

RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

MARZIANO MARZIANI

Sulle forze ponderomotrici nei dielettrici anisotropi

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 20 (1951), p. 389-395

[<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1951__20__389_0>](http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1951__20__389_0)

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1951, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*
<http://www.numdam.org/>

SULLE FORZE PONDEROMOTRICI NEI DIELETTRICI ANISOTROPI

Nota (*) di MARZIANO MARZIANI (a Ferrara).

In un recente lavoro (1) ho calcolato le forze ponderomotrici agenti su un corpo dielettrico, rigido e isotropo, immerso in un campo elettrostatico, seguendo un procedimento che forse presenta qualche carattere di novità, poichè tien conto, tra l'altro, del brusco passaggio tra il dielettrico e il vuoto circostante.

In questa Nota ho esteso le precedenti considerazioni ai mezzi anisotropi e ho trovato, come era da attendersi, le stesse forze che si presentano per i mezzi isotropi più una coppia di momento $P \wedge \bar{E} dr$ (2) su ogni elemento di volume.

Ho inoltre dimostrato che l'azione complessiva è ancora equivalente dal punto di vista meccanico, come nel caso dei dielettrici isotropi alle forze agenti su una distribuzione di cariche volumetriche e superficiali con densità $\text{div } \bar{P}$ e $(\bar{P} \times \bar{n})$, risultato questo che non ho trovato esposto nella letteratura riguardante l'argomento in questione (3).

1. - Un corpo dielettrico, rigido e anisotropo, inizialmente scarico, viene immerso nel campo dovuto a conduttori elettriz-

(*) Pervenuta in Redazione l'11 settembre 1951.

(1) M. MARZIANI: « *Forze ponderomotrici nei dielettrici* » Annali dell'Università di Ferrara 1951.

(2) Le lettere soprasssegnate indicano vettori.

(3) Si vedano p. e. POCKELS in *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften*. Vol. V, Parte II, pagg. 350-392.

LIVENS « *The Theory of Electricity* », pag. 243. Cambridge University Press, 1918.

zati in equilibrio. Nell'espressione del vettore spostamento di MAXWELL $\bar{D} = \varepsilon \bar{E}$ al posto del coefficiente dielettrico scalare ε si ha, com'è noto, un'omografia vettoriale simmetrica (dilatazione), che nel seguito chiameremo omografia dielettrica.

Considerando le direzioni unite della dilatazione $\varepsilon(M)$, che supporremo siano distinte, verremo a collegare ad ogni punto M del dielettrico una terna di assi ortogonali M, x, y, z . Riferendo ad essa $\bar{D}(M)$, si ha

$$D_x = \varepsilon_1 E_x \quad D_y = \varepsilon_2 E_y \quad D_z = \varepsilon_3 E_z$$

dove gli scalari $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$, sono funzioni continue e differenziabili di M .

Immaginiamo ora uno spostamento finito del dielettrico in corrispondenza a una variazione del parametro lagrangiano p , mentre gli altri parametri che insieme a p individuano la posizione del corpo non variano, i conduttori che generano il campo restano fissi e le cariche distribuite sopra di essi costanti.

La corrispondente variazione subita dall'energia elettrostatica U è

$$\begin{aligned} (1) \quad \Delta U = & \\ = & \frac{1}{2} \int_{v_0} (\bar{D}' \times \bar{E}' - \bar{D} \times \bar{E}) dr_0 + \frac{1}{2} \int_{v_\infty} (\bar{D}' \times \bar{E}' - \bar{D} \times \bar{E}) dr_\infty + \\ & + \frac{1}{2} \int_{v_1} (\bar{D}' \times \bar{E}' - \bar{D} \times \bar{E}) dr_1 + \frac{1}{2} \int_{v_2} (\bar{D}' \times \bar{E}' - \bar{D} \times \bar{E}) dr_2 \end{aligned}$$

dove $\bar{E}, \bar{D}, \bar{E}', \bar{D}'$ indicano i valori iniziali e finali del campo e dello spostamento elettrico in un punto generico M , mentre gli altri simboli conservano il significato espresso nel lavoro citato in (1). (4)

(4) Cioè dette v e v' i volumi del dielettrico nella posizione iniziale e finale, v_0 è la loro parte comune v_1 e v_2 sono le regioni ottenute togliendo i punti di v_0 rispettivamente da v' e v . v_∞ è il rimanente spazio esterno a $v_0 + v_1 + v_2$.

