p), \quad p \in Q^*,$$

una sua rappresentazione sulla frontiera Q^* del quadrato unitario Q del piano uv .

Sia $[\gamma]$ il sostegno di questa linea e sia R un insieme aperto contenente $[\gamma]$. Sia $f(x, y, z)$ una funzione definita in R , ivi misurabile limitata ed approssimativamente continua, salvo al più per i punti di un sotto-insieme di R che si proietta in un insieme I_∞ di misura nulla dell'asse x .

Fissiamo un punto $p_0 \in Q^*$ e, per ogni punto $p \in Q^*$, indichiamo con t la lunghezza dell'arco di Q^* avente origine in p_0 ed estremo in p .

Poniamo quindi

$$x(t) = \xi(p), \quad y(t) = \eta(p), \quad z(t) = \zeta(p).$$

Otteniamo così una trasformazione continua

$$(\mathcal{C}', I): x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t), \quad t \in (0, 4) \equiv I,$$

del tipo della 1-cella che diciamo associata a $(\mathcal{C}, Q^*)$ e a p_0 .

Sia γ' la linea orientata di Frechét del tipo della 1-cella individuata da $(\mathcal{C}', I)$; anche la lunghezza di γ' è uguale ad L .

Si può quindi considerare una rappresentazione « assolutamente continua » di γ' che per brevità supponiamo sia la stessa $(\mathcal{C}', I)$.

Consideriamo infine la funzione

$$f[x(t), y(t), z(t)] \cdot x'(t).$$

Dico che questa funzione è misurabile su $I \equiv (0, 4)$ e quindi, in virtù delle ipotesi fatte su γ e su $f(x, y, z)$ sommabile su questo stesso intervallo.

Dico anche che l'integrale

$$\int_0^4 f[x(t), y(t), z(t)] \cdot x'(t) dt$$

è indipendente da $(\mathcal{C}, Q^*)$, p_0 , $(\mathcal{C}', I)$, dipende cioè soltanto da γ e pertanto può essere indicato con la notazione

$$\int_{\gamma} f(x, y, z) \cdot dx.$$

8. - DIMOSTRAZIONE DELLA ESISTENZA DI $\int_0^4 f[x(t), y(t), z(t)] \cdot$

$x'(t) \cdot dt$ **E DELLA SUA INDIPENDENZA DA** $(\mathcal{C}, Q^*)$, p_0 **E** $(\mathcal{C}', I)$.

La misurabilità della funzione $f[x(t), y(t), z(t)] \cdot x'(t)$ in I si prova con gli stessi argomenti dei nn. 3, 4, 5.

Siano infatti δ e R_δ rispettivamente un numero reale > 0 ed un componente di R tali che la sfera avente centro in un punto di R_δ e raggio $< \delta$ appartenga ad R .

Sia

$$f^{(h)}(x, y, z) = \frac{1}{(2h)^3} \int_{-h}^h d\xi \int_{-h}^h d\eta \int_{-h}^h f(x + \xi, y + \eta, z + \zeta) d\zeta$$

la media integrale di $f(x, y, z)$.

La funzione $f^{(h)}(x, y, z)$; $0 < h < \delta$; è continua in R_δ e tale che per ogni punto di R_δ , che non si proietta su I_x si abbia

$$\lim_{h \rightarrow 0} f^{(h)}(x, y, z) = f(x, y, z).$$

Il nostro asserto si prova allora con lo stesso ragiona-

mento del n. 5 facendo uso, anzichè dei Lemmi 1, 2, dei seguenti.

LEMMA 3. — Sia $y = f(x)$ una funzione continua e a variazione limitata nell'intervallo (a, b) . Sia (c, d) un intervallo dell'asse y contenente l'immagine di (a, b) secondo $f(x)$, e sia, per ogni y di (c, d) , $n(y, f)$ il numero (finito od infinito) dei valori di x in (a, b) per i quali è $y = f(x)$.

Sia B un insieme di punti di (c, d) per il quale è

$$\int_B n(y, f) dy = 0$$

e sia $f^{(-1)}(B)$ l'insieme dei modelli dei punti di B secondo $f(x)$.

Allora esiste un insieme misurabile D contenente $f^{(-1)}(B)$ per il quale è

$$\int_D |y'(x)| dx = 0.$$

LEMMA 4. — Nelle stesse ipotesi del Lemma 3 sia I un insieme di punti di (c, d) di misura nulla e sia G l'insieme dei punti di (a, b) in cui è $f'(x) \neq 0$. Allora è nulla la misura dell'insieme $f^{(-1)}(I) \cdot G$.

Il Lemma 3 è noto, il Lemma 4 si deduce da questo con il ragionamento del n. 4.

