

RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

B. PINI

**Su certe questioni di periodicità e asintoticità per i
sistemi lineari del primo ordine ai differenziali totali**

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 20 (1951), p. 249-277

[<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1951__20__249_0>](http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1951__20__249_0)

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1951, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SU CERTE QUESTIONI DI PERIODICITÀ E ASINTOTICITÀ PER I SISTEMI LINEARI DEL PRIMO ORDINE AI DIFFERENZIALI TOTALI

Memoria () di B. PINI (a Bologna).*

Nel presente lavoro si prendono in considerazione sistemi completamente integrabili del tipo

$$(1) \quad dy = A(u, v) y du + B(u, v) y dv$$

(con A e B matrici-funzioni quadrate d'ordine n , y vettore-funzione incognita ad n componenti). Dapprima, nell'ipotesi di periodicità delle matrici A e B , si prova come facilmente si estenda la teoria di FLOQUET relativa a equazioni e sistemi ordinari a coefficienti periodici; indi, applicate ai coefficienti delle perturbazioni, si stabiliscono per queste delle condizioni sufficienti perchè esistano, per il sistema perturbato, integrali indipendenti asintotici a quelli di una n -pla fondamentale del sistema dato; ciò sarà fatto nel caso che il sistema non variato sia a coefficienti costanti ma si accennerà successivamente a quanto basta per accertare che tali risultati sono estendibili al caso che il sistema non perturbato sia a coefficienti periodici.

1. — Ricordiamo che se, su un insieme limitato misurabile $\mathcal{J}$ del piano u, v :

$A(u, v)$ e $B(u, v)$ sono matrici-funzioni limitate e misurabili;

(*) Pervenuta in Redazione il 10 ottobre 1950.

$A(u, v)$ per ogni valore di u è assolutamente continua rispetto a v ;

$B(u, v)$ per ogni valore di v è assolutamente continua rispetto ad u ;

le matrici $\frac{\partial A(u, v)}{\partial v}$, $\frac{\partial B(u, v)}{\partial u}$ sono sommabili su $\mathcal{J}$ e ivi verificano quasi dappertutto la condizione [di completa integrabilità di (1)]

$$(2) \quad \frac{\partial A}{\partial v} + A B = \frac{\partial B}{\partial u} + B A;$$

allora, intendendo per soluzione di (1) un vettore y assolutamente continuo in u e v verificante quasi-dappertutto la (1), sussiste un teorema di esistenza e di unicità e, detti $y_i(u, v) \equiv (y_{1i}(u, v), \dots, y_{ni}(u, v))$, $i = 1, 2, \dots, n$, n integrali linearmente indipendenti, posto $W(u, v) \equiv \|y_{hk}(u, v)\|$, l'integrale generale di (1) è dato da

$$(3) \quad y(u, v) = W(u, v) c$$

con c vettore costante arbitrario, ed è

$$(4) \quad \det W(u, v) = \det W(u_0, v_0) \cdot \exp.(\gamma) \int_{(u_0, v_0)}^{(u, v)} \left[\sum_1^n a_{ii}(u, v) du + \right. \\ \left. + \sum_1^n b_{ii}(u, v) dv \right]$$

dove con γ s'intende un'arbitraria poligonale, coi lati paralleli agli assi, congiungente i due punti (u_0, v_0) e (u, v) di $\mathcal{J}^{(1)}$.

(1) Cfr. p. es. B. PINI: *Sui sistemi di infinite equazioni lineari del primo ordine ai differenziali totali* [Gior. Mat. BATTAGLINI (4) 78 (1948-49) pp. 151-167]; *Sui sistemi di equazioni lineari del primo ordine ai differenziali totali* [Boll. U. M. I. (3) V (1950) pp. 255-264].

2. - Il caso dei coefficienti periodici. - Supponiamo $A(u, v)$ e $B(u, v)$ periodiche in u e v di periodo ω (non è restrittivo che il periodo sia il medesimo in u e in v perchè a ciò ci si può sempre ricondurre con un cambiamento di variabili); diremo integrale *periodico di seconda specie* un integrale y di (1) al quale siano associabili due costanti ρ e σ tali che riesca

$$(5) \quad y(u + \omega, v) = \rho y(u, v), \quad y(u, v + \omega) = \sigma y(u, v).$$

Si riconosce immediatamente che se $y_i(u, v)$, $i = 1, 2, \dots, n$, è una n -pla fondamentale di integrali di (1), tali sono anche le n -ple $y_i(u + \omega, v)$ e $y_i(u, v + \omega)$, $i = 1, 2, \dots, n$. Pertanto la addizione di ω a u , o a v , produce una sostituzione lineare, a modulo non nullo, sulla n -pla fondamentale di partenza. Sia

$$\begin{aligned} W(u + \omega, v) &= W(u, v) H \\ W(u, v + \omega) &= W(u, v) K \end{aligned} \quad \begin{pmatrix} \det. H \neq 0 \\ \det. K \neq 0 \end{pmatrix}.$$

Poichè

$$W(u, v) H K = W(u + \omega, v + \omega) = W(u, v) K H$$

segue che le matrici H e K sono permutabili. Questa semplice constatazione permette di svolgere per i sistemi (1) una trattazione perfettamente simile a quella di FLOQUET (2). Noi ci limiteremo ad accennare tale sviluppo in vista di successive applicazioni. Sia $y = W(u, v) c$ un integrale periodico di seconda specie. Sarà

$$y(u + \omega, v) = W(u, v) H c = \rho W(u, v) c$$

$$y(u, v + \omega) = W(u, v) K c = \sigma W(u, v) c.$$

(2) G. FLOQUET: *Sur les équations différentielles linéaires à coefficients périodiques*, [Ann. Sc. de l'Éc. Norm. Sup. (2) XII (1883) pp. 47-89, in particolare pp. 52-60]. Cfr. G. SANSONE: *Equazioni differenziali nel campo reale*, I (Bologna 1948) Cap. VI, in particolare pp. 317-330 e 360-362].

