

# RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

GIUSEPPE GRIOLI

**Sulle deformazioni elastiche di un involucro  
omogeneo soggetto a pressione o trazione**

*Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova*,  
tome 20 (1951), p. 278-285

[<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP\\_1951\\_\\_20\\_\\_278\\_0>](http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1951__20__278_0)

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1951, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

# SULLE DEFORMAZIONI ELASTICHE DI UN INVOLUCRO OMOGENEO SOGGETTO A PRESSIONE O TRAZIONE

*Nota (\*) di GIUSEPPE GRIOLI (a Padova).*

Mostrerò come mediante l'applicazione di proprietà di media possano ottenersi in forma semplice ed elegante indicazioni sulle deformazioni di un corpo elastico omogeneo avente una cavità e soggetto a pressioni o trazioni uniformi sui suoi due contorni.

Sotto la sola ipotesi che l'energia potenziale elastica sia espressa da una forma quadratica a coefficienti costanti nelle caratteristiche di tensione – qualunque sia la natura del materiale, anche anisotropo – si possono stabilire delle limitazioni per le variazioni dei volumi racchiusi dai due contorni del corpo <sup>(1)</sup>.

Da esse risulta tra l'altro che se le sollecitazioni agenti sui due contorni che delimitano il corpo soddisfano a certe condizioni si può decidere se i volumi da essi racchiusi si contraggono o si dilatano indipendentemente dalla natura del materiale di cui è costituito il corpo.

Nel caso di un corpo con più cavità può stabilirsi un'analoga limitazione per la variazione del volume racchiuso da uno dei contorni che lo delimitano purchè le sollecitazioni agenti sugli altri abbiano tutte uguali intensità [o in particolare siano nulle].

(\*) Pervenuta in Redazione il 6 marzo 1951.

(1) Limitazioni analoghe possono stabilirsi anche per i coefficienti di dilatazione lineare.

**1. - Coordinate astatiche ed iperastatiche della sollecitazione esterna.** - Indico con  $\sigma_e, \sigma_i$  i contorni esterno ed interno di un corpo,  $C$ , avente una cavità e con  $p_e, p_i$  le pressioni o trazioni costanti agenti su  $\sigma_e, \sigma_i$ , con la convenzione di ritenere positive  $p_e, p_i$  se trattasi di pressioni, negative nel caso opposto.

Siano inoltre:  $V_e, V_i$  i volumi racchiusi da  $\sigma_e, \sigma_i$ ;  $T_G \equiv (G, x_1, x_2, x_3)$  la terna centrale d'inerzia del volume occupato dal corpo;  $x'_r, x''_r$  le coordinate rispetto a  $T_G$  dei baricentri di  $V_e, V_i$ ;  $n'_i, n''_i$  i coseni direttori rispetto a  $T_G$  delle normali a  $\sigma_e, \sigma_i$  rivolte verso l'interno di  $C$ .

Indicando con  $C$  anche il volume del corpo, le coordinate astatiche ed iperastatiche della sollecitazione esterna sono espresse da

$$(1) \quad \begin{cases} a_{rs} = -\frac{1}{C} \left\{ p_e \int_{\sigma_e} x_r n'_i d\sigma_e + p_i \int_{\sigma_i} x_r n''_i d\sigma_i \right\}, \\ b_{rst} = -\frac{1}{C} \left\{ p_e \int_{\sigma_e} x_r x_s n'_i d\sigma_e + p_i \int_{\sigma_i} x_r x_s n''_i d\sigma_i \right\}, \end{cases} \quad (r, s, t = 1, 2, 3).$$

Da (1) segue subito

$$(2) \quad a_{rs} = \begin{cases} \frac{1}{C} (V_e p_e - V_i p_i), & \text{se } r = s = 1, 2, 3, \\ 0, & \text{se } r \neq s, \end{cases}$$

$$(3) \quad b_{rst} = \begin{cases} \frac{2}{C} [V_e x'_r p_e - V_i x''_r p_i], & \text{se } r = s = t, \\ -\frac{1}{C} [V_e x'_r p_r - V_i x''_r p_i], & \text{se } r \neq s = t, \\ 0, & \text{se } r \text{ ed } s \neq t. \end{cases}$$