Venendo infine alla indipendenza di

$$\int_0^4 f[x(t), y(t), z(t)] x'(t) dt$$

osserviamo che essa segue come nel n. 6 dal seguente

TEOREMA (L. TONELLI [8], [9]). — Sia γ una linea orientata di Frechét ⁴⁾ di lunghezza finita del tipo della circonferenza. Sia $g(x, y, z)$ una funzione continua in un insieme aperto R contenente il sostegno $[\gamma]$ di γ .

⁴⁾ La nozione di equivalenza considerata da L. TONELLI in [9] coincide con quella di Frechét.

Allora esiste l'integrale di linea $\int_{\gamma} f(x, y, z) \cdot dx$ che gode fra l'altro delle seguenti proprietà:

- a) è indipendente dalla rappresentazione di γ ,
- b) se $(\mathcal{T}, Q^*)$ è una rappresentazione di γ , se p_0 è un qualunque punto di Q^* , se $(\mathcal{T}', I)$ è una trasformazione del tipo della 1-cella associata a $(\mathcal{T}, Q^*)$ e a p_0 come nel n. precedente e se

$$(\mathcal{T}', I): x = \bar{x}(t), \quad y = \bar{y}(t), \quad z = \bar{z}(t), \quad t \in I$$

è una trasformazione « assolutamente continua » equivalente secondo Frechét a $(\mathcal{T}', I)$ allora

$$\int_{\gamma} f(x, y, z) dx = \int_0^1 f[\bar{x}(t), \bar{y}(t), \bar{z}(t)] \cdot \bar{x}'(t) dt.$$

9. - UNA ESTENSIONE DEL TEOREMA A.

Sono ormai in grado di dimostrare il seguente

TEOREMA B. — Sia S una superficie orientata di Frechét, del tipo della 2-cella, soddisfacente le ipotesi a) e b) del Teorema A.

Sia $f(x, y, z)$ una funzione definita in R e dotata ivi delle seguenti proprietà:

- c, 1) $f(x, y, z)$ è misurabile in R , limitata, approssimativamente continua salvo al più per i punti di R che si proiettano su di un insieme I_x , dell'asse x , di misura nulla;
- c, 2) $f(x, y, z)$ è assolutamente continua in y per quasi ogni xz , dotata perciò quasi ovunque, in R di derivata parziale $f_y(x, y, z)$ che risulta inoltre misurabile in R , limitata in R , approssimativamente continua salvo al più per i punti di R che si proiettano su di un insieme I_{xy} di misura nulla del piano xy ;
- c, 3) $f(x, y, z)$ è assolutamente continua in z per quasi ogni xy , dotata perciò quasi ovunque in R di derivata parziale $f_z(x, y, z)$ che risulta inoltre misurabile in R , limitata in R , approssimativamente con-

tinua salvo al più per i punti di R che si proiettano su di un insieme $I_{\alpha\alpha}$ di misura nulla del piano $\alpha\alpha$.

Allora sussiste la (1) del Teorema A in cui gli integrali dei due membri hanno i significati introdotti nei nn. 2, 7.

10. - DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA B.

Siano δ ed R_δ un numero reale > 0 ed un componente aperto di R_δ tali che la sfera avente centro in ogni punto di R_δ e raggio $< \delta$ appartenga ad R e tali inoltre che $[S]$ appartenga ad R_δ .

Consideriamo per ogni punto di R e per ogni $0 < h < \delta$ le funzioni

$$f^{(h)}(x, y, z) = \frac{1}{(2h)^3} \int_{-h}^h d\xi \int_{-h}^h d\eta \int_{-h}^h f(x + \xi, y + \eta, z + \zeta) d\zeta,$$

$$\varphi^{(h)}(x, y, z) = \frac{1}{(2h)^3} \int_{-h}^h d\xi \int_{-h}^h d\zeta \int_{-h}^h f_y(x + \xi, y + \eta, z + \zeta) d\eta,$$

$$\psi^{(h)}(x, y, z) = \frac{1}{(2h)^3} \int_{-h}^h d\xi \int_{-h}^h d\eta \int_{-h}^h f_z(x + \xi, y + \eta, z + \zeta) d\zeta,$$

costituenti le medie integrali delle funzioni $f(x, y, z)$, $f_y(x, y, z)$, $f_z(x, y, z)$. Ciascuna di queste funzioni è continua su R_δ .

Voglio intanto osservare che se $0 < h < \delta/2$ la $f^{(h)}(x, y, z)$ è derivabile parzialmente rispetto ad y in ogni punto di R_δ e che si ha, in ognuno di questi punti

$$\frac{\partial}{\partial y} f^{(h)}(x, y, z) = \varphi^{(h)}(x, y, z).$$

Da ciò risulta in particolare che la $\frac{\partial}{\partial y} f^{(h)}(x, y, z)$ è continua su R_δ . Risultato analogo sussiste per la $\frac{\partial}{\partial z} f^{(h)}(x, y, z)$.

