

RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

GIUSEPPE AYMERICH

**Sulle onde elettromagnetiche guidate da una superficie
cilindrica perfettamente conduttrice anisotropa**

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 22 (1953), p. 157-176

http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1953__22__157_0

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1953, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SULLE ONDE ELETTROMAGNETICHE GUIDATE DA UNA SUPERFICIE CILINDRICA PERFETTAMENTE CONDUTTRICE ANISOTROPA

Nota (*) di GIUSEPPE AYMERICH (a Cagliari)

1. - In questi ultimi anni diverse ricerche sono state rivolte, soprattutto negli Stati Uniti, allo studio delle onde elettromagnetiche sostenute da alcuni tipi di strutture conduttrici elicoidali immerse in un dielettrico omogeneo. Nella sua Tesi di dottorato, che abbiamo potuto leggere per cortesia del professor DARIO GRAFFI, S. SENSIPER¹⁾, dopo aver dato un'ampia rassegna dei lavori teorici e sperimentali apparsi recentemente sull'argomento, ha esteso e precisato alcune proprietà note ed ha ottenuto alcuni risultati originali.

Una delle più semplici tra queste strutture è la guida cilindrica circolare a *guscio elicoidale* (« sheath helix ») che può definirsi nel modo seguente. In un dielettrico omogeneo isoliamo mentalmente una superficie cilindrica indefinita, a sezione circolare, di dato raggio. Consideriamo un filo metallico infinitamente lungo, di sezione circolare, avvolto a forma di elica, di determinato passo, sulla superficie cilindrica fissata; consideriamo poi un secondo filo, del tutto simile al prece-

(*) Pervenuta in Redazione il 31 marzo 1953.

¹⁾ S. SENSIPER: *Electromagnetic wave propagation on helical conductors*, « Massachusetts Institute of Technology », Cambridge (U.S.A.), 1951. Vedi anche

E. ROUBINE: *Études des ondes électromagnétique guidées par les circuits en hélice*, « Annales des Telecommunications », Tome 7, N. 5, Mai 1952, pp. 206-16, N. 6 June, 1952, pp. 262-75, N. 7-8 Juillet-Aout 1952, pp. 310-324, dove è riportata un'ampia bibliografia sull'argomento.

dente, ma spostato rispetto ad esso di un piccolo tratto nella direzione dell'asse del cilindro; poi un terzo filo e così via fino a riempire tutto l'intervallo rappresentato dal passo dell'elica. Mantenendo fisso il passo facciamo adesso tendere a zero il raggio dei fili ed aumentiamo nello stesso tempo indefinitamente il loro numero. Al limite si ottiene una superficie *anisotropa*, che in ogni suo punto conduce l'elettricità in un'unica direzione, quella della tangente all'elica che passa per quel punto: è questo il *guscio elicoidale* (indefinito) o guida elettromagnetica cilindrica, a sezione circolare, anisotropa. Come casi particolari o degeneri possono aversi il *guscio ad anelli*, quando l'angolo d'inclinazione dell'elica è 0, ed il *guscio a tubi*, quando l'angolo d'inclinazione è di 90° , ossia quando i fili coincidono con le generatrici del cilindro.

Tra le proprietà delle onde elettromagnetiche sostenute da una tale struttura interessa ricordare, ai fini di questo lavoro, le seguenti.

Supposto il materiale che costituisce gli avvolgimenti perfettamente conduttore, in generale un'onda elettromagnetica che abbia origine nell'interno della guida si propaga anche all'esterno; escluso il caso del guscio a tubi, le onde che dipendono dal tempo con legge sinusoidale non possono essere, *per una frequenza generica* di tipo trasverso elettrico (TE) nè di tipo trasverso magnetico (TM), come avviene per le ordinarie guide isotrope, ma sono costituite da una combinazione di un'onda TE e di un'onda TM; le onde sostenute dal guscio a tubi possono essere invece TEM.

Non ci risulta che oltre a quella a sezione circolare siano state considerate altre guide anisotrope: è chiaro però come sia possibile concepire e realizzare guide anisotrope la cui sezione sia una qualsiasi linea chiusa; basterebbe, ad es., pensare la superficie della guida a sezione circolare perfettamente flessibile ed applicata ad una superficie cilindrica la cui sezione abbia la forma desiderata.

In questo lavoro mostriamo che le proprietà ora accennate della guida a sezione circolare valgono, in generale, qualunque sia la forma della sezione (semplicemente connessa): abbiamo però riconosciuto che per il guscio elicoidale esistono valori

particolari della frequenza, appartenenti ad un insieme discreto, cui possono corrispondere, per forme speciali della guida, onde di tipo TE propagantesi soltanto all'interno o soltanto all'esterno del guscio. Per il guscio ad anelli ciò può verificarsi per qualsiasi frequenza, purchè superiore ad un determinato valore. Questa circostanza si presenta in particolare per la guida a sezione circolare, il che, per quanto ci risulta, non è stato rilevato precedentemente. Inoltre per il guscio a tubi abbiamo riconosciuto la possibilità di onde TM, oltre a quelle TEM, già messe in evidenza, per la sezione circolare, da altri Autori.

§ 1. - Condizioni al contorno per una guida anisotropa.

2. - Si abbia un dielettrico omogeneo, isotropo, illimitato, non dissipativo; in esso sia posta una guida cilindrica anisotropa del tipo sopra definito, la cui sezione normale sia una linea chiusa regolare, semplicemente connessa. Gli avvolgimenti che costituiscono il guscio siano costituiti da materiale perfettamente conduttore e siano ϵ e μ la costante dielettrica e la permeabilità magnetica del mezzo (aventi i medesimi valori all'interno ed all'esterno della guida).