Ciò richiede l'esistenza di una coppia di numeri ρ e σ e di un vettore $\mathbf{c}$ per cui sia

$$(6) \quad (H - \rho E) \mathbf{c} = 0, \quad (K - \sigma E) \mathbf{c} = 0.$$

Nel caso più semplice che H e K abbiano i divisori elementari tutti lineari, esiste⁽³⁾ una matrice invertibile $\mathcal{H}$ normalizzante contemporaneamente H e K , cioè tale che $\mathcal{H}^{-1} H \mathcal{H}$ e $\mathcal{H}^{-1} K \mathcal{H}$ sono matrici diagonali; allora gli autovalori $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n$ (non necessariamente distinti) di H possono associarsi agli autovalori $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$ di K (anch'essi non necessariamente distinti) in modo che, per ogni coppia, H e K abbiano un autovettore comune. Brevemente, posto

$$Z(u, v) = W(u, v) \mathcal{H}$$

si ha

$$Z(u + \omega, v) = Z(u, v) \mathcal{H}^{-1} H \mathcal{H}, \quad Z(u, v + \omega) = Z(u, v) \mathcal{H}^{-1} K \mathcal{H}$$

e quindi i vettori costituenti le colonne di $Z(u, v)$, $\mathbf{z}_h, h = 1, 2, \dots, n$, sono altrettanti integrali periodici di seconda specie di (1):

$$\mathbf{z}_h(u + \omega, v) = \rho_h \mathbf{z}_h(u, v), \quad \mathbf{z}_h(u, v + \omega) = \sigma_h \mathbf{z}_h(u, v) \quad h = 1, 2, \dots, n.$$

Posto

$$(7) \quad \begin{aligned} \rho_h &= |\rho_h| \exp(i\theta_h), \quad \sigma_h = |\sigma_h| \exp(i\pi_h) \quad -\pi < \theta_h, \pi_h \leq \pi \\ m_h &= \lg \rho_h / \omega, \quad n_h = \lg \sigma_h / \omega^{(4)}, \quad \mathbf{g}_h(u, v) = \exp(-m_h u - n_h v) \mathbf{z}_h(u, v), \end{aligned}$$

si riconosce che $\mathbf{g}_h(u, v)$ è periodico di periodo ω sia in u che in v , onde n integrali fondamentali di (1) saranno

$$(8) \quad \mathbf{z}_h(u, v) = \exp(m_h u + n_h v) \mathbf{g}_h(u, v) \quad h = 1, 2, \dots, n.$$

Prima di procedere vogliamo osservare come gli autovalori di H e K , anzi i loro divisori elementari, siano indipendenti

(3) Cfr. la nota (9).

(4) S'intendono i logaritmi principali.

dalla scelta della n -pla fondamentale di integrali di (1); infatti, indicata con $y_i^*(u, v)$, $i = 1, 2, \dots, n$, una nuova n -pla fondamentale di integrali di (1) e con $W^*(u, v)$ la relativa matrice, sarà

$$W^*(u + \omega, v) = W^*(u, v) H^*, \quad W^*(u, v + \omega) = W^*(u, v) K^*,$$

$$H^* K^* = K^* H^*,$$

da cui segue, poichè $W^*(u, v) = W(u, v) M$, per una certa matrice invertibile M ,

$$W^*(u + \omega, v) = W(u, v) H M, \quad W^*(u, v + \omega) = W(u, v) K M,$$

onde
$$H^* = M^{-1} H M, \quad K^* = M^{-1} K M$$

e tanto basta per concludere quanto si è affermato.

Poniamoci ora nel caso generale che le matrici H e K non abbiano i divisori elementari tutti lineari. Siano $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_\mu$ gli autovalori distinti relativi alla matrice H ; è noto che a ciascuno di essi, ρ_i , relativo ai divisori elementari

$$(\rho - \rho_i)^{e_0^{(i)}}, (\rho - \rho_i)^{e_1^{(i)}}, \dots, (\rho - \rho_i)^{e_{n_i}^{(i)}}, \quad e_0^{(i)} \geq e_1^{(i)} \geq \dots \geq e_{n_i}^{(i)}$$

restano associati gli autovalori $\bar{\sigma}_0^{(i)}, \bar{\sigma}_1^{(i)}, \dots, \bar{\sigma}_{n_i}^{(i)}$ di K , non necessariamente distinti, multipli rispettivamente almeno degli ordini $e_0^{(i)}, e_1^{(i)}, \dots, e_{n_i}^{(i)}$, in modo che alla coppia $\rho_i, \bar{\sigma}_h^{(i)}$, per tutti gli h per cui i $\bar{\sigma}_h^{(i)}$ sono distinti, corrisponde un solo autovettore $\alpha_h^{(i)}$ comune alle matrici H e K ; se poi due o più delle $\bar{\sigma}_h^{(i)}$ coincidono, detto $\sigma^{(i)}$ il loro valore comune, alla coppia $\rho_i, \sigma^{(i)}$ corrisponde almeno un autovettore comune alle due matrici e al più un gruppo di tanti autovettori (comuni alle due matrici) linearmente indipendenti, quante sono le $\bar{\sigma}_h^{(i)}$ che coincidono ⁽⁵⁾.

(5) Cfr. l. c. in (1).