Posto

$$(4) \quad c_{rst} = \frac{1}{2} (b_{rts} + b_{str} - b_{rst}), \quad (r, s, t = 1, 2, 3)$$

e tenuto conto della relazione

$$(5) \quad V_e x'_e - V_i x''_i = 0, \quad (r = 1, 2, 3),$$

da (3) si deduce

$$(6) \quad c_{rst} = \begin{cases} \frac{V_e}{C} x'_e (p_e - p_i) = \frac{V_i}{C} x''_i (p_e - p_i), & \text{se } r = s, \\ 0, & \text{se } r \neq s. \end{cases}$$

**2. - Adattamento di una disuguaglianza di Schwarz al caso dell'involucro.** - Dette  $X_{rs}$  le caratteristiche di tensione, si ponga

$$(7) \quad \begin{cases} a_r = a_{rr}, & a_{r+3} = a_{r+1 \ r+2}, \\ c_{rt} = c_{r,t}, & c_{r+3t} = c_{r+1 \ r+2t}, \end{cases} \quad (r, t = 1, 2, 3),$$

$$(8) \quad X_r = X_{rr}, \quad X_{r+3} = X_{r+1 \ r+2}, \quad (r = 1, 2, 3),$$

$$(9) \quad \rho_i^2 = \frac{1}{C} \int_C x_i^2 dC \quad (i = 1, 2, 3),$$

Se le costanti  $m_{rs}$ , ( $r, s = 1, 2, \dots, 6$ ), denotano i coefficienti di una qualunque forma quadratica in sei variabili definita o almeno semidefinita, si ha, com'è noto, <sup>(2)</sup>

$$(10) \quad \sum_{r,s=1}^6 \int_C m_{rs} X_r X_s dC \geq C \sum_{r,s=1}^6 m_{rs} \left\{ a_r a_s + \sum_{t=1}^3 \frac{c_{rt} c_{st}}{\rho_t^2} \right\}.$$

La (10), tenuto conto di (2), (6), (7), diviene

$$(11) \quad \sum_{r,s=1}^6 \int_C m_{rs} X_r X_s dC \geq \frac{1}{C} \sum_{r,s=1}^3 m_{rs} \left\{ (p_e V_e - p_i V_i)^2 + \right. \\ \left. + V_e^2 (p_e - p_i)^2 \sum_{t=1}^3 \frac{x'_r x'_s}{\rho_t^2} \right\}.$$

<sup>(2)</sup> A. SIGNORINI: *Sopra alcune questioni di Statica dei sistemi continui*, Annali della Scuola normale superiore di Pisa. Serie II, vol. II, 1933.

Se gli  $m_{rs}$  sono coefficienti di una forma quadratica definita positiva nella (11) vale il segno di eguaglianza allora e soltanto allora che le  $X_r$  sono funzioni lineari delle coordinate <sup>(3)</sup>.

Non sarebbe però difficile riconoscere che non possono aversi soluzioni lineari per le  $X_r$ .

Si conclude che se gli  $m_{rs}$  sono coefficienti di una forma quadratica definita positiva nella (11) vale il segno di eguaglianza allora e soltanto allora che sia  $p_e = p_i = p$  nel qual caso, com'è noto, risulta  $X_1 = X_2 = X_3 = p$  e  $X_4 = X_5 = X_6 = 0$ .

Dalla (11), ponendo uguali a zero tutti gli  $m_{rs}$  tranne uno dei tre  $m_{rr}$ , ( $r = 1, 2, 3$ ) si deduce, in modo evidente, una limitazione inferiore per il massimo del modulo di  $X_r$ , ( $r = 1, 2, 3$ ).

In particolare, se  $p_i = 0$ , si ottiene

$$(12) \quad |X_r|_{max} \geq \frac{V_e |p_e|}{C} \sqrt{1 + x_r^2 \sum_{i=1}^3 \frac{1}{\rho_i^2}} =$$

$$= |p_e| \left(1 + \frac{V_e}{C}\right) \sqrt{1 + x_r^2 \sum_{i=1}^3 \frac{1}{\rho_i^2}}, \quad (r = 1, 2, 3),$$

ove vale il segno di eguaglianza quando e soltanto quando è  $V_e = 0$  [il che implica  $x_r = 0$ , ( $r = 1, 2, 3$ )].