Consideriamo un'onda elettromagnetica, armonica e propagantesi nella direzione delle generatrici del cilindro, in un determinato verso. Fissata una terna cartesiana di riferimento $Oxyz$ con l'asse z parallelo alle generatrici del cilindro ed orientato nel verso di propagazione dell'onda, il campo elettrico $\mathbf{E}$ e quello magnetico $\mathbf{H}$, espressi in forma complessa, saranno del tipo

$$(1) \quad \mathbf{E} = \bar{\mathcal{E}}(x, y)e^{j(\omega t - hz)}, \quad \mathbf{H} = \bar{\mathcal{H}}(x, y)e^{j(\omega t - hz)}$$

dove j è l'unità immaginaria, $\bar{\mathcal{E}}(x, y)$ e $\bar{\mathcal{H}}(x, y)$ sono due vettori indipendenti dalla coordinata z e del tempo t , ω è data dal prodotto della frequenza per 2π e h è il fattore (costante) di propagazione (positivo).

In un qualsiasi punto, che non appartenga alla superficie della guida, il campo elettrico e quello magnetico debbono soddisfare alle equazioni di MAXWELL, che nel caso attuale for-

niscono:

$$(2)_1 \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \mathcal{E}_z}{\partial y} + jh\mathcal{E}_y = -j\omega\mu\mathcal{H}_x, \\ \frac{\partial \mathcal{E}_z}{\partial y} + jh\mathcal{E}_x = j\omega\mu\mathcal{H}_y \\ \frac{\partial \mathcal{E}_y}{\partial x} - \frac{\partial \mathcal{E}_x}{\partial y} = -j\omega\mu\mathcal{H}_z \end{array} \right. \quad (2)_2 \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \mathcal{H}_z}{\partial y} + jh\mathcal{H}_y = j\omega\varepsilon\mathcal{E}_x \\ \frac{\partial \mathcal{H}_z}{\partial x} + jh\mathcal{H}_x = -j\omega\varepsilon\mathcal{E}_y \\ \frac{\partial \mathcal{H}_y}{\partial x} - \frac{\partial \mathcal{H}_x}{\partial y} = j\omega\varepsilon\mathcal{E}_z \end{array} \right.$$

cui vanno associate le

$$(3) \quad \frac{\partial \mathcal{E}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{E}_y}{\partial y} = jk\mathcal{E}_z, \quad \frac{\partial \mathcal{H}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{H}_y}{\partial y} = jh\mathcal{H}_z$$

esprimenti l'annullarsi delle divergenze di $\mathbf{E}$ e di $\mathbf{H}$. Il problema è così ridotto allo studio dei vettori $\mathcal{E}$ ed $\mathcal{H}$ in un generico piano normale all'asse z .

Poichè supponiamo lo spazio privo di sorgenti al finito, le soluzioni delle (2) e (3) debbono essere regolari in ogni punto non appartenente alla superficie della guida. Circa il comportamento all'infinito supponiamo che il campo a grande distanza dal guscio si comporti *come un'onda (piana) propagantesi radialmente verso l'esterno*. Per questo basta supporre che le componenti del campo elettrico e del campo magnetico abbiano un comportamento asintotico analogo a quello delle funzioni di HANKEL di prima specie²⁾, come avviene per il guscio a sezione circolare.

Consideriamo adesso le condizioni al contorno imposte dalla presenza della guida. Una caratteristica fondamentale delle onde elettromagnetiche sostenute da una guida anisotropa è che anche quando il materiale che costituisce gli avvolgimenti è supposto perfettamente conduttore, attraverso la parete, contrariamente a quanto avviene per le guide isotrope ordinarie, si ha in generale un flusso di energia, cosicchè non può aversi un'onda all'interno che non sia accompagnata da un'onda all'esterno della guida. Ora da note proprietà del campo elettromagnetico si trae facilmente che:

²⁾ V. a questo proposito, ad es. RIEMANN-WEBERS: *Differentialgleichungen der Physik*, II Bd., Vieweg, Braunschweig, 1927, p. 465.

- 1) la componente del campo elettrico sul piano tangente alla superficie è continua attraverso la superficie;
- 2) avendo supposto perfettamente conduttore il materiale che costituisce gli avvolgimenti, la componente del campo elettrico nella direzione della tangente al « filo » è nulla;
- 3) la componente del campo magnetico nella direzione della tangente al « filo » è continua attraverso la superficie.

Per tradurre in formule queste condizioni, consideriamo il piano π tangente alla superficie σ della guida in un suo generico punto P ed immaginiamo la superficie stessa sviluppata su tale piano. Le rette tangenti agli avvolgimenti vengono proiettate sul piano π in rette parallele: diciamo ξ una qualsiasi di queste, η la sua perpendicolare nel piano π ed orientiamo ξ ed η in modo che gli angoli che esse formano con l'asse z siano acuti. Detta poi n la normale in P alla superficie σ (ossia al piano π) orientata verso l'esterno, e considerato un qualsiasi campo vettoriale $\mathbf{u}$, denotiamo con u_n , $u_{\parallel}$, e $u_{\perp}$ le componenti di $\mathbf{u}$, valutato nel punto P , secondo le direzioni n , ξ , η nell'ordine.

Indicando allora con $\mathbf{E}^i$, $\mathbf{H}^i$ rispettivamente il campo elettrico e il campo magnetico nei punti interni alla guida e con $\mathbf{E}^e$ e $\mathbf{H}^e$ i campi nei punti esterni, le precedenti condizioni 1), 2), e 3) si traducono nelle relazioni

$$(I) \quad E_{\parallel}^i = E_{\parallel}^e = 0$$

$$(II) \quad E_{\perp}^i = E_{\perp}^e$$

$$(III) \quad H_{\parallel}^i = H_{\parallel}^e,$$

che debbono essere verificate in ogni punto P della superficie σ .

