

RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

GIOVANNI ZACHER

Caratterizzazione dei gruppi risolubili d'ordine finito complementati

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 22 (1953), p. 113-122

[<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1953__22__113_0>](http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1953__22__113_0)

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1953, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

CARATTERIZZAZIONE DEI GRUPPI RISOLUBILI D'ORDINE FINITO COMPLEMENTATI

Nota () di GIOVANNI ZACHER (a Padova)*

Nella Nota presente studio i gruppi d'ordine finito risolvibili complementati, chiamando complementato un gruppo G che goda della seguente proprietà: Se H è un sottogruppo qualsiasi di G , esiste sempre in G almeno un altro sottogruppo K (complemento di H) tale che l'unione $H \cup K$ coincida con G e l'intersezione $H \cap K$ coincida col sottogruppo identico di G .

Nei primi due numeri della Nota dimostro che:

Il gruppo finito e risolubile G è complementato, se e soltanto se il suo sottogruppo normale speciale massimo è prodotto diretto di sottogruppi normali minimi di G e possiede in G un complemento che sia esso stesso complementato.

Sia ora

$$N_0, N_1, N_2, \dots, N_{r-1}, N_r$$

la catena normale di G individuata dalle seguenti condizioni:

N_0 è il sottogruppo identico di G , $\frac{N_i}{N_{i-1}}$ è il sottogruppo normale speciale massimo di $\frac{G}{N_{i-1}}$ per $i = 1, 2, \dots, r$ e $\frac{G}{N_r}$ ha il sottogruppo normale speciale massimo identico; ebbene nel n. 3 dimostro questo teorema:

Il gruppo d'ordine finito G è un gruppo risolubile complementato quando e solo quando

$$1) N_r = G$$

(*) Pervenuta in Redazione il 25 febbraio 1953.

2) $\frac{N}{N_{i-1}}$ unione di sottogruppi normali minimi di $\frac{G}{N_{i-1}}$
 ($i = 1, 2, \dots, r$)

3) Il sottogruppo di Frattini di $\frac{G}{N_{i-1}}$ è identico,

ove $N_0, N_1, \dots, N_r$ hanno il significato poco sopra precisato.

1. - Indichiamo con G un gruppo d'ordine finito, risolubile, complementato. Per lo studio del gruppo G premettiamo alcune proposizioni che ci saranno utili nel seguito:

I: Se G è un gruppo d'ordine finito ed N un suo sottogruppo normale, se Φ_G e Φ_N indicano rispettivamente il sottogruppo di Frattini di G ed N , allora vale la seguente relazione

$$\Phi_N \subseteq \Phi_G.$$

II: In un gruppo G d'ordine finito, complementato, il sottogruppo di Frattini Φ_G coincide col sottogruppo identico di G^1).

III: Un gruppo finito speciale G con $\Phi_G = 1$ è un gruppo abeliano elementare²⁾).

IV: Se G è un gruppo complementato, allora ogni gruppo fattoriale di G è pure un gruppo complementato.

Ritornando al nostro gruppo d'ordine finito G , risolubile, complementato, sia N_1 il suo sottogruppo normale speciale massimo. Essendo G risolubile, tale gruppo certamente non è identico e in virtù delle prime tre propos. precedenti esso risulta abeliano elementare.

Indichiamo con H un sottogruppo normale di G contenuto in N_1 , e sia H' un complemento di H in G .

Il gruppo $H' \cap N_1$ risulta allora un sottogruppo normale di

¹⁾ O. ORE: *Contributions to the theory of groups of finite order*. Duke Math. Journ., vol. 5, p. 444.

²⁾ G. ZACHER: *Determinazione dei gruppi d'ordine finito relativamente complementari*. Rend. dell'Accademia di Sc. Fis. e Mat. della Soc. Naz. di Sc. Lett. ed Arti in Napoli, vol. XIX, 1952.

H' , ed essendo N_1 abeliano, esso è pure un sottogruppo normale di N_1 e quindi anche di $N_1 \cup H' \cong H \cup H' = G$.

Poichè $H \subseteq N_1$ ed H è permutabile con ogni sottogruppo di G essendo per ipotesi un sottogruppo normale di G , si ha per la relazione di Dedekind:

$$H \cup (H' \cap N_1) = (H \cup H') \cap N_1 = G \cap N_1 = N_1$$

ossia, avendosi $(H' \cap N_1) \cap H = 1$, $H' \cap N_1$ è un complemento di H in N_1 .