Si riconosce così che la presenza di una cavità provoca nel corpo uno stato tensionale con un massimo di  $|X_r|$ , ( $r = 1, 2, 3$ ), superiore al valore  $|p_e|$  che a  $|X_r|$  compete in assenza di cavità.

**3. - Limitazioni per le variazioni dei volumi racchiusi dai due contorni che delimitano  $C$ .** - Supposto  $C$  omogeneo si identifichino gli  $m_{rs}$  con i coefficienti,  $m_{rs}^*$ , della forma quadratica nelle  $X_r$  che esprime il doppio dell'energia potenziale elastica.

Il primo membro di (11) risulta allora, per il teorema di CLAPEYRON, uguale al lavoro della sollecitazione esterna.

(3) V. loco cit. in (2).

Posto

$$(13) \quad A = \sum_{r,s=1}^3 m_{rs}^* > 0, \quad B = \sum_{i=1}^3 \frac{1}{\rho_i^2} \sum_{r,s=1}^3 m_{rs}^* x'_r x'_s \geq 0,$$

e dette  $\Delta V_e, \Delta V_i$  le variazioni dei volumi  $V_e, V_i$ , da (11) segue, pertanto,

$$(14) \quad -p_e \Delta V_e + p_i \Delta V_i > \frac{1}{C} \left\{ A (p_e V_e - p_i V_i)^2 + B V_e^2 (p_e - p_i)^2 \right\},$$

ove si è escluso il segno di eguaglianza corrispondente al caso banale  $p_e = p_i$ .

Dette  $\varepsilon_{rs}$  le caratteristiche di deformazione e posto

$$(15) \quad \varepsilon_r = \varepsilon_{rr}, \quad \varepsilon_{r+3} = \varepsilon_{r+1 \ r+2}, \quad (r = 1, 2, 3).$$

la legge di Hooke implica

$$(16) \quad \varepsilon_r = - \sum_{s=1}^6 m_{rs}^* X_s.$$

Da (16) si deduce che la variazione di volume dell'involucro è espresso da

$$(17) \quad \Delta V_e - \Delta V_i = - \sum_{r=1}^3 \sum_{s=1}^6 m_{rs}^* \int_C X_s dC.$$

Poichè i valori medi delle caratteristiche di tensione coincidono <sup>(4)</sup> con le coordinate astatiche della sollecitazione, da (2), (7,1), (13,1), (17) segue

$$(18) \quad \Delta V_e - \Delta V_i = A (p_i V_i - p_e V_e).$$

(4) V. loco citato in (2).

Da (14), (18) si deduce

$$(19) \quad \begin{cases} \Delta V_e \geq \frac{V_e}{C} \left\{ A(p_i V_i - p_e V_e) + B V_e (p_i - p_e) \right\} . \\ \Delta V_i \geq \frac{1}{C} \left\{ A V_i (p_i V_i - p_e V_e) + B V_e^2 (p_i - p_e) \right\} , \end{cases}$$

con l'avvertenza di ritenere validi i segni  $>$  o  $<$  a seconda che  $p_i - p_e$  sia positiva oppure negativa.

Sulle (19) si riconosce:

a) se  $p_i - p_e < 0$  i due secondi membri di (19) sono negativi e i due volumi  $V_i$ ,  $V_e$  decrescono di quantità superiori ai moduli dei secondi membri delle (19), qualunque sia la natura del materiale omogeneo di cui è costituito il corpo, quando la sollecitazione agente su  $\sigma_i$  ha il carattere di pressione o è nulla [ $p_i \geq 0$ ], come pure quando, essendo  $p_i < 0$ , la differenza  $q = p_i - p_e$  soddisfi alla disuguaglianza

$$(20) \quad q < p_i \frac{V_e - V_i}{V_e} .$$

b) Se  $p_i - p_e > 0$  i due secondi membri di (19) riescono positivi e  $V_i$ ,  $V_e$  crescono qualunque sia il materiale se la sollecitazione agente su  $\sigma_e$  ha il carattere di trazione o è nulla [ $p_e \leq 0$ ] o se, essendo  $p_e > 0$  risulta

$$(21) \quad q > p_e \frac{V_e - V_i}{V_i} .$$

Nei casi diversi da quelli considerati in a) e b), supposto  $B > 0$ , può decidersi della dilatazione o contrazione dei volumi  $V_e$ ,  $V_i$  solo in dipendenza della natura del materiale.