Conviene esprimere queste condizioni sotto altra forma più adatta ai nostri scopi e facendo intervenire i vettori $\vec{\mathcal{G}}$ e $\vec{\mathcal{H}}$ introdotti attraverso le (1). Diciamo perciò C la sezione normale della superficie cilindrica σ passante per il punto P ed orientiamo la tangente t in P alla linea C (la retta t giace nel piano π) in modo che la coppia (n, t) risulti congruente con la coppia (x, y) . Considerato l'angolo acuto ψ formato dalle rette

ξ e t (angolo di inclinazione degli avvolgimenti) ed indicata con u_t la componente secondo la retta t del generico vettore $\mathbf{u}$, si ha subito

$$u_{\parallel} = u_z \sin \psi + u_t \cos \psi,$$

$$u_{\perp} = u_z \cos \psi - u_t \sin \psi.$$

Pertanto dalle (I), (II) e (III) segue che sul contorno C della generica sezione normale della guida debbono essere soddisfatte le seguenti relazioni:

$$(4) \quad \mathcal{E}_z^i \sin \psi + \mathcal{E}_t^i \cos \psi = 0,$$

$$(5) \quad \mathcal{E}_z^e \sin \psi + \mathcal{E}_t^e \cos \psi = 0,$$

$$(6) \quad \mathcal{E}_z^i \cos \psi - \mathcal{E}_t^i \sin \psi = \mathcal{E}_z^e \cos \psi - \mathcal{E}_t^e \sin \psi,$$

$$(7) \quad \mathcal{H}_z^i \sin \psi + \mathcal{H}_t^i \cos \psi = \mathcal{H}_z^e \sin \psi + \mathcal{H}_t^e \cos \psi.$$

3. - Com'è noto le componenti secondo gli assi x ed y dei campi elettrico e magnetico, nella ipotesi che essi siano della forma (1) si possono esprimere mediante le derivate di $\mathcal{E}_z$ ed $\mathcal{H}_z$. Posto per brevità

$$k^2 = \omega^2 \varepsilon \mu = \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^2$$

e considerato il parametro

$$(8) \quad \alpha^2 = k^2 - h^2,$$

dalle prime due delle (2₁) e delle (2₂) si ricava

$$(9) \quad \alpha^2 \mathcal{E}_x = -j \left[h \frac{\partial \mathcal{E}_z}{\partial x} + \omega \mu \frac{\partial \mathcal{H}_z}{\partial y} \right],$$

$$\alpha^2 \mathcal{E}_y = -j \left[h \frac{\partial \mathcal{E}_z}{\partial y} - \omega \mu \frac{\partial \mathcal{H}_z}{\partial x} \right],$$

$$(10) \quad \alpha^2 \mathcal{H}_x = -j \left[h \frac{\partial \mathcal{H}_z}{\partial x} - \omega \varepsilon \frac{\partial \mathcal{E}_z}{\partial y} \right],$$

$$\alpha^2 \mathcal{H}_y = -j \left[h \frac{\partial \mathcal{H}_z}{\partial y} + \omega \varepsilon \frac{\partial \mathcal{E}_z}{\partial x} \right].$$

Sostituendo queste espressioni nelle rimanenti equazioni (2)

e nelle (3) si riconosce che queste risultano soddisfatte se

$$(11) \quad \Delta \mathcal{G}_z + \alpha^2 \mathcal{G}_z = 0, \quad \left(\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)$$

$$(12) \quad \Delta \mathcal{H}_z + \alpha^2 \mathcal{H}_z = 0.$$

Per ottenere le condizioni cui debbono soddisfare $\mathcal{G}_z$ ed $\mathcal{H}_z$ nella linea C , consideriamo le equazioni parametriche di C

$$x = x(s) \quad , \quad y = y(s)$$

dove s è l'ascissa curvilinea misurata in verso concorde a quello della tangente t , e teniamo presente che

$$u_t = u_x x' + u_y y',$$

$$u_n = u_x y' - u_y x'.$$

Indicando con $\frac{\partial f}{\partial s}$ e $\frac{\partial f}{\partial n}$ le derivate di una funzione $f(x, y)$ secondo la tangente e la normale alla linea C , per le (10) e (11) si ha

$$(13) \quad \alpha^2 \mathcal{G}_t = -j \left[h \frac{\partial \mathcal{G}_z}{\partial s} - \omega \mu \frac{\partial \mathcal{H}_z}{\partial n} \right],$$

$$(14) \quad \alpha^2 \mathcal{H}_t = -j \left[h \frac{\partial \mathcal{H}_z}{\partial s} + \omega \varepsilon \frac{\partial \mathcal{G}_z}{\partial n} \right].$$

Sostituendo nelle (4)...(7) si ottiene

$$(15) \quad \alpha^2 \mathcal{G}_z^t \sin \psi - j \left(h \frac{\partial \mathcal{G}_z^t}{\partial s} - \omega \mu \frac{\partial \mathcal{H}_z^t}{\partial n} \right) \cos \psi = 0,$$

$$(16) \quad \alpha^2 \mathcal{G}_z^e \sin \psi - j \left(h \frac{\partial \mathcal{G}_z^e}{\partial s} - \omega \mu \frac{\partial \mathcal{H}_z^e}{\partial n} \right) \cos \psi = 0,$$

$$(17) \quad \alpha^2 \mathcal{G}_z^t \cos \psi + j \left(h \frac{\partial \mathcal{G}_z^t}{\partial s} - \omega \mu \frac{\partial \mathcal{H}_z^t}{\partial n} \right) \sin \psi = \\ = \alpha^2 \mathcal{G}_z^e \cos \psi + j \left(h \frac{\partial \mathcal{G}_z^e}{\partial s} - \omega \mu \frac{\partial \mathcal{H}_z^e}{\partial n} \right) \sin \psi,$$

$$(18) \quad \alpha^2 \mathcal{H}_z^t \sin \psi - j \left(h \frac{\partial \mathcal{H}_z^t}{\partial s} + \omega \varepsilon \frac{\partial \mathcal{G}_z^t}{\partial n} \right) \cos \psi = \\ = \alpha^2 \mathcal{H}_z^e \sin \psi - j \left(h \frac{\partial \mathcal{H}_z^e}{\partial s} + \omega \varepsilon \frac{\partial \mathcal{G}_z^e}{\partial n} \right) \cos \psi.$$

Il problema è quindi ricondotto a ricercare una soluzione dell'equazione (11) ed una della (12) regolari all'interno ed all'esterno della linea C , soddisfacenti all'infinito le condizioni (di radiazione) precisate a pag. 4, e tali che sulla linea C verifichino le condizioni (15)...(18).