Riassumendo abbiamo pertanto il

LEMMA: Se G è un gruppo d'ordine finito, risolubile, complementato, ogni sottogruppo normale H di G contenuto nel sottogruppo normale speciale massimo N_1 ammette un complemento $\bar{H}$ in N_1 che risulta normale in G .

COROLLARIO: In G il gruppo N_1 coincide col sottogruppo T di G unione di tutti i sottogruppi normali minimi di G .

Invero, poichè il gruppo G è per ipotesi risolubile (sottinteso « d'ordine finito ») i suoi sottogruppi normali minimi sono p -gruppi abeliani (elementari). Pertanto risulta

$$T \subseteq N_1$$

Sia $T \subset N_1$. Allora, essendo T un sottogruppo normale di G contenuto in N_1 , pel lemma dimostrato poco fa, T deve avere un complemento T' in N_1 che risulta normale in G . Poichè $T \cap T' = 1$, T' conterrebbe un sottogruppo normale minimo di G non contenuto in T , il che è assurdo.

Diciamo C_1 un complemento di N_1 in G . Per un teorema generale sugli isomorfismi tra gruppi otteniamo la relazione

$$(1) \quad \frac{N_1}{G} = \frac{N_1 \cup C_1}{N_1} \cong \frac{C_1}{N_1 \cap C_1} \cong C_1$$

essendo $N_1 \cap C_1 = 1$.

Poichè per la propos. IV, il gruppo $\frac{G}{N_1}$ è un gruppo complementato, tale risulterà per la (1) pure C_1 .

Per quanto precede possiamo così enunciare il

TEOREMA: Condizione necessaria perchè un gruppo d'ordine finito risolubile G sia complementato è che il suo sottogruppo normale speciale massimo N sia il prodotto diretto di con-

venienti sottogruppi normali minimi di G e che N_1 abbia un complemento C_1 in G che sia a sua volta un gruppo complementato.

2. - Cerchiamo ora di invertire la condizione enunciata.

A tal fine facciamo anzitutto vedere che vale la seguente proposizione:

Se T è un sottogruppo unione di sottogruppi normali minimi di un gruppo finito G , ogni sottogruppo normale H di G contenuto in T , $H \subseteq T$, ammette un complemento in T che risulta normale in G .

Invero sia M l'unione di tutti i sottogruppi normali minimi di G contenuti in H e sia $M \subset H$, M non può contenere tutti i sottogruppi normali minimi di G , essendo $M \subset T$. Sia allora L_1 un sottogruppo normale minimo di G non contenuto in M . Sarà $M \cap L_1$, essendo L_1 sottogruppo normale minimo di G ed M pure un sottogruppo normale di G . Pertanto

$$M \cup L_1 = M \times L_1.$$

Se $M \times L_1 \subset T$, esisterà un sottogruppo normale minimo L_2 di G non contenuto in $M \times L_1$, per cui sarà

$$(M \times L_1) \cup L_2 = M \times L_1 \times L_2.$$

Così continuando si arriverà infine ad un sottogruppo normale minimo L_s di G per cui

$$M \times L_1 \times L_2 \dots \times L_s = G.$$

Ma allora si ha pure $H \cup (L_1 \times L_2 \times \dots \times L_s) = G$ e sarà

$$\frac{G}{L_1 \times L_2 \times \dots \times L_s} \cong \frac{H}{(L_1 \times L_2 \times \dots \times L_s) \cap H} \cong M.$$

Quindi, avendo supposto $H \supset M$, dovrà essere $(L_1 \times L_2 \times \dots \times L_s) \cap H \neq 1$, il che non può essere perchè altrimenti $(L_1 \times L_2 \times \dots \times L_s) \cap H$ conterrebbe un sottogruppo normale minimo contenuto in H e non in M .

Quindi $M = H$ ed $L_1 \times L_2 \times \dots \times L_s$ è un complemento di H in T , normale in G . (c. v. d.).

Siamo ora in grado di dimostrare il

TEOREMA: Se G è un gruppo d'ordine finito, risolubile, tale che il suo sottogruppo speciale normale massimo N_1 sia unione di sottogruppi normali minimi di G , e ammette un complemento C_1 in G che risulta a sua volta un gruppo complementato, G risulta un gruppo complementato.