Nel seguito noi indicheremo con $\sigma_0^{(i)}, \sigma_1^{(i)}, \dots, \sigma_{m_i}^{(i)}$ ($m_i \leq n_i$) le $\bar{\sigma}_h^{(i)}$ stesse, con la seguente avvertenza:

Sia $\bar{\sigma}_0^{(i)}$ distinto dalle restanti $\bar{\sigma}_h^{(i)}$; allora sarà $\sigma_0^{(i)} = \bar{\sigma}_0^{(i)}$ con molteplicità $r_0^{(i)} = e_0^{(i)}$; sia $\bar{\sigma}_0^{(i)} = \bar{\sigma}_1^{(i)} = \dots = \bar{\sigma}_{p_i-1}^{(i)} = \sigma^{(i)}$, distinte dalle restanti; allora a ρ_i e $\sigma^{(i)}$ corrisponderanno q_i ($1 \leq q_i \leq p_i$) autovettori linearmente indipendenti comuni ad H e K ; indicheremo questo stesso autovalore $\sigma^{(i)}$ con $\sigma_0^{(i)}, \sigma_1^{(i)}, \dots, \sigma_{q_i-1}^{(i)}$ attribuendo a ciascuno di questi ultimi certe molteplicità $r_0^{(i)}, r_1^{(i)}, \dots, r_{q_i-1}^{(i)}$, ognuna delle quali sarà eguale a una delle $e_0^{(i)}, e_1^{(i)}, \dots, e_{p_i-1}^{(i)}$ o alla somma di due o più di queste, con

$$\sum_0^{q_i-1} r_m^{(i)} = \sum_0^{p_i-1} e_m^{(i)},$$

ecc.

In conclusione: le ρ e le σ possono associarsi nelle coppie

$$\rho_i, \sigma_i \qquad i = 1, 2, \dots, \nu$$

risultando ρ_i e σ_i multiple d'ordine μ_i , rispettivamente per H e K , con $\sum_1^\nu \mu_i = n$; le ρ_i non essendo necessariamente distinte tra loro, le σ_i non essendo necessariamente distinte tra loro, e in modo che ad ogni coppia ρ_i, σ_i corrisponda un solo autovettore comune ad H e K , questi autovettori risultando linearmente indipendenti.

Allora, scegliendo come primo integrale di (1) la soluzione periodica di seconda specie $z_1(u, v)$ corrispondente a ρ_1 e σ_1 , detta $W_1(u, v)$ la matrice di $z_1, y_2, \dots, y_n$ (assumendo questa come nuova n -pla fondamentale, sottintendendo che in $z_1 = \sum_1^n c_i y_i$ sia $c_1 \neq 0$), sarà

$$W_1(u + \omega, v) = W_1(u, v) \cdot \left\| \begin{smallmatrix} \rho_1 \\ O \\ H_1 \end{smallmatrix} \right\|, \quad W_1(u, v + \omega) = W_1(u, v) \cdot \left\| \begin{smallmatrix} \sigma_1 \\ O \\ K_1 \end{smallmatrix} \right\|$$

(dove i punti stanno ad indicare termini che non interessa esplicitare).

Le matrici $\begin{vmatrix} \rho_1 & \cdot \\ O & H_1 \end{vmatrix}$ e $\begin{vmatrix} \sigma_1 & \cdot \\ O & K_1 \end{vmatrix}$, che stanno al posto di H e K , sono anch'esse permutabili e hanno gli stessi autovalori e gli stessi divisori elementari di H e K , per quanto è stato osservato poco fa. Si riconosce che anche H_1 e K_1 , sono permutabili e hanno gli stessi autovalori di H e K salvo che ρ_1 e σ_1 sono multipli per esse con ordine di molteplicità inferiore di una unità a quello che hanno relativamente ad H e K .

Supposto $\mu_1 > 1$, i sistemi

$$(H_1 - \rho_1 E) x = 0 \quad (K_1 - \sigma_1 E) x = 0$$

hanno allora una soluzione comune, sia $x_2, \dots, x_n$; si riconosce

che per l'integrale $z_2(u, v) = \sum_2^n x_k y_k$ si ha

$$z_2(u + \omega, v) = \varepsilon_{21} z_1(u, v) + \rho_1 z_2(u, v),$$

$$z_2(u, v + \omega) = \eta_{21} z_1(u, v) + \sigma_1 z_2(u, v),$$

essendo ε_{21} ed η_{21} due certe costanti.

Così continuando si ottengono μ_1 integrali $z_1, z_2, \dots, z_{\mu_1}$ per cui è

$$\begin{aligned} z_1(u + \omega, v) &= \rho_1 z_1(u, v), & z_i(u + \omega, v) &= \sum_1^{i-1} \varepsilon_{ij} z_j(u, v) + \rho_i z_i \\ (9) \quad z_1(u, v + \omega) &= \sigma_1 z_1(u, v), & z_i(u, v + \omega) &= \sum_1^{i-1} \eta_{ij} z_j(u, v) + \sigma_i z_i \\ &&& i = 1, 2, \dots, \mu_1, \end{aligned}$$

e così si procede per le coppie $\rho_2, \sigma_2; \dots; \rho_v, \sigma_v$. Si vengono in tal modo ad individuare n integrali linearmente indipendenti di (1), suddivisi in v gruppi; per gli integrali del primo gruppo valgono le relazioni (9), per gl'integrali dei successivi gruppi valgono relazioni analoghe.

