

RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

GIOVANNI ZACHER

**Determinazione dei gruppi finiti strutturalmente
omomorfi ad un p -gruppo hamiltoniano finito**

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 20 (1951), p. 357-364

http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1951__20__357_0

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1951, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

DETERMINAZIONE DEI GRUPPI FINITI STRUT- TURALMENTE OMOMORFI AD UN P-GRUPPO HAMILTONIANO FINITO

Nota () di GIOVANNI ZACHER (a Padova).*

Lo scopo precipuo propostomi in questa nota era di assegnare una condizione necessaria e sufficiente perchè un gruppo finito G si possa porre in omomorfismo strutturale con un p -gruppo hamiltoniano finito G' . Nella risoluzione di tale problema trovai opportuno di caratterizzare i gruppi finiti che sono strutturalmente omomorfi ad un gruppo abeliano d'ordine 2^k e tipo $(2, 1, 1 \dots 1)$.

1. — In questo numero richiamiamo alcune proprietà fondamentali sui p -gruppi hamiltoniani finiti, utili per il nostro problema.

Indichiamo con G' un p -gruppo hamiltoniano finito. Il suo ordine dovrà allora essere un numero pari in quanto G' deve contenere un gruppo isomorfo al gruppo dei quaternioni ⁽¹⁾. Anzi per G' sussiste una rappresentazione del tipo $G' = H' \times Q'(1)$ con Q' isomorfo al gruppo dei quaternioni ed H' un gruppo ad elementi tutti bilateri. Il gruppo Q' contiene 3 elementi a'_1, a'_2, a'_3 del periodo 4 soddisfacenti alle relazioni $\{a'_i, a'_j\} = Q', a'^2_1 = a'^2_2 = a'^2_3, a'_3 = a'_1 a'_2$ ed $\{a'^2_i\}$ costituisce il centro C' di Q' .

Mi sono accorto a lavoro compiuto che lo stesso risultato fu già trovato per altra via da M. SUZUKI: *On the homomorphisms of finite groups*, in Tr. of the A. Math. Soc., march, (1951).

(*) Pervenuta in Redazione il 15 luglio 1951.

(1) G. SCORZA: *Gruppi Astratti*, pag. 87.

Consideriamo ora i 3 gruppi $\{a'_1\} \times H'$, $\{a'_2\} \times H'$, $\{a'_3\} \times H'$. Tenuto conto che un generico elemento g di G' per la (1) ha la forma $g' = h' q'$ con q' in Q' ed h' in H' e che ogni elemento di Q' appartiene ad almeno uno dei 3 gruppi ciclici $\{a'_1\}$, $\{a'_2\}$, $\{a'_3\}$ concludiamo colla relazione $G' = \{a'_1\} \times H' + \{a'_2\} \times H' + \{a'_3\} \times H' \quad (2)$.

Questi tre gruppi sono d'ordine 2 in G' e contengono tutti e 3 per la (2) il sottogruppo proprio $C' \times H'$ per cui, posto per semplicità $I'_i = \{a'_i\} \times H'$, risulta $I'_i \cap I'_j = C' \times H'$, ed il gruppo I'_i è abeliano d'ordine 2^{s-1} e tipo $(2, 1 \dots 1)$ mentre $C' \times H'$ è d'ordine 2^{s-2} e tipo $(1, 1 \dots 1)$.

Supporremo in questo studio che l'ordine di H' sia maggiore di uno, in quanto altrimenti si cadrebbe nel caso, da me già studiato ⁽²⁾, che G' coincidesse con un gruppo isomorfo al gruppo dei quaternioni.

2. - Indichiamo con G un gruppo finito strutturalmente omomorfo al gruppo G' e indichiamo con g un generico elemento di G . Consideriamo quindi il gruppo ciclico $\{g\}$ generato dall'elemento g e sia $f(\{g\})$ il gruppo di G che corrisponde a G' in un omomorfismo strutturale fissato tra G e G' .

LEMMA: Il gruppo $f(\{g\})$ è un sottogruppo ciclico di G' .

Invero il gruppo $f(\{g\})$ non può contenere nè un gruppo isomorfo al gruppo dei quaternioni nè un gruppo quadrimonio in quanto ciò implicherebbe che un sottogruppo del gruppo ciclico $\{g\}$ fosse strutturalmente omomorfo ad uno dei gruppi citati, il che è assurdo ⁽²⁾. D'altra parte dalla relazione $G' = Q' \times H'$ si ricava che ogni sottogruppo d'ordine 8 di G' è o isomorfo al gruppo dei quaternioni oppure contiene un gruppo quadrimonio.

Quindi $f(\{g\})$ dovrà essere un gruppo d'ordine al massimo quattro, nè quadrimonio e quindi ciclico.