Le (19) mostrano, ad es., ch  se  $p_i - p_e > 0$  con  $p_e > 0$  i due secondi membri riescono positivi anche quando non   soddisfatta la (21) purch  sia (5)

$$(5) \text{ Si tenga presente che per } B > 0 \text{   } \frac{1}{V_i} > \frac{A}{A V_i + B V_e} > \frac{A V_i}{A V_i^2 + B V_e^2}$$

$$(22) \quad q > \frac{A(V_e - V_i)}{AV_i + BV_e} p_e.$$

In tal caso i volumi racchiusi da  $\sigma_e$ ,  $\sigma_i$  crescono ambedue con accrescimenti superiori ai valori dei secondi membri di (19).

c) Si può anche aggiungere che se  $p_i - p_e > 0$  e  $p_e > 0$  il secondo membro di (19,2) è positivo, supposto  $B > 0$ , anche se non è verificata la (22) purchè risulti <sup>(6)</sup>

$$(23) \quad q > \frac{AV_i(V_e - V_i)}{AV_i^2 + BV_e^2} p_e.$$

In tale caso le (19) mostrano soltanto che il volume della cavità cresce e il secondo membro di (19,2) dà una limitazione inferiore al suo accrescimento.

**4 - Caso di un corpo con più cavità.** - Se  $C$  ha più cavità di volumi  $V_1, V_2, \dots, V_n$  la disuguaglianza (11) si generalizza facilmente e diviene

$$(24) \quad \sum_{r,s=1}^6 \int_C m_{rs} X_r X_s dC \geq \frac{1}{C} \sum_{r,s=1}^3 m_{rs} \left\{ (p_e V_e - \sum_{\nu=1}^n p_\nu V_\nu)^2 + \right. \\ \left. + \sum_{\nu=1}^n (p_e - p_\nu)^2 V_\nu^2 \sum_{i=1}^3 \frac{x_r^{(\nu)} x_s^{(\nu)}}{\rho_i^2} \right\},$$

ove le  $x_r^{(\nu)}$  ( $r = 1, 2, 3$ ;  $\nu = 1, 2, \dots, n$ ), sono le coordinate del baricentro di  $V_\nu$ .

In particolare, supposto  $p_\nu = 0$  ( $\nu = 1, 2, \dots, n$ ), la (12) si mantiene valida purchè si interpreti  $V_i$  come somma dei volumi di tutte le cavità.

Invece il procedimento esposto non può evidentemente fornire limitazioni per le variazioni dei volumi racchiusi dai vari

<sup>(6)</sup> V. nota (5).



contorni. Fa eccezione il caso che le pressioni o trazioni agenti sui contorni di  $C$  siano tutte uguali meno una, come accade, ad es., nell'ipotesi che solo uno dei contorni sia sollecitato.

È facile constatare che in tal caso dalla (24) si deduce una limitazione per la variazione del volume racchiuso dal contorno sollecitato in modo diverso dagli altri.

In particolare se le sollecitazioni agenti sui contorni delle cavità, pur essendo diverse da quella presente sul contorno esterno, sono tutte uguali, si riconosce facilmente che la disuguaglianza (14) mantiene la sua validità purchè si interpreti  $V_i$  come somma dei volumi di tutte le cavità,  $\Delta V_i$  come variazione di  $V_i$  e  $p_i$  indichi la comune pressione agente sui contorni delle singole cavità. Anche la (18) si mantiene valida. Ne segue che la (19,1) dà una limitazione per la variazione del volume racchiuso dal contorno esterno del corpo.

Si deduce che  $V_e$  decresce, certamente qualunque sia il numero delle cavità se  $p_i$  e  $p_e$  verificano la condizione a) mentre cresce se è soddisfatta la condizione b) 0 se, essendo  $p_e > 0$ , è verificata la (22).