Sia H un generico sottogruppo di G . Posto $Q = H \cap C_1$, indichiamo con M un complemento di Q in C_1 . In tali ipotesi si ha:

$$(2) \quad H \cap M = 1 \quad H \cup M = H \cup [(H \cap C_1) \cup M] = H \cup C_1 \cong C_1$$

Poniamo $H \cup M = F$ ed $R = N_1 \cap F$.

Il gruppo N_1 come unione di gruppi normali minimi di un gruppo risolubile risulta abeliano, per cui R risulta non solo un sottogruppo normale di F ma anche di N_1 e quindi pure di $N_1 \cup F$. Ma per la (2)

$$N_1 \cup F \cong N_1 \cup C_1 = G$$

per cui R è un sottogruppo normale di G contenuto in N_1 .

Per la proposizione dimostrata all'inizio di questo n.° possiamo allora affermare che esiste un complemento R' di R in N_1 , che è normale in G . Risulta $R' \cap F = 1$ e $R' \cup F = R' \cup (R \cup F) = N_1 \cup F = G$ ossia

$$(R' \cup M) \cup H = G.$$

Se pertanto dimostriamo che $(R' \cup M) \cap H = 1$, il gruppo H ha un complemento in G .

Ragioniamo per assurdo, supponendo che $(R' \cup M) \cap H \neq 1$.

Detto h un elemento non identico di tale intersezione, si avrà

$$(3) \quad h = r'm$$

con h in H , r' in R ed m in M . Dalla (3) ricaviamo

$$m^{-1}h = m^{-1}r'm = r''$$

dove r'' è ancora un elemento di R' , essendo R' un sottogruppo normale di G . Pertanto $m^{-1}h$ è un elemento di R' ; ma esso è

pure un elemento di $F = H \cup M$. Però si è visto che $R' \cap F = 1$, per cui

$$m^{-1}h = 1, \quad \text{ossia} \quad h = m.$$

Ora ciò implica che sia $h = m = 1$, perchè $H \cap M = 1$, il che contraddice l'ipotesi fatta su h . L'assurdo cui siamo pervenuti prova pertanto che $(R' \cup M) \cap H = 1$; per quanto si è detto, $R' \cup M$ risulta dunque un complemento di H in G . Data la genericità del sottogruppo H di G , concludiamo con la validità del nostro teorema.

Tenendo conto dei risultati finora raggiunti, abbiamo il

TEOREMA: *Condizione necessaria e sufficiente affinché un gruppo d'ordine finito, risolubile G sia complementato è che il suo sottogruppo normale speciale massimo N_1 sia prodotto diretto di sottogruppi normali minimi di G e che N_1 abbia un complemento C_1 in G , con C_1 pure gruppo complementato.*

COROLLARIO: *Condizione necessaria e sufficiente affinché un gruppo d'ordine finito risolubile G sia complementato è che G si possa rappresentare come prodotto di $t \geq 1$ gruppi abeliani elementari a 2 a 2 permutabili*

$$G = N_1 N_1 \dots N_t$$

tali che

- $\alpha) N_i \cap (N_{i+1} N_{i+2} \dots N_t) = 1$ per $i = 1, 2, \dots, t-1$
- $\beta) N_i$ coincide col sottogruppo speciale normale massimo di $N_i N_{i+1} \dots N_t$ e nello stesso tempo col gruppo unione di tutti i sottogruppi normali minimi di $N_i N_{i+1} \dots N_t$.

Osservazione. — Se il gruppo G oltre ad essere d'ordine finito complementato risulta supersolubile, il corollario enunciato ci permette facilmente di dimostrare che in tal caso tutti i sottogruppi di Sylow di G devono essere gruppi abeliani elementari. Invero, giacchè N_t è un gruppo abeliano elementare, supporremo il teorema vero pel gruppo $N_2 N_3 \dots N_t$.