3. - Osservazione sulla simultanea riduzione a forma canonica di due matrici permutabili. - Prima di precisare la natura analitica degli integrali ora indicati, il che faremo al n. 5*, facciamo le seguenti osservazioni. È noto ⁽⁶⁾ che se due matrici A e B sono permutabili, detta $\mathcal{H}$ la matrice normalizzante A , tale cioè che $\mathcal{H}^{-1} A \mathcal{H} = \mathcal{A}$ sia la forma canonica di JORDAN di A , allora B è nel tipo $\mathcal{H} \mathcal{B} \mathcal{H}^{-1}$, dove

$$\mathcal{A} = \begin{vmatrix} \mathcal{A}_1 & & \\ & \mathcal{A}_2 & \\ & & \ddots \\ & & & \mathcal{A}_m \end{vmatrix} \quad \mathcal{B} = \begin{vmatrix} \mathcal{B}_1 & & \\ & \mathcal{B}_2 & \\ & & \ddots \\ & & & \mathcal{B}_m \end{vmatrix}$$

e

$$\mathcal{A}_i = \begin{vmatrix} \rho_i E_{i_1} + U_{i_1} & & \\ & \rho_i E_{i_1} + U_{i_2} & \\ & & \ddots \\ & & & \rho_i E_{i_{p_i}} + U_{i_{p_i}} \end{vmatrix} \quad \mathcal{B}_i = \begin{vmatrix} \mathcal{B}_{11}^{(i)} \dots \mathcal{B}_{1p_i}^{(i)} \\ \dots \dots \dots \\ \mathcal{B}_{p_i 1}^{(i)} \dots \mathcal{B}_{p_i p_i}^{(i)} \end{vmatrix}$$

indicando con E_{i_k} la matrice unità d'ordine i_k , con U_{i_k} la matrice quadrata d'ordine i_k per cui è $u_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{per } j \neq i+1 \\ 1 & \text{» } j = i+1 \end{cases}$,

essendo $i_1 \geq i_2 \geq \dots \geq i_{p_i}$, con $\mathcal{B}_{hk}^{(i)}$ una matrice con i_h righe e i_k colonne nella quale sono tra loro eguali i termini per cui è costante la differenza tra gl'indici e in particolare sono tutti nulli quelli per cui il primo indice è maggiore del secondo se $h \leq k$ e tutti quelli per cui la differenza tra il secondo e il primo indice è inferiore a $i_h - i_k$ se $h > k$.

Noi vogliamo qui mostrare come, sfruttando l'estensione di una certa osservazione ⁽⁷⁾, sia possibile realizzare, per mezzo di una sostituzione lineare (a modulo non nullo), la simultanea riduzione a una certa forma canonica di due matrici permutabili.

⁽⁶⁾ Cfr. p. es. J. H. M. WEDDERBURN: *Lectures on Matrices* [Am. Math. Soc. Colloquium publications, vol. XVII, 1934, pp. 102 e segg.].

⁽⁷⁾ Cfr. G. FLOQUET, l. c. in (2) pp. 66-68.

Si è già visto che se $W(u, v)$ è la matrice di n integrali indipendenti di (1) si ha

$$W(u + \omega, v) = W(u, v) H, \quad W(u, v + \omega) = W(u, v) K$$

con H e K invertibili e permutabili. Reciprocamente, essendo H e K due matrici invertibili e permutabili qualsiasi e $W(u, v)$ una matrice-funzione sempre invertibile per cui valgano le relazioni precedenti ⁽⁸⁾ e per la quale si facciano opportune ipotesi di derivabilità, posto

$$A(u, v) = \frac{\partial W(u, v)}{\partial u} W^{-1}(u, v), \quad B(u, v) = \frac{\partial W(u, v)}{\partial v} W^{-1}(u, v),$$

si riconosce che $A(u, v)$ e $B(u, v)$ sono periodiche di periodo ω in u e in v e, di più, $\frac{\partial A(u, v)}{\partial v} + A(u, v) B(u, v) = \frac{\partial B(u, v)}{\partial u} + B(u, v) A(u, v)$; dunque i vettori costituenti le colonne di $W(u, v)$ sono n integrali linearmente indipendenti del sistema lineare ai differenziali totali completamente integrabile e a coefficienti periodici $d\mathbf{y} = A(u, v) \mathbf{y} du + B(u, v) \mathbf{y} dv$.

Ciò porta che le matrici H e K , precedentemente incontrate, a parte la loro permutabilità, possono essere qualsiasi. Da ciò, incidentalmente, possiamo dedurre un'osservazione circa la riduzione a forma canonica di due matrici permutabili.

Indicata con $Z(u, v)$ la matrice degli integrali $z_1, z_2, \dots, z_n$, precedentemente individuati in 2., si ha

$$Z(u + \omega, v) = Z(u, v) \mathcal{M}, \quad Z(u, v + \omega) = Z(u, v) \mathcal{N}$$

⁽⁸⁾ L'esistenza di una siffatta matrice $W(u, v)$ è sempre assicurata. Infatti, essendo H e K due matrici quadrate invertibili, allora, com'è ben noto, si possono trovare due matrici quadrate M ed N tali che $e^M = H$, $e^N = K$; queste matrici riescono inoltre permutabili se tali sono H e K . Tenendo quindi presente che, se M ed N sono due matrici (quadrate) permutabili, si ha $e^{M+N} = e^M \cdot e^N = e^N \cdot e^M$, si conclude che basterà allora porre $W(u, v) = e^{\frac{u}{\omega} M + \frac{v}{\omega} N}$.

con

$$(10) \quad \mathcal{M} = \begin{vmatrix} \mathcal{M}_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \mathcal{M}_\nu \end{vmatrix} \quad \mathcal{N} = \begin{vmatrix} \mathcal{N}_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \mathcal{N}_\nu \end{vmatrix}$$

e

$$(11) \quad \mathcal{M}_i = \begin{vmatrix} \rho_i & \dots & \dots \\ 0 & \rho_i & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots \rho_i \end{vmatrix} \quad \mathcal{N}_i = \begin{vmatrix} \sigma_i & \dots & \dots \\ 0 & \sigma_i & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots \sigma_i \end{vmatrix} \quad i = 1, 2, \dots, \nu.$$

queste ultime entrambe d'ordine μ_i , dove i punti stanno ad indicare termini che non interessa esplicitare; beninteso, tali che $\mathcal{M}_i$ ed $\mathcal{N}_i$ siano permutabili.