Tenendo presente quanto avviene nel caso della sezione circolare, è facile intuire che, supposto assegnato il valore del parametro $k = \omega\sqrt{\varepsilon\mu}$, esistono soluzioni non identicamente nulle di questo problema se si attribuiscono al parametro h (e quindi ad α) dei valori particolari (*autovalori*). In questo lavoro non intendiamo però occuparci del problema di esistenza della soluzione, ma soltanto indicarne alcuni caratteri.

A questo scopo consideriamo dapprima il caso in cui l'angolo ψ sia compreso tra zero e 90° (*guscio elicoidale propriamente detto*); esamineremo poi i casi particolari $\psi = 0$ (*guscio ad anelli*) e $\psi = 90^\circ$ (*guscio a tubi*).

§ 2. - Guscio elicoidale propriamente detto: $0 < \psi < 90^\circ$.

4. - Per chiarezza ricordiamo che un campo elettromagnetico della forma (1) si dice *trasverso-elettrico* e si indica col simbolo « TE » quando è nulla la componente secondo l'asse z (direzione di propagazione dell'onda) del campo elettrico

$$E_z = 0 ;$$

si dice *trasverso-magnetico* e si indica con « TM » quando è nulla la componente secondo l'asse z del campo magnetico

$$H_z = 0 ;$$

infine si dice di tipo *trasverso-elettromagnetico* e si indica con « TEM » se sono nulle simultaneamente le componenti secondo l'asse z del campo elettrico e del campo magnetico

$$E_z = 0 \quad , \quad H_z = 0 .$$

In questo lavoro ci proponiamo principalmente di studiare se un guscio elicoidale può sostenere onde TE o TM o TEM. A questo scopo osserviamo innanzitutto che, nel caso attuale ($0 < \psi < 90^\circ$), qualunque sia la natura del campo, per le (4),

(5) e (6) sulla linea C si ha

$$(19) \quad \mathcal{E}_z^i = \mathcal{E}_z^e, \quad (20) \quad \mathcal{E}_t^i = \mathcal{E}_t^e$$

$$(21) \quad \mathcal{E}_t^{i,e} = -\mathcal{E}_z^{i,e} \cotg \psi.$$

Ora se è

$$\mathcal{E}_z^e = 0,$$

la (19) fornisce

$$(22) \quad \mathcal{E}_z^i = 0,$$

e tenendo conto di questa e ricordando la (13) dalle (21) e (22) si trae

$$(23) \quad \frac{\partial \mathcal{H}_z^i}{\partial n} = 0.$$

Le (22) e (23) sono le ben note condizioni al contorno delle guide isotrope ordinarie³⁾, onde può dirsi che *se la componente longitudinale (secondo le generatrici del guscio) del campo elettrico esterno è nulla alla superficie, i campi elettrico e magnetico interni devono soddisfare le condizioni al contorno della guida isotropa*: a queste deve aggiungersi, naturalmente, la condizione (7), relativa al campo magnetico.

Analogamente si conclude per i campi esterni se si suppone nulla alla superficie $\mathcal{E}_z^i$.

Secondariamente notiamo che se il campo all'interno o all'esterno è TE o TM non può essere $\alpha = 0$. Per quanto precede ciò segue subito da una nota proprietà delle guide isotrope⁴⁾ se si suppone il campo TE (all'interno o all'esterno). Se poi si suppone $\mathcal{H}_z^e \equiv 0$ (TM all'esterno) dalle (9) per $\alpha = 0$ si trae $\mathcal{E}_z^e$ costante e quindi nulla, per la condizione d'annullamento all'infinito; si ricade perciò nel caso precedente. Infine il caso $\mathcal{H}_z^i \equiv 0$ (TM all'interno) si riconduce pure al precedente, osservando che, sempre per le (9), risulta $\mathcal{E}_z^i$ costante, cosicchè per la (19) $\mathcal{E}_z^e$ è costante sulla linea C : d'altra parte la $\mathcal{E}_z^e$ è ades-

³⁾ V. D. GRAFFI: *Le guide d'onda*. « Rendiconti del Seminario Matematico e fisico di Milano », v. XXI (1950).

⁴⁾ V. D. GRAFFI: *Sulla propagazione delle onde elettromagnetiche entro tubi conduttori*. « Memorie dell'Acc. delle Scienze dell'Istituto di Bologna », Classe di Scienze fisiche, Serie X, t. II. 1944-45, § 3.

so armonica, onde, dovendosi annullare all' infinito, risulta identicamente nulla. E' lecito perciò supporre $\alpha \neq 0$.

Tutto ciò premesso vogliamo dimostrare che

I. - « *Se un campo elettromagnetico armonico, sostenuto da un guscio elicoidale, è TEM all' esterno (interno) esso è nullo all' esterno (interno) mentre all' interno (esterno) può aversi al più un' onda TE per valori particolari della frequenza, appartenenti ad un insieme numerabile* ».

« *Tali onde esistono, ad es., per il guscio a sezione circolare* ».

Supposto

$$\mathcal{G}_z^e \equiv 0, \quad \mathcal{H}_z^e \equiv 0,$$

le altre componenti del campo esterno sono nulle per le (10) e le (11).