Ricordando le ipotesi fatte e ragionando come a proposito del teorema del minimo di THOMSON ⁽⁵⁾, la relazione (1) diventa:

$$\begin{aligned}
 (2) \quad \Delta U &= \frac{1}{2} \int_{v_0} (\bar{E}' \times \bar{D} - \bar{E} \times \bar{D}') dr_0 + \\
 &+ \frac{1}{2} \int_{v_\infty} (\bar{E}' \times \bar{D} - \bar{E} \times \bar{D}') dr_\infty + \frac{1}{2} \int_{v_1} (\bar{E}' \times \bar{D} - \bar{E} \times \bar{D}') dr_1 + \\
 &+ \frac{1}{2} \int_{v_2} (\bar{E}' \times \bar{D} - \bar{E} \times \bar{D}') dr_2.
 \end{aligned}$$

Detta M, x', y', z' la terna di assi ortogonali orientata secondo le direzioni unite dell'omografia dielettrica a spostamento avvenuto si ha:

$$D'_{x'} = \epsilon'_1 E'_{x'}, \quad D'_{y'} = \epsilon'_2 E'_{y'}, \quad D'_{z'} = \epsilon'_3 E'_{z'}$$

e indicando con $E_{x'}, E_{y'}, E_{z'}$; $E'_{x'}, E'_{y'}, E'_{z'}$ le componenti di $\mathbf{E}$ e di $\mathbf{E}'$ rispettivamente lungo gli assi M, x', y', z' e M, x, y, z , avremo

$$\begin{aligned}
 \bar{E}' \times \bar{D} &= \epsilon_1 E_x E'_{x'} + \epsilon_2 E_y E'_{y'} + \epsilon_3 E_z E'_{z'} \\
 \bar{E} \times \bar{D}' &= \epsilon'_1 E'_{x'} E_{x'} + \epsilon'_2 E'_{y'} E_{y'} + \epsilon'_3 E'_{z'} E_{z'}.
 \end{aligned}$$

Sostituendo nel primo integrale di (2) si ottiene:

$$\begin{aligned}
 (3) \quad \Delta U &= \\
 &= \frac{1}{2} \int_{v_0} \left[(\epsilon_1 - \epsilon'_1) E_x E'_{x'} + (\epsilon_2 - \epsilon'_2) E_y E'_{y'} + (\epsilon_3 - \epsilon'_3) E_z E'_{z'} \right] dv_0 +
 \end{aligned}$$

⁽⁵⁾ D. GRAFFI: « *Teoria Matematica dell'elettromagnetismo* ». Editrice Patron, Bologna, 1949, vol. I, pag. 212.

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} \int_{r_0} \left[\varepsilon'_1 (E_x E'_x - E'_{x'} E_{x'}) + \varepsilon'_2 (E_y E'_y - E'_{y'} E_{y'}) + \right. \\
& + \left. \varepsilon'_3 (E_z E'_z - E'_{z'} E_{z'}) \right] dr_0 + \frac{1}{2} \int_{r_\infty} (\bar{E}' \times \bar{D} - \bar{E} \times \bar{D}') dr_\infty + \\
& + \frac{1}{2} \int_{r_1} (\bar{E}' \times \bar{D} - \bar{E} \times \bar{D}') dr_1 + \frac{1}{2} \int_{r_2} (\bar{E}' \times \bar{D} - \bar{E} \times \bar{D}') dr_2.
\end{aligned}$$

Considerando i vettori unitari $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ $(\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}')$ diretti secondo gli assi M, x, y, z e M, x', y', z' si ha

$$E_{x'} = E_x + \bar{E} \times (\vec{i}' - \vec{i})$$

$$E_{y'} = E_y + \bar{E} \times (\vec{j}' - \vec{j})$$

$$E_{z'} = E_z + \bar{E} \times (\vec{k}' - \vec{k})$$

e analogamente per le componenti di E' lungo gli assi M, x', y', z' .