Si ha pertanto la seguente proposizione:

Se H e K sono due matrici quadrate d'ordine n , invertibili e permutabili, con una stessa sostituzione lineare $\mathcal{H}$, a modulo non nullo, esse possono ricondursi alla seguente forma, che diremo ancora canonica:

detti $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_\nu; \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_\nu$ gli autovalori (non necessariamente distinti) di H e K , multipli rispettivamente degli ordini $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_\nu$, da intendere nel senso specificato in 2., si ha

$$\mathcal{H}^{-1} H \mathcal{H} = \begin{vmatrix} H_1 & & \\ & \ddots & \\ & & H_\nu \end{vmatrix} \quad \mathcal{H}^{-1} K \mathcal{H} = \begin{vmatrix} K_1 & & \\ & \ddots & \\ & & K_\nu \end{vmatrix}$$

con H_i e K_i matrici permutabili d'ordine μ_i ($i = 1, 2, \dots, \nu$) del tipo (11) ⁽⁹⁾.

⁽⁹⁾ Daremo di ciò una dimostrazione diretta in altro luogo. Qui vogliamo solo osservare come le matrici permutabili A e B possano essere diagonalizzate con una stessa sostituzione lineare se tutti i loro divisori elementari sono lineari. In questo caso è infatti, per $i = 1, 2, \dots, m$, $\mathcal{A}_i = \rho_i E_{i_1+i_2+\dots+i_{p_i}}$.

4. - Comportamento asintotico degli integrali di un sistema perturbato, per variazioni nei coefficienti, di un sistema a coefficienti costanti. Consideriamo il sistema

$$(12) \quad d\mathbf{y} = A \mathbf{y} du + B \mathbf{y} dv$$

nell'ipotesi che A e B siano due matrici quadrate d'ordine n , costanti, tali che $AB = BA$ (condizione di completa integrabilità). A fianco di questo consideriamo il sistema perturbato

$$(13) \quad d\mathbf{y} = [A + \Phi(u, v)] \mathbf{y} du + [B + \Psi(u, v)] \mathbf{y} dv$$

sul quale facciamo, per ora, le seguenti ipotesi:

le Φ e Ψ sono matrici-funzioni limitate e misurabili su ogni insieme limitato e misurabile della regione $u \geq 0, v \geq 0$, la prima assolutamente continua rispetto a v per ogni $u \geq 0$, la seconda assolutamente continua rispetto ad u per ogni $v \geq 0$; le derivate $\frac{\partial \Phi}{\partial v}, \frac{\partial \Psi}{\partial u}$, che esistono quasi-dappertutto, sono sommabili su ogni insieme limitato e misurabile della regione $u \geq 0, v \geq 0$, e sono legate dalla relazione (di completa integrabilità)

$$(14) \quad \frac{\partial \Phi}{\partial v} + \Phi B + A \Psi + \Phi \Psi = \frac{\partial \Psi}{\partial u} + \Psi A + B \Phi + \Psi \Phi.$$

mentre $\mathcal{B}_i$ può essere diagonalizzata con una sostituzione $\mathcal{L}_i$, cioè $\mathcal{L}_i^{-1} \mathcal{B}_i \mathcal{L}_i = \mathcal{D}_i$ ($\mathcal{D}_i$ matrice diagonale). Segue che

$$\left\| \begin{matrix} \mathcal{L}_{1..}^{-1} \\ \vdots \\ \mathcal{L}_m^{-1} \end{matrix} \right\| \mathcal{A} \left\| \begin{matrix} \mathcal{L}_{1..} \\ \vdots \\ \mathcal{L}_m \end{matrix} \right\| = \mathcal{A} \left\| \begin{matrix} \mathcal{L}_{1..}^{-1} \\ \vdots \\ \mathcal{L}_m^{-1} \end{matrix} \right\| \mathcal{B} \left\| \begin{matrix} \mathcal{L}_{1..} \\ \vdots \\ \mathcal{L}_m \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} \mathcal{D}_{1..} \\ \vdots \\ \mathcal{D}_m \end{matrix} \right\| = \mathcal{D}$$

essendo $\mathcal{A}$ e $\mathcal{D}$ diagonali.

Mantenendo le stesse notazioni del n. 3., salvo lo scambio di H con A e di K con B , ⁽¹⁰⁾ sarà

$$\mathcal{A} = \mathcal{K}^{-1} A \mathcal{K} = \begin{vmatrix} \mathcal{A}_1 & & \\ & \mathcal{A}_2 & \\ & & \ddots \\ & & & \mathcal{A}_\nu \end{vmatrix}, \quad \mathcal{B} = \mathcal{K}^{-1} B \mathcal{K} = \begin{vmatrix} \mathcal{B}_1 & & \\ & \mathcal{B}_2 & \\ & & \ddots \\ & & & \mathcal{B}_\nu \end{vmatrix}$$

con

$$\mathcal{A}_i = \begin{vmatrix} \rho_i & \dots & \dots \\ 0 & \rho_i & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots \rho_i \end{vmatrix}, \quad \mathcal{B}_i = \begin{vmatrix} \sigma_i & \dots & \dots \\ 0 & \sigma_i & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots \sigma_i \end{vmatrix} \quad \text{d'ordine } \mu_i, \quad \sum_1^\nu \mu_i = n,$$

$$\mathcal{A}_i \mathcal{B}_i = \mathcal{B}_i \mathcal{A}_i.$$

Posto $y = \mathcal{K} z$, si ha da (13)

$$(13') \quad dz = (\mathcal{A} + \mathcal{K}^{-1} \Phi \mathcal{K}) z du + (\mathcal{B} + \mathcal{K}^{-1} \Psi \mathcal{K}) z dv.$$

Per semplicità noi ammetteremo in tutto il seguito che il sistema (13) sia già normalizzato nella forma (13') e ci riferiremo ad esso anzichè a quest'ultimo.