Per il campo interno valgono le condizioni (22) e (23) cui va aggiunta la (7), la quale assume adesso l' aspetto

$$(25) \quad \alpha^2 \mathcal{H}_z^i \sin \psi - j \left(h \frac{\partial \mathcal{H}_z^i}{\partial s} + \omega \varepsilon \frac{\partial \mathcal{G}_z^i}{\partial n} \right) \cos \psi = 0.$$

Affinchè queste condizioni possano essere soddisfatte deve essere $\mathcal{G}_z^i \equiv 0$.

Per vedere ciò osserviamo innanzitutto che se fosse $\mathcal{H}_z^i = 0$ su C risulterebbe per la (25)

$$(26) \quad \frac{\partial \mathcal{G}_z^i}{\partial n} = 0,$$

la quale associata alla (22) poichè $\mathcal{G}_z^i$ soddisfa la (11) fornisce appunto $\mathcal{G}_z^i \equiv 0$.

Ora le (22) e (23) determinano ciascuna un insieme di autovalori delle equazioni (11) e (12): indicando con α_n il generico autovalore del primo insieme e con α'_m il generico autovalore del secondo, esaminiamo le due eventualità:

a) che qualunque siano gli indici m ed n risulti $\alpha_n \neq \alpha'_m$;

b) che per certi indici n ed m si abbia $\alpha_n = \alpha'_m$.

Nel caso a) deve essere identicamente nullo $\mathcal{G}_z^i$ oppure $\mathcal{H}_z^i$, onde l'asserto è provato per l'osservazione fatta.

Nel caso b) sostituendo al posto di α un autovalore $\bar{\alpha}$ comune ai due insiemi per la formula di GREEN si ha

$$\oint_C \left(\mathcal{H}_z^i \frac{\partial \mathcal{G}_z^i}{\partial n} - \mathcal{G}_z^i \frac{\partial \mathcal{H}_z^i}{\partial n} \right) ds = 0 ,$$

ossia per la (22)

$$\int_C \mathcal{H}_z^i \frac{\partial \mathcal{G}_z^i}{\partial n} ds = 0 .$$

Da ciò segue che deve essere $\frac{\partial \mathcal{G}_z^i}{\partial n} = 0$ ossia $\mathcal{G}_z^i \equiv 0$. Infatti se così non fosse dalla (25) si ricaverebbe

$$\bar{\alpha}^2 \sin \psi \int_C \mathcal{H}_z^{i2} ds - jh \cos \psi \int_C \mathcal{H}_z^i \frac{\partial \mathcal{H}_z^i}{\partial s} ds = 0 ,$$

e poichè il secondo integrale è nullo qualunque sia $\mathcal{H}_z^i$ ne seguirebbe

$$\int_C \mathcal{H}_z^{i2} ds = 0 .$$

Ma questa potrebbe sussistere soltanto se in ogni punto di C fosse $\mathcal{H}_z^i = 0$, da cui seguirebbe, come si è visto, la (26).

Riconosciuto che in ogni caso è $\mathcal{G}_z^i \equiv 0$, vediamo quali sono le condizioni imposte per $\mathcal{H}_z^i$. Fissato uno qualunque degli autovalori della (12) relativi alla (23), la (25) diventa

$$(27) \quad \alpha_m'^2 \mathcal{H}_z^i \sin \psi - jh \frac{\partial \mathcal{H}_z^i}{\partial s} \cos \psi = 0 ,$$

da cui segue facilmente, sulla linea C

$$\mathcal{H}_z^i = A e^{-j\alpha_m' h^{-1} t g \psi \cdot s}$$

essendo A una costante arbitraria. Per la uniformità di $\mathcal{H}_z^i$, detta c la lunghezza della linea C , deve aversi $\mathcal{H}_z^i(s+c) = \mathcal{H}_z^i(s)$, ossia

$$\alpha'^2 c \operatorname{tg} \psi = 2\pi p h ,$$

con p intero qualsiasi. Ricordando la (8) si riconosce che questa condizione può esser soddisfatta se, e soltanto se, ai para-

metri k ed h si attribuiscono i valori

$$(28) \quad k = k_{mp} = \frac{\alpha'_m}{2p\pi} \sqrt{4p^2\pi^2 + \alpha'_m{}^2 c^2 t g^2 \psi} ,$$

$$(29) \quad h = h_{mp} = \frac{\alpha'_m{}^2}{2p\pi} c t g \psi .$$

Si badi che anche quando k ed h siano stati scelti a norma delle (28) e (29) non è affatto detto che possa trovarsi una soluzione della (1) che al contorno soddisfi simultaneamente la (23) e la (27): ciò è però possibile per forme particolari della sezione della guida, ad es. per la sezione circolare, come ora mostriamo.

In questo caso infatti una soluzione della (12) regolare nel dominio interno è data da

$$\mathcal{H}_z^i = A J_p(\alpha r) e^{-ip\phi} ,$$

essendo $J_p(x)$ la funzione di BESSEL di 1^a specie di ordine p . Si riconosce subito che le condizioni al contorno (23) e (27) risultano soddisfatte se, preso $p > 0$ e fissato un generico zero x'_{pm} di $J'_p(x)$, si attribuisce ad α il valore

$$\alpha'_m = \frac{x'_{pm}}{R} ,$$

(R = raggio della sezione) ed ai parametri k ed h i valori

$$k = k_{pm} = \frac{x'_{pm}}{pR} \sqrt{p^2 + x'_{pm}{}^2 t g^2 \psi} ,$$

$$h = h_{pm} = \frac{x'_{pm}{}^2}{pR} t g \psi .$$

In modo analogo si conclude per il campo esterno se si suppone TEM il campo interno e si tien conto della ipotesi fatta sul comportamento del campo all'infinito.

5. - Da quanto precede segue che per particolari frequenze possono aversi onde TE esclusivamente all'interno o all'esterno del guscio. Proponiamoci ora di esaminare se un guscio elicoidale può sostenere un'onda elettromagnetica che sia *ovunque TE*.