Sia (x_0, y_0, z_0) un punto di R_δ , sia $0 < h < \delta/2$, allora per ogni (x, y, z) appartenente al cubo $c(x_0, y_0, z_0)$ di centro (x_0, y_0, z_0) , di lati paralleli agli assi e di semilato $\delta/2$ è defi-

nita la funzione

$$\begin{aligned}
 \Phi^{(h)}(x, y, z) &= \int_{y_0-\delta/2}^y \varphi^{(h)}(x, \eta, z) d\eta = \int_{y_0-\delta/2}^y d\eta \frac{1}{(2h)^3} \int_{x-h}^{x+h} \int_{z-h}^{z+h} \int_{\eta-h}^{\eta+h} f(\xi, \tau, \zeta) d\tau = \\
 &= \frac{1}{(2h)^3} \int_{y_0-\delta/2}^y d\eta \int_{x-h}^{x+h} \int_{z-h}^{z+h} \{f(\xi, \eta+h, \zeta) - f(\xi, \eta-h, \zeta)\} d\zeta = \\
 &= \frac{1}{(2h)^3} \int_{x-h}^{x+h} \int_{z-h}^{z+h} \int_{y_0-\delta/2+h}^{y+h} f(\xi, \eta, \zeta) d\eta - \frac{1}{(2h)^3} \int_{x-h}^{x+h} \int_{z-h}^{z+h} \int_{y_0-\delta/2-h}^{y-h} f(\xi, \eta, \zeta) d\eta = \\
 &= \frac{1}{(2h)^3} \int_{x-h}^{x+h} \int_{z-h}^{z+h} \int_{y-h}^{y+h} f(\xi, \eta, \zeta) d\eta - \int_{y_0-\delta/2-h}^{y_0-\delta/2+h} f(\xi, \eta, \zeta) d\eta \Big\} = \\
 &= f^{(h)}(x, y, z) - f^{(h)}(x, y_0 - \delta/2, z).
 \end{aligned}$$

Ma la funzione $\Phi^{(h)}(x, y, z)$ è derivabile rispetto ad y nel punto (x_0, y_0, z_0) [in virtù della continuità in quello stesso punto della funzione $\varphi^{(h)}(x, y, z)$] con derivata uguale a $\varphi^{(h)}(x_0, y_0, z_0)$, ne viene quindi che anche $f^{(h)}(x, y, z)$ è derivabile rispetto ad y in (x_0, y_0, z_0) e che si ha

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial y} f^{(h)}(x, y, z) \right\}_{(x_0, y_0, z_0)} = \varphi^{(h)}(x_0, y_0, z_0).$$

11.- In virtù del Teorema A e della continuità in R_δ delle funzioni $f^{(h)}(x, y, z)$, $\frac{\partial}{\partial y} f^{(h)}(x, y, z)$, $\frac{\partial}{\partial z} f^{(h)}(x, y, z)$; se $0 < h < \delta/2$; si ha, per siffatti h ,

$$\begin{aligned}
 \iint_S \frac{\partial}{\partial z} f^{(h)}(x, y, z) dz dx - \iint_S \frac{\partial}{\partial y} f^{(h)}(x, y, z) dx dy &= \\
 &= \int_{\theta(S)} f^{(h)}(x, y, z) dx,
 \end{aligned}$$

e quindi anche

$$\iint_S \psi^{(h)}(x, y, z) dz dx - \iint_S \varphi^{(h)}(x, y, z) dz dx = \int_{\theta(S)} f^{(h)}(x, y, z) dx.$$

In virtù delle ipotesi fatte su $f(x, y, z)$, $f_x(x, y, z)$, $f_y(x, y, z)$ e delle definizioni di integrale date nei nn. 2, 7, si ha quindi:

$$\int_S \int f_z(x, y, z) dz d\mathbf{x} - \int_S \int f_y(x, y, z) dx dy = \int_{\partial(S)} f(x, y, z) dx,$$

ciò che prova il Teorema B.

12. - UN CASO PARTICOLARE DEL TEOREMA B.

TEOREMA C. — *Sia S una superficie orientata di Frechèt del tipo della 2-cella soddisfacente alle ipotesi a) e b) del Teorema A.*

Sia $f(x, y, z)$ una funzione che gode delle seguenti proprietà:

- c, 1') è continua come funzione di x per quasi ogni (y, z) , e limitata in R ,*
- c, 2') è assolutamente continua in y per quasi ogni (x, z) ,*
- c, 3') è assolutamente continua in z per quasi ogni (x, y) ,*
- c, 4') la sua derivata parziale $f_y(x, y, z)$, che in virtù di c, 2') esiste su quasi tutto R , risulta inoltre continua come funzione di z per quasi ogni (x, y) , oltrechè limitata e misurabile in R ,*
- c, 5') la sua derivata parziale $f_z(x, y, z)$, che in virtù di c, 3') esiste su quasi tutto R , risulta inoltre continua come funzione di y per quasi ogni (x, z) , oltrechè limitata e misurabile in R .*

Allora sussiste la (1) del Teorema A.