Indicati con $y^{(i)}$, $i = 1, 2, \dots, \nu$, il vettore che ha eguali a zero le prime $\mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_{i-1}$ e le ultime $\mu_{i+1} + \dots + \mu_\nu$ componenti, e le restanti coincidenti con quelle di y , il sistema (12) si spezza nei ν sistemi

$$(15) \quad dy^{(i)} = \mathcal{A}_i y^{(i)} du + \mathcal{B}_i y^{(i)} dv \quad i = 1, 2, \dots, \nu.$$

Indichiamo con $W_i(u, v)$, $i = 1, 2, \dots, \nu$, la matrice che ha

⁽¹⁰⁾ Nella proposizione provata al n. 3. le matrici H e K erano supposte invertibili. Non v'è però restrizione nel supporre attualmente che le matrici A e B di (12) siano invertibili perchè a ciò ci si può sempre ricondurre con una sostituzione del tipo $y = \exp(\bar{\rho} u + \bar{\sigma} v) z$ con due opportune costanti $\bar{\rho}$ e $\bar{\sigma}$.

per colonne le componenti di μ_i integrali linearmente indipendenti di (15). Posto $y^{(i)} = \exp(\rho_i u + \sigma_i v) z^{(i)}$ si ha

$$(15') \quad d z^{(i)} = (\mathcal{A}_i - \rho_i E) z^{(i)} du + (\mathcal{B}_i - \sigma_i E) z^{(i)} dv$$

che si integra per successive quadrature. Pertanto W_i si può pensare del seguente tipo

$$(16) \quad W_i = \exp(\rho_i u + \sigma_i v) \begin{vmatrix} 1 & p_1^{(1)}(u, v) & p_2^{(1)}(u, v) & \dots & p_{\mu_i-1}^{(1)}(u, v) \\ 0 & 1 & p_1^{(2)}(u, v) & \dots & p_{\mu_i-2}^{(2)}(u, v) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix}$$

dove i $p_h(u, v)$ stanno ad indicare polinomi in u e v di grado (reale o apparente) h .

La matrice di n integrali fondamentali di (12) si potrà perciò ritenere del tipo

$$(17) \quad W = \begin{vmatrix} W_1 & & \\ & W_2 & \\ & & \ddots \\ & & & W_n \end{vmatrix}$$

e quindi

$$(18) \quad W^{-1} = \begin{vmatrix} W_1^{-1} & & \\ & W_2^{-1} & \\ & & \ddots \\ & & & W_n^{-1} \end{vmatrix}$$

con

$$(19) \quad W_i^{-1} = \exp(-\rho_i u - \sigma_i v) \begin{vmatrix} 1 & q_1^{(1)}(u, v) & q_2^{(1)}(u, v) & \dots & q_{\mu_i-1}^{(1)}(u, v) \\ 0 & 1 & q_1^{(2)}(u, v) & \dots & q_{\mu_i-2}^{(2)}(u, v) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix}$$

dove i $q_h(u, v)$ stanno ad indicare polinomi in u e v di grado (reale o apparente) h .

Ciò premesso, passiamo a provare il seguente teorema:

Se, oltre alle già specificate ipotesi di completa integrabilità del sistema (18) (e 12)), si ammette l'esistenza di due n^2 -ple di funzioni non negative $\varphi_{s,t}^(u)$ e $\psi_{s,t}^*(v)$ ($s, t = 1, 2, \dots, n$), ciascuna delle quali sia sommabile su $(0, +\infty)$, tali che, posto $\delta(u, v) = (u^2 + v^2)^{\frac{1}{2}}$, sia, a meno dei punti v di un insieme di misura nulla,*

$$(20) \quad \delta^{\mu_r-1}(u, v) |\varphi_{s,t}(u, v)| < \varphi_{s,t}^*(u),$$

e, a meno dei punti u di un insieme di misura nulla,

$$(20') \quad \delta^{\mu_r-1}(u, v) |\psi_{s,t}(u, v)| < \psi_{s,t}^*(v),$$

per $t = 1, 2, \dots, n$; $\mu_1 + \dots + \mu_{r-1} + 1 \leq s \leq \mu_1 + \dots + \mu_r$; $r = 1, 2, \dots, \nu$; allora ad ogni integrale

$$\exp(\rho_i u + \sigma_i v) \mathbf{p}_j(u, v)$$

di (12) [ove $\mathbf{p}_j(u, v)$ indica un vettore le cui componenti sono polinomi di grado al più $j-1$ in u e v], si può associare un integrale di (13) del tipo

$$\exp(\rho_i u + \sigma_i v) [\mathbf{p}_j(u, v) + \delta^{i-1}(u, v) \mathbf{o}_j(u, v)]$$

ove $\mathbf{o}_j(u, v)$ indica una serie di vettori totalmente convergente in ogni dominio contenuto nella regione $u \geq U, v \geq V$, con U e V sufficientemente grandi, e convergente a zero per $u \rightarrow +\infty$, $v \rightarrow +\infty$ ⁽¹¹⁾.