Supposto

$$\mathcal{E}_z^i \equiv \mathcal{E}_z^e \equiv 0,$$

per la componente longitudinale del campo magnetico si hanno le condizioni al contorno

$$(23) \quad \frac{\partial \mathcal{H}_z^i}{\partial n} = 0, \quad (23') \quad \frac{\partial \mathcal{H}_z^e}{\partial n} = 0,$$

$$(30) \quad \alpha \mathcal{H}_z^i \sin \psi - j\hbar \frac{\partial \mathcal{H}_z^i}{\partial s} \cos \psi = \alpha^2 \mathcal{H}_z^e \sin \psi - j\hbar \frac{\partial \mathcal{H}_z^e}{\partial s} \cos \psi.$$

Ora se gli insiemi di autovalori della (12) definiti dalla (23) e dalla (23') non hanno elementi comuni, dovrà essere $\mathcal{H}_z^i \equiv 0$ oppure $\mathcal{H}_z^e \equiv 0$, onde si ricade nelle condizioni esaminate al n.° precedente.

Se esiste qualche autovalore comune ai due insiemi, indicando con α uno di questi e posto

$$g(s) = (\mathcal{H}_z^i)_s - (\mathcal{H}_z^e)_s$$

dove $(\mathcal{H}_z^i)_s$ e $(\mathcal{H}_z^e)_s$ sono i valori di $\mathcal{H}_z^i$ e di $\mathcal{H}_z^e$ nel generico punto della linea C , dalla (30) si trae

$$-\alpha^2 g(s) \sin \psi - j\hbar \frac{\partial g}{\partial s} \cos \psi = 0.$$

Per la uniformità di $\mathcal{H}_z^i$ e di $\mathcal{H}_z^e$ e quindi di $g(s)$ si ottengono per quest'ultima le stesse condizioni incontrate a pag. 11 per $\mathcal{H}_z^i$, onde soltanto se tali condizioni sono soddisfatte $\mathcal{H}_z^i$ e $\mathcal{H}_z^e$ possono essere simultaneamente diverse da zero.

Si vede così che:

II. - « *Perchè un campo elettromagnetico armonico sostenuto da un guscio elicoidale sia ovunque (ossia all'interno ed all'esterno) TE è necessario che gli insiemi di autovalori della (12) definiti dalle (23) e (23') abbiano almeno un elemento comune e che la frequenza abbia valori particolari appartenenti ad un insieme numerabile* ».

Infine dimostriamo che

III. - « *Se un campo elettromagnetico armonico, sostenuto da un guscio elicoidale, è ovunque TM, esso è identicamente nullo per qualsiasi frequenza* ».

Per ipotesi si ha

$$(31) \quad \mathcal{H}_z^i \equiv \mathcal{H}_z^e \equiv 0,$$

mentre per $\mathcal{E}_z$ si hanno le condizioni al contorno

$$(19) \quad \mathcal{E}_z^i = \mathcal{E}_z^e,$$

$$(32) \quad \frac{\partial \mathcal{E}_z^i}{\partial n} = \frac{\partial \mathcal{E}_z^e}{\partial n},$$

la prima delle quali, come si è visto, vale in ogni caso, e la seconda segue, nell'ipotesi attuale, dalla (7).

Se ne deduce che la $\mathcal{E}_z$ è continua, dotata di derivate parziali prime e seconde continue e soddisfa la (11) in tutti i punti del piano.

Infatti, fissato un punto P_0 di C , consideriamo un cerchio Γ di centro P_0 e diciamo γ la sua circonferenza, D^e la parte di Γ contenente soltanto punti esterni a C e D^i quella contenente i punti interni a C . Indicando con r la distanza del punto P corrente su γ da un punto M di Γ e con $H_0^i(\alpha r)$ la funzione di HANKEL di 1^a specie di ordine 0, consideriamo la funzione del punto M

$$(33) \quad u(M) = -\frac{j}{4} \int_{\gamma} \left(\mathcal{E}_z \frac{\partial H_0^i(\alpha r)}{\partial n} - H_0^i(\alpha r) \frac{\partial \mathcal{E}_z}{\partial n} \right) ds.$$

La $u(M)$ verifica la (11) nell'interno di $\Gamma^{(5)}$, onde basta far vedere che $u(M) = \mathcal{E}_z(M)$ in $\Gamma - \gamma$, o, per la supposta continuità di $\mathcal{E}_z$ in tutto il piano, che $u(M) = \mathcal{E}_z(M)$ per ogni punto M interno a Γ che non appartenga a C . Ora, supposto ad es. M interno a D^i , per la (31) risulta

$$\begin{aligned} u(M) = & -\frac{j}{4} \int_{\Gamma(D^i)} \left(\mathcal{E}_z \frac{\partial H_0^i(\alpha r)}{\partial n} - H_0^i(\alpha r) \frac{\partial \mathcal{E}_z}{\partial n} \right) ds - \\ & -\frac{j}{4} \int_{\Gamma(D^e)} \left(\mathcal{E}_z \frac{\partial H_0^i(\alpha r)}{\partial n} - H_0^i(\alpha r) \frac{\partial \mathcal{E}_z}{\partial n} \right) ds, \end{aligned}$$

⁵⁾ V. ad es., BAKER and COPSON, *Huygen's Principle*, Oxford, 1939, p. 51-52.

dove il primo integrale vale appunto $\mathcal{E}_z(M)$, mentre il secondo è nullo.

Da ciò segue che $\mathcal{E}_z \equiv 0$. Ricorrendo alla stessa formula (33), il cui secondo membro, per quanto precede, rappresenta $\mathcal{E}_z(M)$ qualunque sia il raggio di γ , si vede che $\mathcal{E}_z(M) = 0$, se l'integrale converge uniformemente allo zero al tendere all'infinito del raggio di T : ciò avviene certamente per l'ipotesi da noi fatta che $\mathcal{E}_z$ per $r \rightarrow \infty$ si comporti come $H_0^1(xr)$.