(-) G. ZACHER: *Determinazione dei gruppi finiti strutturalmente omomorfi ad un gruppo d'ordine 8 non ciclico*, Rend. Sem. Mat. di Padova, pp. 315-328 (1951).

Indichiamo con g' un elemento generatore di $f(\langle g \rangle)$. In virtù della relazione (2) dimostrato al n. 1, l'elemento g' sarà contenuto necessariamente in uno almeno dei 3 gruppi I'_1, I'_2, I'_3 e quindi pure il gruppo ciclico $f(\langle g \rangle) = \langle g' \rangle$.

Ne segue che il gruppo $\langle g \rangle$ e quindi g stesso sta almeno in uno dei 3 gruppi $I_1 = f^{-1}(I'_1)$, $I_2 = f^{-1}(I'_2)$, $I_3 = f^{-1}(I'_3)$, dove $f^{-1}(A')$ indica il gruppo unione di tutti i sottogruppi di G che l'omomorfismo fissato tra G e G' trasforma in A' .

Tenendo conto della genericità dell'elemento g scelto in G , concludiamo col teorema:

Se G è un gruppo finito strutturalmente omomorfo ad un p -gruppo hamiltoniano G' , il gruppo G è somma di 3 suoi sottogruppi propri distinti:

$$(3) \quad G = I_1 + I_2 + I_3.$$

3 - Convieni a questo punto, per continuità di esposizione, anticipare un teorema che verrà dimostrato al n. 4.

TEOREMA: Se $\bar{G}$ è un gruppo finito strutturalmente omomorfo ad un gruppo $\bar{G}'$ d'ordine 2^r , abeliano e di tipo $(2, 1 \dots 1)$ si ha:

$$\bar{G} = \bar{R} \times \bar{S}$$

con $\bar{R}$ gruppo d'ordine dispari ed $\bar{S}$ isomorfo a $\bar{G}'$. Inoltre $\varphi^{-1}(\bar{U}') = \bar{R}$ (4) e il gruppo $\varphi_{-1}(\bar{G}')$ intersezione di tutti i sottogruppi di $\bar{G}$ che l'omomorfismo strutturale unita in $\bar{G}'$ coincide con $\bar{S}$, $\bar{S} = \varphi_{-1}(\bar{G}')$. (4) *bis*.

Sfruttando questo teorema, la relazione (3) ci permette di scrivere:

$$(5) \quad G = R_1 \times S_1 + R_2 \times S_2 + R_3 \times S_3$$

dove il gruppo S_i è isomorfo al gruppo I'_i , mentre R_i è un gruppo d'ordine dispari ed $f(R_i) = U'$.

TEOREMA: I 3 gruppi R_1, R_2, R_3 coincidono.

Il gruppo $f^{-1}(U')$ è contenuto nel gruppo $I_i = f^{-1}(I'_i)$ e pertanto coincide col sottogruppo unione di tutti i sottogruppi I_i che l'omomorfismo strutturale muta in U' , vale a dire per la (4) $R = f^{-1}(U') = R_i$.

Da qui e per la (5) concludiamo colla relazione $G = R \times S_1 + R \times S_2 + R \times S_3 = R \cup (S_1 \cup S_2 \cup S_3)$ (6).

Se indichiamo con r l'ordine del gruppo R , per la $I_i = R \times S_i$ con S_i isomorfo con I'_i , l'ordine di I_i è $2^{s-1}r$, mentre l'ordine g di G pel teorema di SCORZA vale $g = 2 \cdot 2^{s-1}r = 2^s r$ (7).

Se ora S indica un sottogruppo di SYLOW d'ordine pari di G , l'ordine di S per la (7) dovrà essere 2^s essendo r un numero dispari e quindi il gruppo $S \cup R$ coinciderà per la (7) con G .

D'altra parte abbiamo visto che $R = f^{-1}(U')$ e otteniamo quindi $G' = f(G) = f(R \cup S) = f(R) \cup f(S) = U' \cup f(S) = f(S)$.

Ma allora, in virtù della (4) bis, il gruppo S d'ordine 2^s contiene i 3 gruppi distinti S_1, S_2, S_3 d'ordine 2^{s-1} e quindi $S = S_i \cup S_j$.

Se teniamo presente che $S \cap R = U$ e che ogni elemento di S_i e quindi anche di $S = S_i \cup S_j$ è permutabile con ogni elemento di R , concludiamo che $G = R \times S$.

Cerchiamo adesso di precisare la natura del gruppo S .

Abbiamo visto al n. 1 che sussistono le relazioni:

$$G' = H' \times Q' = \{a'_1\} \times H' + \{a'_2\} \times H' + \{a'_3\} \times H'$$

con

$$\{a'_j, a'_i\} = Q'.$$

Poichè $f(S) = G' = H' \times Q'$, il gruppo S contiene il gruppo $Q = f_{-1}(Q')$ e questo gruppo è isomorfo al gruppo dei quaternioni ⁽²⁾.

