

RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

GIUSEPPE SCORZA DRAGONI

**Un'osservazione sulla derivata di una
funzione composta**

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 20 (1951), p. 462-467

[<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1951__20__462_0>](http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1951__20__462_0)

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1951, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*
<http://www.numdam.org/>

UN' OSSERVAZIONE SULLA DERIVATA DI UNA FUNZIONE COMPOSTA

Nota () di GIUSEPPE SCORZA DRAGONI (a Padova).*

In questa Nota ritorno brevemente, per darle una risposta che ritengo definitiva, su una quistione collaterale ad un teorema di VOLPATO ⁽¹⁾.

Si tratta di questo: indicare condizioni sufficienti perchè la funzione composta $z(x, \rho(x))$, *supposta quasi ovunque derivabile*, ammetta quasi ovunque la solita espressione $z'_x(x, \rho(x)) + z'_y(y, \rho(x)) \rho'(x)$ per la sua derivata. Orbene, vedremo in sostanza che a ciò basta che esistano quasi ovunque le derivate scritte ⁽²⁾ e che $z(x, y)$ sia misurabile rispetto ad x e continua rispetto ad y . Per alcune condizioni suppletive, che si presentano quando il punto $(x, \rho(x))$ cade sulla frontiera dell'insieme di definizione, rimando al seguito di questa Nota.

Altri si sta occupando di altre quistioni, che si presentano spontanee nell'ordine di idee qui seguito.

1. — Incominciamo dal seguente teorema:

La funzione $z(x, y)$ sia misurabile rispetto ad x e continua rispetto ad y nell'insieme

$$B: 0 \leq x \leq l, \sigma(x) \leq y \leq \tau(x),$$

(*) Pervenuta in Redazione il 30 dicembre 1951.

⁽¹⁾ G. SCORZA DRAGONI e M. VOLPATO: *Un teorema di unicità per le soluzioni di una equazione alle derivate parziali del primo ordine* [questi «Rendiconti», questo volume, pagg. 446-461], n. 9.

⁽²⁾ Si badi bene, le $z'_x(x, \rho(x))$ e $z'_y(x, \rho(x))$, non le $z'_x(x, y)$, $z'_y(x, y)$.

dove $\sigma(x)$ e $\tau(x)$ son funzioni continue nell'intervallo

$$I: 0 \leq x \leq l,$$

soddisfacenti ivi nell'interno alla $\sigma(x) < \tau(x)$. La funzione $\rho(x)$ sia continua in I , vi soddisfaccia nell'interno alla $\sigma(x) < \rho(x) < \tau(x)$ e vi sia quasi ovunque derivabile (con derivata finita). E per quasi tutti gli x di I la funzione $z(x, y)$ ammetta derivate parziali (finite) nei punti della curva $y = \rho(x)$. Allora, posto $Z(x) = z(x, \rho(x))$, in quasi tutti i punti di I è anche

$$(1) \quad Z'(x) = z'_x(x, \rho(x)) + z'_y(x, \rho(x)) \rho'(x),$$

ammesso che $Z(x)$ sia derivabile in quasi tutti i punti di I .

Si consideri un intervallo $p \sqcup q$, con gli estremi interni ad I . Se c e d son numeri abbastanza piccoli in modulo, negativo il primo e positivo il secondo, tutti i punti (x, y) soddisfacenti alle $p \leq x \leq q$, $c \leq y - \rho(x) \leq d$ sono interni a B . E nel rettangolo $p \leq x \leq q$, $c \leq k \leq d$ si definisca la funzione $\gamma(x, k)$ in base alle seguenti posizioni: $\gamma(x_0, k)$ è identicamente nulla, se $z(x, y)$ non ammette derivata parziale rispetto ad y nel punto $(x_0, \rho(x_0))$; nel caso contrario, $\gamma(x_0, 0)$ è proprio questa derivata parziale e $\gamma(x_0, k)$ è, per k diverso da zero, il rapporto incrementale

$$\frac{z(x_0, \rho(x_0) + k) - z(x_0, \rho(x_0))}{k};$$

allora la funzione $\gamma(x, k)$ è misurabile rispetto alla x e continua rispetto a k . In virtù di un mio teorema⁽³⁾, la funzione $\gamma(x, k)$ è perciò quasi continua in modo semiregolare rispetto a k .