Notiamo infine che questo risultato era facilmente prevedibile da un punto di vista fisico. Infatti la (7) fornisce adesso $\mathcal{H}_t^i = \mathcal{H}_t^e$, mentre dalle (2₂) si ricava

$$\begin{aligned} h\mathcal{H}_y^{i,e} &= \omega\varepsilon\mathcal{E}_x^{i,e} \\ h\mathcal{H}_x^{i,e} &= -\omega\varepsilon\mathcal{E}_y^{i,e} \end{aligned}$$

da cui segue $\mathcal{E}_n^i = \mathcal{E}_n^e$, $\mathcal{H}_n^i = \mathcal{H}_n^e$. Ricordando le (19) e (20) si vede che *tutte* le componenti del campo elettrico e *tutte* quelle del campo magnetico sono continue attraverso la superficie σ del guscio: ciò equivale a dire che su σ non si hanno nè correnti nè cariche elettriche o magnetiche. Tutto lo spazio risulta pertanto privo di cariche e di correnti elettriche e magnetiche, ed il campo elettromagnetico, dovendosi annullare all'infinito, è nullo dappertutto.

§ 3. - Guscio ad anelli.

6. - Le proprietà del guscio elicoidale esaminate al § precedente si conservano in buona parte quando si abbia $\psi = 0$, ossia per il guscio ad anelli.

Si vede subito che anche adesso, se si suppone

$$\mathcal{E}_z^e = 0,$$

per il campo interno valgono le condizioni al contorno (22) e (23) e che se il campo all'interno o all'esterno è TE o TM non può essere $\alpha = 0$.

In luogo di I) può dimostrarsi che

I'. - « Se un campo elettromagnetico armonico, sostenuto da un guscio ad anelli, è TEM all'esterno (interno) esso è nullo

all'esterno (interno); all'interno (esterno) non può essere TM e se esiste un'onda TE ciò avviene per qualsiasi frequenza superiore ad un certo valore ».

Supposto

$$\mathcal{E}_z^e \equiv \mathcal{H}_z^e \equiv 0,$$

le altre componenti del campo esterno sono nulle per le (9) e (10).

La (25) diventa adesso

$$(25') \quad h \frac{\partial \mathcal{H}_z^i}{\partial s} + \omega \varepsilon \frac{\partial \mathcal{E}_z^i}{\partial n} = 0.$$

Ne segue che, come nel caso $0 < \psi < 90^\circ$, non può essere $\mathcal{H}_z^i \equiv 0$. Se si suppone invece $\mathcal{E}_z^i \equiv 0$ per $\mathcal{H}_z^i$ si hanno le condizioni al contorno

$$(23) \quad \frac{\partial \mathcal{H}_z^i}{\partial n} = 0, \quad (34) \quad \frac{\partial \mathcal{H}_z^i}{\partial s} = 0,$$

A differenza di quanto avviene per il guscio elicoidale (v. (27)) le condizioni imposte alla $\mathcal{H}_z^i$ implicano i parametri k ed h soltanto attraverso la combinazione $\alpha = \sqrt{k^2 - h^2}$, onde se esiste qualche valore di α per cui è possibile verificare entrambe le condizioni (23) e (34), senza che la $\mathcal{H}_z^i$ sia identicamente nulla, comunque si scelga k , ossia la frequenza (purché superiore al minimo di quei valori di α) potrà in corrispondenza determinarsi un valore di h in modo da soddisfare tutte le condizioni imposte.

Ad es. per il guscio a sezione circolare le condizioni (23) e (34) sono soddisfatte se si assume

$$\mathcal{H}_z^i = J_0(\alpha r)$$

attribuendo ad α il valore $x_{m/R}$, dove x_m è lo zero m^{mo} di $J'_0(x)$.

Da quanto precede si deduce che all'interno del guscio ad anelli il campo è necessariamente TE se non esiste un autovaleore della (12) comune ai due insiemi definiti dalle (22) e (23). Inoltre si può dimostrare che

« Nelle ipotesi di I', il solo campo elettromagnetico possibile all'interno (esterno) è TE se gli autovalori comuni alle

condizioni (22) e (23), ammesso che esistano, sono semplici (caso non degenere).

Infatti poichè, nelle ipotesi attuali, risulta $\mathcal{H}_t^i = \mathcal{H}_n^i = 0$, come si riconosce immediatamente, si ha pure, al contorno

$$\mathcal{H}_x^i = 0, \quad \mathcal{H}_y^i = 0,$$

Ammesso che esista un autovalore delle (11) e (12) comune agli insiemi definiti dalla (22) e (23) e supposto $\frac{\partial \mathcal{E}_z^i}{\partial n} \neq 0$ (altrimenti si avrebbe senz'altro $\mathcal{E}_z^i \equiv 0$), poichè $\mathcal{H}_x$ ed $\mathcal{H}_y$ sono soluzioni dell'equazione (11) annullantesi, come si è visto, al contorno, per l'ipotesi fatta che gli autovalori definiti dalla (22) siano semplici, si può scrivere

$$\mathcal{H}_x^i = A \mathcal{E}_z^i, \quad \mathcal{H}_y^i = B \mathcal{E}_z^i,$$

essendo A e B due costanti non entrambe nulle (se fosse $\mathcal{H}_x^i \equiv \mathcal{H}_y^i \equiv 0$ per la seconda delle (3) si avrebbe $\mathcal{H}_z^i \equiv 0$, contro la (25')). Sostituendo nelle prime due delle (2₁) si ricava

$$\frac{\partial \mathcal{E}_z^i}{\partial y} + jh \mathcal{E}_y^i = -j\omega \mu A \mathcal{E}_z^i,$$

$$\frac{\partial \mathcal{E}_z^i}{\partial x} + jh \mathcal{E}_x^i = j\omega \mu B \mathcal{E}_z^i,$$

da cui, derivando la prima rispetto ad y e la seconda rispetto ad x e sommando, segue

$$\Delta \mathcal{E}_z^i + jh \left(\frac{\partial \mathcal{E}_x^i}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{E}_y^i}{\partial y} \right) = j\omega \mu \left(B \frac{\partial \mathcal{E}_z^i}{\partial x} - A \frac{\partial \mathcal{E}_z^i}{\partial y} \right)$$

ovvero tenendo presente la (11) e la prima delle (3)

$$j\omega \varepsilon \mathcal{E}_z^i = B \frac{\partial \mathcal{E}_z^i}{\partial x} - A \frac{\partial \mathcal{E}_z^i}{\partial y}.$$