Il gruppo Q contiene i 3 gruppi $f_{-1}(\{a'_i\})$ $i = 1, 2, 3$ che saranno per la natura di Q tutti e 3 ciclici d'ordine 4 per cui avremo $Q = \{a_i, a_j\}$ dove a_k indica un elemento generatore del gruppo $f_{-1}(\{a'_k\})$ ($k = 1, 2, 3$); inoltre, poichè $\{a'_i\}$ appartiene ad $f(S_i) = I'_i$ sussisterà pure la relazione $S_i > f_{-1}(\{a'_i\})$.

Il gruppo $H = f_{-1}(H')$ è contenuto nei 3 gruppi S_1, S_2, S_3 essendolo H' in I'_1, I'_2, I'_3 .

TEOREMA: Il gruppo $\langle a_i \rangle \cup H$ coincide col gruppo S_i .

Invero, poichè $\langle a_i \rangle < S_i, H < S_i$, sarà $\langle a_i \rangle \cup H \leq S_i$. Viceversa $f(\langle a_i \rangle \cup H) = \langle a'_i \rangle \times H' = I'_i$ e quindi $\langle a_i \rangle \cup H \geq f_{-1}(I'_i) = S_i$. Pertanto $\langle a_i \rangle \cup H = S_i$.

Ricordando che S_i è abeliano e poichè $\langle a_i \rangle \cap H = U$ avendosi $f(\langle a_i \rangle \wedge H) = \langle a'_i \rangle \wedge H' = U'$ ed $S_i \cong I'_i$, concludiamo che $S_i = \langle a_i \rangle \times H$.

L'ordine di H coincide allora coll'ordine di H' e quindi H è un gruppo isomorfo³ ad H' .

Risulta così provato il sussistere delle 3 uguaglianze

$$S_1 = \langle a_1 \rangle \times H, S_2 = \langle a_2 \rangle \times H, S_3 = \langle a_3 \rangle \times H.$$

Da queste si trae che il gruppo $Q = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ è permutabile elemento per elemento con H e poichè $S_i \cup S_j = S$ si conclude che

$$S = Q \times H$$

ossia S è un p -gruppo hamiltoniano dello stesso ordine di G' , per cui S è isomorfo a G' .

Riassumendo abbiamo dunque:

Condizione necessaria perchè un gruppo finito G sia strutturalmente omomorfo ad un p -gruppo hamiltoniano G' è che sia:

$$G = R \times S$$

con R gruppo ordine dispari ed S isomorfo a G' .

(3) *Determinazione dei gruppi finiti strutturalmente omomorfi ad un gruppo abeliano d'ordine 2^2 e tipo $(1, 1 \dots 1)$* , di G. ZACHER, Rend. Sem. Mat. di Padova, pp. 346-356 (1951).

La sufficienza della condizione enunciata si deduce poi immediatamente da un teorema dello ZAPPA ⁽⁴⁾.

4. - Come già si è detto al n. 2, dimostreremo qui il seguente teorema:

Condizione necessaria e sufficiente perchè un gruppo finito G sia strutturalmente omomorfo ad un p -gruppo abeliano G' d'ordine 2^s e tipo $(2, 1 \dots 1)$ è che sia:

$$G = R \times S$$

con R gruppo d'ordine dispari ed S isomorfo a G' .

Il gruppo G' si può rappresentare come prodotto diretto di 2 gruppi, A' ed H' , dei quali uno ciclico d'ordine 4 e l'altro ad elementi tutti bilateri, $G' = \{a'\} \times H'$. Supporremo che l'ordine di G' sia 2^s con $s \geq 4$, giacchè il caso di $s = 3$ è già stato risolto ⁽²⁾. L'ordine di H' sarà allora maggiore ed uguale a 4 e potremo quindi H' scomporre nel prodotto di 2 gruppi $H' = H'_1 \times H'_2$ con H'_1 gruppo quadrimomio. Avremo allora:

$$\frac{G'}{\{a'\} \times H'_2} = \frac{\{a'\} \times H'_1 \times H'_2}{\{a'\} \times H'_2} \simeq \frac{H'_1}{\{a'\} \times H'_2 \wedge H'_1} = \frac{H'_1}{U'}.$$

Da qui deduciamo che il gruppo fattoriale $\frac{G'}{\{a'_1\} \times H'_2}$ è un gruppo quadrimomio e quindi pel teorema di SCORZA, G' è somma di 3 gruppi d'indice 2, I'_1, I'_2, I'_3 i cui elementi sono

$$\begin{aligned} & |\{a'\} \times H'_2| + h'_1 |\{a'\} \times H'_2| \\ & |\{a'\} \times H'_2| + h'_2 |\{a'\} \times H'_2| \\ & |\{a'\} \times H'_2| + h'_3 |\{a'\} \times H'_2| \end{aligned}$$

con h'_1, h'_2, h'_3 i 3 elementi non identici di H'_1 .