Sia allora δ una porzione chiusa di $p \sqcup q$, siffatta che, per ogni x' di δ la funzione $\rho(x)$ ammetta derivata (finita) in x' e

(3) G. SCORZA DRAGONI: *Un teorema sulle funzioni continue rispetto ad una e misurabili rispetto ad una altra variabile* [questi « Rendiconti », vol. XVII (1948), pagg. 102-106].

la funzione $z(x, y)$ ammetta derivate parziali prime (finite) in $(x', \rho(x'))$ e che la $\gamma(x, k)$ sia uniformemente continua, se considerata nell'insieme ottenuto al variare di x in δ e di k in $c^H d$.

E sia x_0 un punto di densità lineare 1 per δ ; al punto x_0 , in ultima analisi, sono consentite quasi tutte le posizioni in I .

Se $x_0 + h$ appartiene a δ ed h è abbastanza piccolo in modulo, di guisa che tale è anche

$$k = \rho(x_0 + h) - \rho(x_0),$$

risulta

$$\begin{aligned} Z(x_0 + h) - Z(x_0) &= z(x_0 + h, \rho(x_0) + k) - z(x_0, \rho(x_0)) = \\ &= z(x_0 + h, \rho(x_0) + k) - z(x_0 + h, \rho(x_0)) + \\ &\quad + z(x_0 + h, \rho(x_0)) - z(x_0, \rho(x_0)) = \\ (2) \quad &= \gamma(x_0 + h, -k)k + z(x_0 + h, \rho(x_0)) - z(x_0, \rho(x_0)) = \\ &= \gamma(x_0, 0)k + \alpha k + z(x_0 + h, \rho(x_0)) - z(x_0, \rho(x_0)) = \\ &= z'_y(x_0, \rho(x_0))k + z'_x(x_0, \rho(x_0))h + \alpha k + \beta h, \end{aligned}$$

dove α e β sono entrambi infinitesimi, se h tende a zero in guisa che $x_0 + h$ appartenga a δ , cioè se h tende a zero mantenendosi in un conveniente insieme di densità lineare 1 nell'origine. E da qui ovviamente la (1), per $x = x_0$; cioè la dimostrazione del teorema è completa ⁽⁴⁾.

2. - Il ragionamento svolto permette conclusioni più ampie. Esso prova che il rapporto incrementale $(Z(x_0 + h) - Z(x_0)) / h$

⁽⁴⁾ Il tipo di ragionamento non è nuovo. Si confronti per esempio R. CACCIOPOLI: *Sulla differenziabilità delle funzioni di più variabili* [«Rendiconto della Reale Accademia di Scienze fisiche e matematiche di Napoli», serie 3^a, vol. 34 (1928), pagg. 152-159], n. 1. E si veggia ora anche l'accenno contenuto in loc. cit. (1), nota ⁽⁹⁾ a pag. 452.

converge verso $z'_x(x_0, \rho(x_0)) + z'_y(x_0, \rho(x_0)) \cdot \rho'(x_0)$ se h tende a zero mantenendosi in un conveniente insieme di densità lineare 1 nell'origine, e prova questo a prescindere da ogni ipotesi circa la derivabilità o meno di $Z(x)$. In definitiva:

Se si interpreta la $Z'(x)$ che compare nella (1) come una derivata asintotica, non c'è più bisogno di alcuna ipotesi di derivabilità o meno di $Z(x)$ perchè, fermo il resto, la (1) sia valida quasi ovunque nell'intervallo I .

3. - E passiamo al seguente altro teorema:

La funzione $z(x, y)$ sia misurabile rispetto ad x e continua rispetto ad y nell'insieme B considerato nel teorema del n. 1. La sezione $s(a)$ di B con l'orizzontale $y = \sigma(a)$ nel punto $S(a) = (a, \sigma(a))$ abbia densità lineare positiva nel punto $S(a)$ per quasi tutti gli a dell'intervallo I , cioè dell'intervallo $0 \leq x \leq l$. La funzione $\sigma(x)$ abbia derivata (finita) in quasi tutti i punti di I . La funzione $z(x, y)$ ammetta derivate parziali prime (finite) nei punti della curva $y = \sigma(x)$ almeno per x quasi ovunque in I ⁽⁵⁾. Allora, posto $Z_1(x) = z(x, \sigma(x))$, di guisa che $Z_1(x)$ è misurabile in I , risulta per quasi tutti i punti di I

$$(3) \quad Z'_1(x) = z'_x(x, \sigma(x)) + z'_y(x, \sigma(x)) \cdot \sigma'(x),$$

ammesso che $Z_1(x)$ sia derivabile in quasi tutto I . Un teorema perfettamente analogo sussiste per la funzione $Z_2(x)$, se $Z_2(x) = z(x, \tau(x))$ ⁽⁶⁾.