Questo Teorema si deduce dal precedente Teorema B non appena si osservi che ciascuna delle funzioni $f(x, y, z)$, $f_y(x, y, z)$, $f_z(x, y, z)$ gode delle proprietà espresse nell'enunciato del Teorema B.

Verifichiamo come ciò accada per la funzione $f_y(x, y, z)$, lo stesso ragionamento serve per la funzione $f_z(x, y, z)$, ed analogo ragionamento serve per la funzione $f(x, y, z)$.

In virtù di un Teorema di G. SCORZA DRAGONI [6] ed in forza della ipotesi c, 4') si può determinare in corrispondenza di ogni intero $n > 0$ un insieme aperto Δ_n del piano xy , di

misura $< 1/n$, tale che $f_{\mathbf{y}}(x, y, z)$ sia uniformemente continua nell'insieme costituito dai punti di R che non si proiettano su Δ_n .

Sia R_{xy} l'insieme aperto proiezione di R sul piano xy , sia F_n l'insieme misurabile definito mediante la

$$F_n = R_{xy} - \Delta_n$$

e sia F_n^* l'insieme dei punti di densità 1 di F_n .

Consideriamo infine l'insieme

$$F^* = \sum_{n=1}^{\infty} F_n^*.$$

L'insieme dei punti di R_{xy} che non appartengono ad F^* ha misura nulla.

Sia (x_0, y_0, z_0) un punto di R per il quale (x_0, y_0) appartiene ad F^* .

Dico che $f_{\mathbf{y}}(x, y, z)$ è approssimativamente continua in (x_0, y_0, z_0) .

Sia infatti k un intero tale che $(x_0, y_0) \in F_k^*$.

Fissato $\varepsilon > 0$ ad arbitrio consideriamo l'insieme costituito dai punti (x, y, z) di R in cui è soddisfatta la disuguaglianza

$$|f_{\mathbf{y}}(x, y, z) - f_{\mathbf{y}}(x_0, y_0, z_0)| < \varepsilon.$$

Tale insieme, in virtù del citato risultato di G. SCORZA DRAGONI, contiene tutti i punti di R che si proiettano su F_k^* e che inoltre appartengono ad un cubo con i lati paralleli agli assi x, y, z , con centro in (x_0, y_0, z_0) e lato sufficientemente piccolo.

Tale insieme ha perciò densità 1 in (x_0, y_0, z_0) in quanto R è aperto ed in quanto (x_0, y_0) è di densità 1 per l'insieme F_k^* .

Perciò $f_{\mathbf{y}}(x, y, z)$ è approssimativamente continua in (x_0, y_0, z_0) e quindi in tutti i punti di R che si proiettano su F^* .

E con ciò il Teorema C è provato.

BIBLIOGRAFIA

- [1] E. BAJADA: *Sulle funzioni continue separatamente rispetto alle variabili e gli integrali curvilinei*. « Rend. Sem. Mat. Padova », 17, 201-208, 1948.

- [2] J. CECCONI: *Sul Teorema di Stokes*. In corso di stampa presso la Rivista di Mat. Univ. Parma.
- [3] L. CESARI: *Sulla trasformazione degli integrali doppi*. «Ann. Mat. Pura ed Appl.», 27, 321-374, 1948.
- [4] L. CESARI: *La nozione di integrale sopra una superficie in forma parametrica*. «Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa», II, 13, 77-117, 1944.
- [5] C. B. MORREY: *A class of representation of manifolds*. Part. II. «Amer. Journ. of Math.», 56, 275-293, 1934.
- [6] G. SCORZA DRAGONI: *Un teorema sulle funzioni continue rispetto ad una e misurabili rispetto ad un'altra variabile*. «Rend. Sem. Mat. Padova», 17, 102-106; 1948.
- [7] G. STAMPACCHIA: *Sopra una classe di funzioni in 2 variabili. Applicazioni agli integrali doppi del calcolo delle variazioni*. «Giornale di Mat. di Battaglini», 79, 169-208, 1950.
- [8] L. TONELLI: *Sugli integrali curvilinei del calcolo delle variazioni*. «Rend. Accad. Lincei», V, 21, 448-453, 1912.
- [9] L. TONELLI: *Fondamenti di calcolo delle variazioni*, 2 voll. Zanichelli, Bologna, 1921.