(4) G. ZAPPA: *Sulla condizione perchè un omomorfismo ordinario sia anche un omomorfismo strutturale*, Giornale di Mat. di Battaglini vol. 78, pp. 182-192.

Poichè, per un teorema generale sui p -gruppi alchiani, il gruppo G' non contiene che sottogruppi dello stesso tipo e gruppi di tipo $(1, 1 \dots 1)$ e poichè I'_i contiene un gruppo ciclico d'ordine 4 $\{a'\}$, concludiamo che i 3 gruppi I'_1, I'_2, I'_3 sono abeliani d'ordine 2^{s-1} e tipo $(2, 1 \dots 1)$.

$$(8) \quad G' = I'_1 + I'_2 + I'_3, I'_i \wedge I'_j = \{a'\} \times H'_2.$$

Essendo il teorema enunciato all'inizio di questo numero vero nel caso di $s = 3$, applicando un procedimento d'induzione potremo supporre che se G è un gruppo strutturalmente omo-morfo a G' , si abbia che il gruppo $I_i = f^{-1}(I'_i)$ sia del tipo $I_i = R_i \times S_i$ con R_i d'ordine dispari ed S_i isomorfo a I'_i . Che i 3 gruppi R_1, R_2, R_3 coincidano si vede poi facilmente in quanto sono sottogruppi normali di $f^{-1}(U')$ d'indice primo cogli ordini r_1, r_2, r_3 di essi.

È immediato pure il fatto che $G = I_1 + I_2 + I_3$ (8) *bis* con $I_i = R \times S_i$ se si tiene presente che il gruppo $f(\{g\})$ è necessariamente per la natura di G' un gruppo ciclico. Dalla (8) *bis* si trae che $f^{-1}(U') = R$.

Se indichiamo con L'_i un generico sottogruppo d'indice 2 in G' , per una proprietà poco prima ricordata, esso è abeliano di tipo $(1, 1 \dots 1)$ oppure di tipo $(2, 1 \dots 1)$ e quindi sottogruppi di SYLOW d'ordine pari di $I_i = f^{-1}(L'_i)$ saranno (*) d'ordine 2^{s-1} .

Se allora S è un sottogruppo di SYLOW d'ordine pari di G , S non sarà contenuto in I'_i e quindi $f(S) = G'$ ossia $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$.

Poichè $f^{-1}(U') = R$ e per la (8) *bis* abbiamo addirittura $S = S_1 + S_2 + S_3$.

Abbiamo visto che i 3 gruppi I'_1, I'_2, I'_3 contengono tutti il gruppo d'ordine 4 $\{a'\}$ e poichè $S_i = f^{-1}(I'_i)$ ed S_i è isomorfo a I'_i ($i = 1, 2, 3$) il gruppo S_i conterrà il gruppo $\{a'\} = f^{-1}(\{a'\})$ che sarà pure ciclico d'ordine 4.

Preso il gruppo S_1 avremo $S_1 = \{a'\} \times N$ con N gruppo ad elementi tutti bilateri.

Sia poi s_2 un elemento bilatero di S_2 non contenuto in S_1 . Detto poi s_1 un elemento bilatero di S_1 non identico, al gruppo

$\{s_1\} \cup \{s_2\}$ corrisponde in G' un gruppo quadrimio, quindi $\{s_1\} \cup \{s_2\}$ dev'essere quadrimio o isomorfo al gruppo dei quaternioni.

Ora la seconda alternativa è da escludersi in quanto un gruppo isomorfo al gruppo dei quaternioni non è generabile mediante 2 elementi d'ordine 2.

Nel primo caso si conclude che s_1 è permutabile con s_2 ed essendo s_1 un generico elemento d'ordine 2 di S_1 , s_2 è permutabile con ogni elemento di S_1 .

Ma allora $S = \langle a \rangle \times H$ con H gruppo ad elementi tutti bilateri e quindi S isomorfo a G' .

Tenendo presente un teorema dello ZAPPA⁽⁴⁾ abbiamo: *Condizione necessaria e sufficiente perchè un gruppo finito G sia strutturalmente omomorfo ad un gruppo abeliano G' d'ordine 2^s ($s \geq 3$) e tipo $(2, 1 \dots 1)$ è che sia $G = R \times S$ con R gruppo d'ordine dispari ed S isomorfo a G' .*