(11) Questa proposizione, nel caso di un sistema ordinario $\mathbf{y}' = [A + \Phi(x)]\mathbf{y}$, migliora leggermente un risultato di S. FAEDO: *Proprietà asintotiche delle soluzioni dei sistemi differenziali lineari omogenei* [Annali di Mat. pura e applicata (4) XXVI (1947) pp. 207-215], al quale è legato questo n. 4. Si può osservare che la preventiva riduzione a forma canonica della matrice A permetterebbe di trattare la cosa più rapidamente e di conseguire spontaneamente una condizione meno restrittiva di quella indicata nel citato lavoro. Cfr. anche O. DUNKEL in: *Regular singular points of a systems of*

Poichè si ha identicamente

$$dW = A W du + B W dv,$$

se si pone in (13) $y = Wz$ si ottiene

$$(21) \quad dz = W^{-1} \Phi W z du + W^{-1} \Psi W z dv.$$

Il sistema (21) è anch'esso completamente integrale essendo

$$\frac{\partial W^{-1} \Phi W z}{\partial v} = W^{-1} \left(-B \Phi + \frac{\partial \Phi}{\partial v} + \Phi B + \Phi \Psi \right) W z,$$

$$\frac{\partial W^{-1} \Psi W z}{\partial u} = W^{-1} \left(-A \Psi + \frac{\partial \Psi}{\partial u} + \Psi A + \Psi \Phi \right) W z,$$

e tenendo presente la (14). Segue

$$z = c + (\gamma) \int^{(u,v)} [W^{-1} \Phi W z du + W^{-1} \Psi W z dv]$$

con c vettore costante, ove gl'integrali curvilinei si possono scegliere in modo opportuno, uno per ogni componente di z ; quindi

$$(22) \quad y = Wc + W \cdot (\gamma) \int^{(u,v)} [W^{-1} \Phi y du + W^{-1} \Psi y dv].$$

homogeneous linear differential equations of the first order [Proceedings of the Am. Acad. of Arts and Sciences, XXXVIII (1902-1903) pp. 341-370].

Per la bibliografia ci limitiamo a citare ancora, come quello più affine alla questione che ci interessa, il recente lavoro: *The asymptotic nature of solutions of linear systems of differential equations* di N. LEVINSON, in Duke Math. J. 15 (1948) pp. 111-126, specificatamente pei suoi teoremi II e III.

Tradotta così la (13) in equazione integrale, applichiamo un procedimento di approssimazioni successive, ponendo

$$(23) \quad y^{(0)} = Wc, \quad y^{(m)} = Wc + W \cdot (\gamma) \int [W^{-1} \Phi y^{(m-1)} du + \\ + W^{-1} \Psi y^{(m-1)} dv], \quad m = 1, 2, \dots$$

e poi

$$(24) \quad \Delta y^{(0)} = y^{(0)}, \quad \Delta y^{(m)} = W \cdot (\gamma) \int [W^{-1} \Phi \Delta y^{(m-1)} du + \\ + W^{-1} \Psi \Delta y^{(m-1)} dv] \quad m = 1, 2, \dots$$

Per comodità di notazioni poniamo

$$\tau_i = \mu_1 + \dots + \mu_{i-1}; \quad i = 1, 2, \dots, \nu; \quad \mu_0 = 0;$$

indichiamo con

$$y_{\tau_i+j} (= \exp(\rho_i u + \sigma_i v) p_{h, \tau_i+j}(u, v), \quad h = 1, 2, \dots, n) \quad j = 1, 2, \dots, \mu_i$$

gl'integrali di (15), colonne di W_i , onde p_{h, τ_i+j} , per ogni valore di h , indicherà polinomi di grado non superiore a $j - 1$; dalle (18) e (19) segue

$$W_{\tau_r+k, s}^{-1} = \exp(-\rho_r u - \sigma_r v) q_{s, \tau_r+k}(u, v)$$

$$k = 1, 2, \dots, \mu_r; \quad s = 1, 2, \dots, n; \quad r = 1, 2, \dots, \nu$$

dove i $q_{s, \tau_r+k}(u, v)$ indicano, per ogni valore di s , polinomi di grado al più $\mu_r - k$, e sono tutti nulli per $s \leq \tau_r$ ed $s > \tau_{r+1}$.

Se poniamo $y^{(0)} = y_{\tau_i+j}$, il che equivale a prendere per c

$$\text{il vettore di componenti } c_h = \begin{cases} 1 & \text{per } h = \tau_i + j \\ 0 & \text{per } h \neq \tau_i + j \end{cases},$$

si ha

$$\begin{aligned}
 \Delta y^{(1)}_{h, \tau_i + j} = & \exp(\rho_i u + \sigma_i v) \delta^{j-1}(u, v) \sum_1^v \sum_1^{\mu_r} \exp[(\rho_r - \rho_i)u + \\
 & + (\sigma_r - \sigma_i)v] \delta^{1-j}(u, v) p_{h, \tau_r + k}(u, v) \cdot \\
 & \cdot (\gamma_{r, k}) \int \left\{ \sum_{\tau_r + 1}^{\tau_{r+1}} \sum_1^n \exp[(\rho_i - \rho_r)\xi + \right. \\
 (25) \quad & + (\sigma_i - \sigma_r)\eta] \varphi_{s, t}(\xi, \eta) q_{s, \tau_r + k}(\xi, \eta) p_{t, \tau_i + j}(\xi, \eta) d\xi + \\
 & + \sum_{\tau_r + 1}^{\tau_{r+1}} \sum_1^n \exp[(\rho_i - \rho_r)\xi + \\
 & \left. + (\sigma_i - \sigma_r)\eta] \psi_{s, t}(\xi, \eta) q_{t, \tau_r + k}(\xi, \eta) p_{t, \tau_i + j}(\xi, \eta) d\eta \right\}, h = 1, 2, \dots, n.
 \end{aligned}$$