Poichè ogni sottogruppo di Sylow di N_1 è un sottogruppo normale di G , e quindi permutabile con ogni sottogruppo di G , se p è un numero primo divisore dell'ordine di G , se S_1 e S_2 sono due sottogruppi di Sylow relativi al numero primo p rispettivamente di N_1 ed $N_2 N_3 \dots N_t$, (S_1 od S_2 può anche ridursi al sottogruppo identico di G), allora $S_1 \cup S_2$ è un sotto-

gruppo di Sylow di G . Ora S_1 risulta il prodotto diretto di sottogruppi normali minimi di G , che per l'ipotesi della supersolubilità di G risultano tutti d'ordine p . Pertanto sarà $S_1 = P_1 \times \times P_2 \times \dots \times P_k$. Se diciamo ora s_2 un elemento generico di S_2 , la trasformazione $s_2 S_1 s_2^{-1}$ dovrà subordinare un automorfismo su $P_i (i = 1, 2, \dots, k)$ il cui ordine σ evidentemente è un divisore dell'ordine di s_2 , e quindi sarà p od 1 essendo l'ordine di s_2 uguale a p od 1. Ma σ non può essere p , perchè l'ordine del gruppo d'automorfismi di P_i è $p - 1$; quindi è 1, ossia s_2 è permutabile con ogni elemento di P_i , e pertanto anche di S_1 . $S_1 \cup S_2$ è perciò abeliano elementare, e poichè in un gruppo d'ordine finito i sottogruppi di Sylow di dato ordine sono coniugati, concludo con quanto volevasi dimostrare.

Hall in una sua nota ³⁾ aveva caratterizzato i gruppi G d'ordine finito godenti della seguente proprietà:

Se H è un sottogruppo qualsiasi di G esiste almeno un sottogruppo K di G permutabile con H per cui $H \cup K = G$, $H \cap K = 1$.

Si tratta quindi di una particolare classe di gruppi complementati, che chiameremo gruppi complementati nel senso di Hall.

Nella citata Nota si dimostra che condizione necessaria e sufficiente affinchè un gruppo d'ordine finito G sia complementato nel senso di Hall è che G sia supersolubile e che i suoi sottogruppi di Sylow siano abeliani elementari.

Per quanto precede possiamo dunque dire che *condizione necessaria e sufficiente affinchè un gruppo d'ordine finito complementato sia complementato nel senso di Hall è che sia supersolubile.*

3. - Sia G un gruppo d'ordine finito e consideriamo in esso una catena di sottogruppi normali di G , ciascuno contenuto nel successivo, incominciante col sottogruppo identico $N_0 = 1$ e tale che se N_i e l' i -esimo elemento di tale catena, il gruppo fat-

³⁾ P. HALL: *Complemented groups*. The Journal of the Math. Soc., vol. 12, pp. 201-204 (1937).

toriale $\frac{N_i}{N_{i-1}}$ coincide col sottogruppo normale speciale massimo di $\frac{G}{N_{i-1}}$.

I gruppi di tale catena risultano evidentemente univocamente determinati dal gruppo G . Chiamata semplicemente catena α di G la catena di sottogruppi normali ora definita, poichè abbiamo supposto l'ordine di G finito, la catena α si arresterà dopo un numero finito di elementi, vale a dire esiste un primo indice $r \geq 0$ per cui si ha che $N_r = N_{r+1} = \dots$. La catena α si dirà di lunghezza r .

Sussiste il teorema: Condizione necessaria e sufficiente affinchè un gruppo d'ordine finito G sia risolubile è che $N_r = G$ se r indica la lunghezza della catena α .

La necessità della condizione segue dal fatto che ogni gruppo risolubile ammette sottogruppi normali speciali non identici.

Per la sufficienza si noti che

$$\frac{G}{N_{r-1}}, \frac{N_{r-1}}{N_{r-2}}, \dots, \frac{N_2}{N_1}, \frac{N_1}{N_0}$$

costituisce una successione di gruppi speciali con N_i sottogruppo normale di G , per cui la catena

$$G, N_{r-1}, N_{r-2}, \dots, N_2, N_1, N_0 = 1$$

è suscettibile di venir raffinata ad una serie di composizione di G a indici tutti primi.

Esaminiamo ora la catena α in un gruppo G risolubile, complementato, d'ordine finito.