In tal modo la funzione integranda del secondo integrale della (3) diventa:

$$\begin{aligned}
& - \frac{1}{2} \varepsilon'_1 \left[E'_{x'} \bar{E} \times (\vec{i}' - \vec{i}) + E_x \bar{E}' \times (\vec{i}' - \vec{i}) + \bar{E} \times (\vec{i}' - \vec{i}) \bar{E}' \times (\vec{i}' - \vec{i}) \right] - \\
& - \frac{1}{2} \varepsilon'_2 \left[E'_{y'} \bar{E} \times (\vec{j}' - \vec{j}) + E_y \bar{E}' \times (\vec{j}' - \vec{j}) + \bar{E} \times (\vec{j}' - \vec{j}) \bar{E}' \times (\vec{j}' - \vec{j}) \right] - \\
& - \frac{1}{2} \varepsilon'_3 \left[E'_{z'} \bar{E} \times (\vec{k}' - \vec{k}) + E_z \bar{E}' \times (\vec{k}' - \vec{k}) + \bar{E} \times (\vec{k}' - \vec{k}) \bar{E}' \times (\vec{k}' - \vec{k}) \right].
\end{aligned}$$

Se ora si considera come infinitesima la variazione del parametro p , a primo membro della (3) avremo la variazione infinitesima $\frac{\partial U}{\partial p} \delta p$ dell'energia, corrispondente alla variazione infinitesima δp ,¹ mentre a secondo membro, essendo ε_r ($r = 1, 2, 3$) differenziabili per ipotesi, le $(\varepsilon_r - \varepsilon'_r)$ tendono a $grad \varepsilon_r \times \delta M$.

Inoltre osserviamo che $M, \bar{i}', \bar{j}', \bar{k}'$ è la posizione finale della terna unitaria ortogonale collegata a quel punto del dielettrico rigido che inizialmente è in $M - \delta M$, quindi per δp infinitesimo, $(\bar{i}' - \bar{i})$ sarà il risultante delle due variazioni $\frac{d\bar{i}}{dM} \delta M$ e $\delta \bar{\omega} \wedge \bar{i}$, dove $\delta \bar{\omega}$ è la rotazione infinitesima subita dal corpo nello spostamento. In modo analogo per $(\bar{j}' - \bar{j})$ e $(\bar{k}' - \bar{k})$.

Trascurando infinitesimi d'ordine superiore a δp e tenendo presente che per gli integrali estesi a r_1 e r_2 valgono le stesse considerazioni esposte nel lavoro citato in (1), si può scrivere:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial p} \delta p = & \frac{1}{2} \int_v (E_x^2 \text{grad } \varepsilon_1 + E_y^2 \text{grad } \varepsilon_2 + E_z^2 \text{grad } \varepsilon_3) \times \delta M dv + \\ & + \int_v (\varepsilon_1 E_x \delta \bar{\omega} \wedge \bar{i} \times E + \varepsilon_2 E_y \delta \bar{\omega} \wedge \bar{j} \times E + \varepsilon_3 E_z \delta \bar{\omega} \wedge \bar{k} \times E) dr + \\ & + \int_v (\varepsilon_1 E_x \frac{d\bar{i}}{dM} \delta M + \varepsilon_2 \frac{d\bar{j}}{dM} \delta M + \varepsilon_3 \frac{d\bar{k}}{dM} \delta M) \times \bar{E} dr - \\ & - \frac{1}{2} \int_\sigma (\bar{P} \times E_0) \bar{n} \times \delta M d\sigma \end{aligned}$$

cioè con semplici passaggi ricordando che $\text{div } \frac{\partial M}{\partial p} = 0$ si ha:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial p} \delta p = & \frac{1}{2} \int_v \text{div} [(\bar{D} \times \bar{E}) \delta M] dr - \frac{1}{2} \int_v \left[\varepsilon_1 \text{grad} (\bar{E} \times \bar{i})^2 + \right. \\ & + \varepsilon_2 \text{grad} (\bar{E} \times \bar{j})^2 + \varepsilon_3 \text{grad} (\bar{E} \times \bar{k})^2 \left. \right] \times \delta M dr + \\ & + \int_v \bar{P} \wedge \delta \bar{\omega} \times \bar{E} dr + \int_v \left[\varepsilon_1 E_x K \frac{d\bar{i}}{dM} \bar{E} + \varepsilon_2 E_y K \frac{d\bar{j}}{dM} \bar{E} + \right. \\ & + \left. \varepsilon_3 E_z K \frac{d\bar{k}}{dM} \bar{E} \right] \times \delta M dr - \frac{1}{2} \int_\sigma (\bar{P} \times E_0) \bar{n} \times \delta M d\sigma \end{aligned}$$

da cui segue

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial p} \delta p &= \frac{1}{2} \int_{\sigma} \bar{D} \times \bar{E} \bar{n} \times \delta M d\sigma - \int \frac{d\bar{E}}{dM} \bar{D} \times \delta M dr + \\ &+ \int \bar{P} \wedge \delta \bar{\omega} \times \bar{E} dr - \frac{1}{2} \int_{\sigma} (\bar{P} \times \bar{E}_0) \bar{n} \times \delta M d\sigma. \end{aligned}$$