Quindi sul contorno per la (22) si ha

$$B \frac{\partial \mathcal{E}_z^i}{\partial x} - A \frac{\partial \mathcal{E}_z^i}{\partial y} = 0,$$

mentre, sempre per la (22), si ha pure

$$\frac{\partial \mathcal{E}_z^i}{\partial x} x' + \frac{\partial \mathcal{E}_z^i}{\partial y} y' = 0.$$

Ne segue $\frac{\partial \mathcal{E}_z^i}{\partial x} = \frac{\partial \mathcal{E}_z^i}{\partial y} = \frac{\partial \mathcal{E}_z^i}{\partial n} = 0$, contro l'ipotesi fatta.

7. - Per quanto riguarda le proprietà II) e III) (p. 14) si vede facilmente che la III) conserva inalterata per il guscio ad anelli, mentre la II) va così modificata:

II'. - « *Se un guscio ad anelli può sostenere un'onda ovunque TE, ciò si verifica per qualsiasi frequenza superiore ad un determinato valore* ».

Tralasciamo la dimostrazione che si consegue con un ragionamento analogo a quello svolto a proposito di I').

§ 4. - Guscio a tubi: $\psi = 90^\circ$.

8. - Il guscio a tubi si distingue nettamente dal guscio elicoidale propriamente detto. Esso può considerarsi come caso limite del sistema formato da più fili rettilinei infinitamente lunghi disposti secondo le generatrici del cilindro ad eguali intervalli l'uno dall'altro, quando si faccia tendere a zero il diametro dei fili ed i loro intervalli e si faccia crescere indefinitamente il loro numero.

Mostriamo che

« *Il campo elettromagnetico armonico rispetto al tempo, sostenuto da un guscio a tubi è costituito:*

- A) *da un'onda TM all'interno e da una pure TM all'esterno, indipendenti fra loro, per qualsiasi frequenza superiore ad un determinato valore, se è $\alpha^2 = k^2 - h^2 \neq 0$;*
- B) *da un'onda TEM propagantesi all'interno ed all'esterno del guscio se è $\alpha = 0$ ».*

Le condizioni al contorno (4)...(7) diventano adesso

$$(35) \quad \mathcal{E}_z^i = 0, \quad (36) \quad \mathcal{E}_z^e = 0,$$

$$(37) \quad \mathcal{E}_t^i = \mathcal{E}_t^e, \quad (38) \quad \mathcal{H}_z^i = \mathcal{H}_z^e.$$

Supposto $\alpha \neq 0$ dalla (37) ricordando la (13) e tenendo conto delle (35) e (36) si deduce

$$\frac{\partial \mathcal{H}_z^i}{\partial n} = \frac{\partial \mathcal{H}_z^e}{\partial n},$$

onde, con lo stesso ragionamento fatto alle pp. 14-15 a proposito di $\mathcal{E}_z$, si riconosce che $\mathcal{H}_z$ è identicamente nullo.

Il campo è quindi TM all'interno ed all'esterno e deve soddisfare alle medesime condizioni al contorno (ossia le (35) e (36)) che si incontrano, per questo tipo di onde, per le guide isotrope.

Se invece si suppone $\alpha = 0$, dalle (2) si trae facilmente

$$\omega \varepsilon \frac{\partial \mathcal{E}_z}{\partial x} = -h \frac{\partial \mathcal{H}_z}{\partial y},$$

$$\omega \varepsilon \frac{\partial \mathcal{E}_z}{\partial x} = h \frac{\partial \mathcal{H}_z}{\partial x},$$

da cui segue subito che all'interno ed all'esterno del guscio $\mathcal{E}_z$ ed $\mathcal{H}_z$ sono funzioni armoniche e quindi, per le (35) e (36) e le ammesse condizioni all'infinito, identicamente nulle.

Resta così dimostrato che il campo è TEM all'interno ed all'esterno. La determinazione delle componenti trasversali del campo elettrico e del campo magnetico si riduce, notoriamente, ad un problema di elettrostatica (piana). Le equazioni di MAXWELL diventano

$$\begin{aligned} h\mathcal{E}_x &= \omega\mu\mathcal{H}_y, & h\mathcal{E}_y &= -\omega\mu\mathcal{H}_x, \\ (39) \quad \frac{\partial \mathcal{E}_y}{\partial x} - \frac{\partial \mathcal{E}_x}{\partial y} &= 0, & \frac{\partial \mathcal{E}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{E}_y}{\partial y} &= 0, \end{aligned}$$

e possono risolversi introducendo una sola funzione $\varphi(x, y)$ col porre

$$\mathcal{E}_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad \mathcal{E}_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y}.$$

Per l'ultima delle (39) la φ è armonica nell'interno ed al-

l'esterno e sul contorno deve soddisfare la condizione

$$\frac{\partial \varphi^i}{\partial s} = \frac{\partial \varphi^e}{\partial s}.$$

Ad es. per la sezione circolare queste condizioni risultano verificate se si assume

$$\begin{aligned} \varphi^i &= A \left(\frac{R}{r} \right)^n \cos n \theta + C, & r \geq R, \\ \varphi^e &= A \left(\frac{r}{R} \right)^n \cos n \theta + C_1, & r \leq R. \end{aligned} \quad n = 1, 2, \dots$$