La dimostrazione è simile a quella del n. 1. Dato l'intervallo $p \leq x \leq q$ cogli estremi interni ad I , si determini il numero positivo d in guisa che i punti (x, y) soddisfacenti alle $p \leq x \leq q$, $\sigma(x) \leq y \leq \sigma(x) + d$ appartengano tutti a B . E nel rettangolo $p \leq x \leq q$, $0 \leq k \leq d$ si definisca la funzione $\gamma(x, k)$ in guisa

(5) Naturalmente gli incrementi delle variabili non potranno in generale tendere a zero con legge arbitraria.

(6) In particolare la IX) del lavoro citato in (1) è una conseguenza delle III), IV), V), VI) ed VIII) dello stesso lavoro.

analoga a quella tenuta nel n. 1. Per quasi tutti gli x dell'intervallo $p^H q$ la funzione $\gamma(x, k)$ è quindi il rapporto incrementale destro

$$\frac{z(x, \sigma(x) + k) - z(x, \sigma(x))}{k} \quad (0 < k \leq d);$$

ecc.

Sia allora δ una porzione chiusa $p^H q$, siffatta che, per ogni x' di δ la funzione $\sigma(x)$ ammetta derivata (finita) in x' , la sezione $s(x')$ abbia densità lineare positiva nel punto $S(x')$, la funzione $z(x, y)$ ammetta derivate prime finite nel punto $S(x')$ e la funzione $Z_1(x)$ sia derivabile in x' . Si supponga inoltre che $\gamma(x, k)$ sia uniformemente continua se considerata definita nell'insieme ottenuto al variare di x in δ e di k in $0^H d$.

Sia x_0 un punto di δ di densità lineare 1 per δ ; al punto x_0 sono consentite quasi tutte le posizioni in I . Inoltre è possibile far tendere h a zero, mantenendolo in un conveniente insieme avente nell'origine densità positiva uguale a quella di $s(x_0)$ nel punto $S(x_0)$, in guisa che $x_0 + h$ appartenga ancora a δ e che il punto $(x_0 + h, \sigma(x_0))$ appartenga ad $s(x_0)$. Sussiste allora una formula di decomposizione analoga alla (2); e da questa si deduce la (3) in modo ovvio.

4. E passiamo finalmente all'ultimo teorema che intendiamo stabilire.

La funzione $z(x, y)$ sia misurabile rispetto ad x e continua rispetto ad y nell'insieme B considerato nel teorema del n. 1. Le sezioni $s(a)$ e $t(a)$ di B con le orizzontali $y = \sigma(a)$ ed $y = \tau(a)$ abbiano densità lineare positiva, rispettivamente, nei punti $S(a) = (a, \sigma(a))$ e $T(a) = (a, \tau(a))$ per quasi tutti gli a di I . Le funzioni $\sigma(x)$ e $\tau(x)$ ammettano derivata (finita) in quasi tutti i punti di I . Inoltre sia $\rho(x)$ una funzione continua in I , dotata di derivata finita in quasi tutti i punti di I , e tale che $z(x, y)$ ammetta derivate parziali prime (finite) nei punti della curva $y = \rho(x)$ per quasi tutti gli x di I (7).

(7) Cfr. nota (5).

Allora, se la funzione composta $z(x, \rho(x))$ è derivabile in quasi tutto I , la sua derivata è data dalla solita espressione $z'_x(x, \rho(x)) + z'_y(x, \rho(x)) \rho'(x)$ in quasi tutto I .

Decomponiamo l'intervallo I nella somma di quattro insiemi misurabili A, B, C e D nel modo che segue. Un punto x_0 di I appartiene ad A , se $\sigma(x_0) < \rho(x_0) < \tau(x_0)$; di guisa che A è somma di un numero finito o una infinità numerabile di intervalli. Un punto x_0 appartiene a B (a C), se x_0 appartiene all'insieme in cui la differenza $\rho(x) - \sigma(x)$ si annulla (la differenza $\rho(x) - \tau(x)$ si annulla) ed è anzi di densità lineare 1 per questo insieme. A D appartengono tutti i rimanenti punti di I ; di guisa che D è di misura nulla. Allora il teorema è vero per quasi tutti i punti di A , a norma di quanto si è dimostrato nel numero 1. E la proposizione segue per quasi tutti i punti di B , (di C), a norma di quanto si è dimostrato nel numero precedente, perchè nell'intorno di ciascuno di questi punti le funzioni $z(x, \rho(x))$ e $z(x, \sigma(x))$ (le funzioni $z(x, \rho(x))$ e $z(x, \tau(x))$) coincidono a prescindere da insiemi di densità lineare nulla in quei punti.