A questo punto basta osservare che essendo

$$\bar{D} = \varepsilon_0 \bar{E} + \bar{P}$$

si ha :

$$\frac{d\bar{E}}{dM} \bar{D} \times \delta M = \frac{d\bar{E}}{dM} \bar{P} \times \delta M + \frac{1}{2} \operatorname{div} \varepsilon_0 \bar{E}^2 \delta M$$

e quindi

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial p} \delta p &= - \int \frac{d\bar{E}}{dM} \bar{P} \times \frac{\partial M}{\partial p} \delta p dr + \\ &+ \frac{1}{2} \int_{\sigma} \bar{P} \times (\bar{E}_1 - \bar{E}_0) \bar{n} \times \frac{\partial M}{\partial p} \delta p d\sigma + \int \bar{P} \wedge \delta \bar{\omega} \times \bar{E} dr. \end{aligned}$$

Per la forza generalizzata di LAGRANGE $\mathcal{Q} = - \frac{\partial U}{\partial p}$ corrispondente al parametro p si ha perciò l'espressione :

$$\begin{aligned} \mathcal{Q} &= \int \frac{d\bar{E}}{dM} \bar{P} \times \frac{\partial M}{\partial p} dr + \int \bar{P} \wedge \bar{E} \times \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial p} dr + \\ &+ \frac{1}{2} \int_{\sigma} \bar{P} \times (\bar{E}_0 - \bar{E}_1) \bar{n} \times \frac{\partial M}{\partial p} d\sigma \end{aligned}$$

la quale prova appunto quanto si è accennato all'inizio.

2. - Siccome può sempre scriversi

$$\frac{\partial M}{\partial p} = \frac{\partial O}{\partial p} + \frac{\partial \omega}{\partial p} \wedge (M - O)$$

dove $\frac{\partial O}{\partial p}$ e $\frac{\partial \omega}{\partial p}$ non dipendono da M si ha

$$\frac{d}{dM} \left(\frac{\partial M}{\partial p} \right) = \frac{\partial \omega}{\partial p} \wedge$$

e quindi

$$\begin{aligned} \mathcal{P} = & \int_V \left[\frac{d\bar{E}}{dM} \bar{P} \times \frac{\partial M}{\partial p} + K \frac{d}{dM} \left(\frac{\partial M}{\partial p} \right) \bar{E} \times \bar{P} \right] dr + \\ & + \frac{1}{2} \int_{\sigma} \bar{P} \times (\bar{E}_0 - \bar{E}_1) \bar{n} \times \frac{\partial M}{\partial p} d\sigma = \int_V \left[grad \left(E \times \frac{\partial M}{\partial p} \right) \right] \times \bar{P} dr + \\ & + \frac{1}{2} \int_{\sigma} \bar{P} \times (\bar{E}_0 - \bar{E}_1) \bar{n} \times \frac{\partial M}{\partial p} d\sigma = \int_V (\bar{P} \times \bar{n}) \bar{E} \times \frac{\partial M}{\partial p} dr - \\ & - \int_V \bar{E} \times \frac{\partial M}{\partial p} (div \bar{P}) dr + \frac{1}{2} \int_{\sigma} \bar{P} \times (\bar{E}_0 - \bar{E}_1) \bar{n} \times \frac{\partial M}{\partial p} d\sigma \end{aligned}$$

da cui segue, ricordando che il campo E_{σ} calcolato proprio sulla superficie σ del dielettrico vale $\frac{E_0 + \bar{E}_1}{2}$

$$\mathcal{P} = - \int_V \bar{E} \times \frac{\partial M}{\partial p} (div \bar{P}) dr + \int_{\sigma} (\bar{P} \times \bar{n}) \bar{E}_{\sigma} \times \frac{\partial M}{\partial p} d\sigma$$

la quale mostra che l'azione complessiva è equivalente, come nel caso dei dielettrici isotropi, alle forze su cariche volumetriche e superficiali di densità $- div \bar{P}$ e $(\bar{P} \times \bar{n})$.