E' anzitutto $N_r = G$. Avendo poi supposto che G sia un gruppo complementato, tale sarà pure il gruppo fattoriale

$\frac{G}{N_{i-1}}$ (propos. IV del n. 1) e quindi tenendo presente il significato del gruppo $\frac{N_i}{N_{i-1}}$ e il teorema ultimo del n. 2, il gruppo

$\frac{N_i}{N_{i-1}}$ dovrà essere il prodotto diretto di sottogruppi normali minimi di $\frac{G}{N_{i-1}}$. Inoltre, per la propos. II del n. 1, il gruppo

di Frattini di $\frac{G}{N_{i-1}}$ ($i = 1, 2, \dots, r$) è identico, $\Phi_{\frac{G}{N_{i-1}}} = 1$.

Supponiamo ora viceversa che G sia un gruppo finito per cui la catena α di lunghezza r termini col gruppo G , che $\frac{N_i}{N_{i-1}}$ sia unione di sottogruppi normali minimi di $\frac{G}{N_{i-1}}$ e che $\Phi_{\frac{G}{N_{i-1}}} = 1$ per $i = 1, 2, \dots, r$; allora dimostriamo che C_1 è un gruppo complementato risolubile.

Il gruppo G risulta per quanto si è visto poco fa risolubile. Notiamo poi che se $r = 0$ il teorema è ovvio.

Supporremo quindi vero il teorema per un gruppo d'ordine finito G in cui la lunghezza della catena α sia $r - 1$, e faremo vedere che il teorema è pur vero per un gruppo G in cui la catena α ha lunghezza r .

Prendiamo in considerazione il gruppo $\frac{G}{N_1}$. In questo gruppo la catena α è data, come facilmente si vede ricorrendo al III teorema sugli isomorfismi tra gruppi, da:

$$\frac{N_1}{N_1}, \frac{N_2}{N_1}, \dots, \frac{N_{r-1}}{N_1}, \frac{N_r}{N_1}$$

di lunghezza $r - 1$, se $N_0, N_1, \dots, N_r$ indica la catena α di G .

Ora:

$$(4) \quad \frac{\frac{N_i}{N_1}}{\frac{N_{i-1}}{N_1}} \cong \frac{N_i}{N_{i-1}} \quad \text{e} \quad \frac{\frac{G}{N_1}}{\frac{N_{i-1}}{N_1}} \cong \frac{G}{N_{i-1}}$$

quindi per le ipotesi fatte $\frac{\frac{N_i}{N_1}}{\frac{N_{i-1}}{N_1}}$ è unione di sottogruppi nor-

mali minimi di $\frac{G}{N_{i-1}}$; inoltre $\Phi_{\frac{G}{N_{i-1}}} = 1$ in virtù della (4) e

dell'ipotesi $\Phi_{\frac{G}{N_{i-1}}} = 1$.

Ma allora per l'ipotesi d'induzione, il gruppo $\frac{G}{N_1}$ risulta

complementato. Per dimostrare che pure G è complementato ricordiamo il seguente teorema: Condizione necessaria e sufficiente affinché il sottogruppo di Frattini Φ di un gruppo finito G sia identico, è che il sottogruppo unione di tutti i sottogruppi normali minimi di G abbia complemento in G .

Poichè abbiamo supposto $\Phi_G = \Phi_{\overline{N_0}} = 1$ ed N_1 unione di sottogruppi normali minimi di G , dato il significato di N_1 , esso coincide col sottogruppo unione di tutti i sottogruppi normali minimi di G , essendo G risolubile, quindi N_1 deve avere complemento C_1 in G . Ma allora $\frac{G}{N_1} \cong C_1$ e quindi C_1 è pure complementato. Pel teorema ultimo del n. 2 possiamo perciò dire che il gruppo G risulta complementato.

Siamo così pervenuti alla seguente caratterizzazione dei gruppi risolubili d'ordine finito complementati:

Condizione necessaria e sufficiente affinché un gruppo d'ordine finito G sia un gruppo risolubile complementato è che, se

$$N_0, N_1, N_2, \dots, N_{r-1}, N_r$$

è la catena α di G , risulti:

- a) $N_r = G$
- b) $\frac{N_i}{N_{i-1}}$ unione di sottogruppi normali minimi di $\frac{G}{N_{i-1}}$
($i = 1, 2, \dots, r$)
- c) $\Phi_{\frac{G}{N_{i-1}}} = 1$ ($i = 1, 2, \dots, r$).

⁴) G. ZACHER: *Costruzione dei gruppi finiti a sottogruppo di Frattini identico*. Rend. Sem. Mat. di Padova, vol. 21 pag. 388 (1952).