Sia (U, V) un punto della regione $u \geq 0, v \geq 0$; scegliamo, come curve γ d'integrazione, delle poligonali di uno dei seguenti tipi, specificandone in seguito la scelta:

$$\begin{aligned}
 a) \quad & +\gamma \equiv (U \leq \xi \leq u, \eta = V; \xi = u, V \leq \eta \leq v) \\
 b) \quad & -\gamma \equiv \begin{cases} (u = \xi, v \leq \eta \leq u; u \leq \xi = \eta) & \text{per } u > v \\ (u \leq \xi \leq v, \eta = v; v \leq \xi = \eta) & \text{per } v > u \end{cases} \\
 b') \quad & -\gamma \equiv \begin{cases} (u \geq \xi \geq U, v = \eta; u = U, v \leq \eta) \\ (u = \xi, v \geq \eta \geq V; \xi \geq u, \eta = V) \end{cases} \\
 c) \quad & -\gamma \equiv \begin{cases} (u \geq \xi \geq U, v = \eta; u = U, v \leq \eta) \\ (u = \xi, v \geq \eta \geq V; \xi \geq u, \eta = V) \end{cases} \\
 c') \quad & -\gamma \equiv \begin{cases} (u \geq \xi \geq U, v = \eta; u = U, v \leq \eta) \\ (u = \xi, v \geq \eta \geq V; \xi \geq u, \eta = V) \end{cases}
 \end{aligned}$$

È chiaro che si potrà trovare una coppia di costanti positive C_1 e C_2 in modo che sia

$$\begin{aligned}
 |p_{h, \tau_r + k}(u, v)| & \leq C_1 \delta^{k-1}(u, v) \\
 h = 1, 2, \dots, n; r = 1, 2, \dots, v; k = 1, 2, \dots, \mu_r \\
 (26) \quad |p_{t, \tau_i + j}(u, v) q_{s, \tau_r + k}(u, v)| & \leq C_2 \delta^{\mu_r + j - k - 1}(u, v) \\
 t = 1, 2, \dots, n; r = 1, 2, \dots, v; \tau_r < s \leq \tau_{r+1}; k = 1, 2, \dots, \mu_r.
 \end{aligned}$$

Allora

$$\begin{aligned}
 & |\Delta y_{h, \tau_i+j}^{(v)}| \leq \exp [R(\rho_i) u + \\
 & + R(\sigma_i) v] \delta^{j-1}(u, v) C_1 C_2 \sum_1^v \sum_1^{\mu_r} \exp [R(\rho_r - \rho_i) u + \\
 (27) \quad & + R(\sigma_r - \sigma_i) v] \delta^{k-j}(u, v) \cdot (\gamma_{r,k}) \int_{\tau_r+1}^{(\tau_r+1)^{(u,v)}} \sum_s \exp [R(\rho_i - \rho_r) \xi + \\
 & + R(\sigma_i - \sigma_r) \eta] \delta^{\mu_r+j-k-1}(\xi, \eta) \left(\sum_1^n |\varphi_{s,t}(\xi, \eta)| d\xi + \right. \\
 & \left. + \sum_1^n |\psi_{s,t}(\xi, \eta)| d\eta \right), \quad h = 1, 2, \dots, n
 \end{aligned}$$

dove, come di consueto, con $R(z)$ s'intende la parte reale di z .

Limitiamoci ad esaminare l'espressione sotto la prima doppia sommatoria.

I. - Se $R(\rho_i - \rho_r) > 0$, $R(\sigma_i - \sigma_r) > 0$, scegliamo per $\gamma_{r,k}$, qualunque sia k , la poligonale a ; l'espressione anzidetta riesce allora maggiorata da

$$\begin{aligned}
 & \exp [R(\rho_r - \rho_i) u + R(\sigma_r - \sigma_i) v] \delta^{k-j}(u, v) \sum_s^{\tau_r+1} \left\{ \int_u^u \exp [R(\rho_i - \rho_r) \xi + \right. \\
 & + R(\sigma_i - \sigma_r) \eta] \delta^{\mu_r+j-k-1}(\xi, \eta) \sum_1^n |\varphi_{s,t}(\xi, \eta)| d\xi + \\
 & \left. + \int_v^v \exp [R(\rho_i - \rho_r) u + R(\sigma_i - \sigma_r) \eta] \delta^{\mu_r+j-k-1}(u, \eta) \sum_1^n |\psi_{s,t}(u, \eta)| d\eta \right\};
 \end{aligned}$$

ma il prodotto dell'esponenziale per una potenza di $\delta(\xi, V)$ o $\delta(u, \eta)$ cresce al crescere delle variabili, almeno per U e V abbastanza grandi, onde la precedente espressione è maggiorata da

$$\sum_{r=1}^{\tau_r+1} \frac{1}{\delta(u, v)} \left\{ \int_v^u \delta^{k_r}(\xi, V) \sum_{i=1}^n \psi_{s,i}(\xi, V) d\xi + \right.$$

(28₁)

$$\left. + \int_v^u \delta^{k_r}(u, \eta) \sum_{i=1}^n \psi_{s,i}(u, \eta) d\eta \right\}.$$

II. - Se $R(\rho_i - \rho_r) < 0$, $R(\sigma_i - \sigma_r) < 0$, scegliamo per τ_{r+1} , per tutti i valori di k , la poligonale b_j se $v < u$, la b' se $u < v$: per es. nel primo caso la precedente espressione viene maggiorata da

$$\exp[R(\rho_r - \rho_i)u + R(\sigma_r - \sigma_i)v] \delta^{k-1}(u, v) \sum_{r=1}^{\tau_r+1} \left\{ \int_v^u \exp[R(\rho_i - \rho_r)u + \right.$$

$$+ R(\sigma_i - \sigma_r)\eta] \delta^{k_r+1-k-1}(u, \eta) \sum_{i=1}^n \varphi_{s,i}(u, \eta) d\eta +$$

$$+ \int_u^{+\infty} \exp[R(\sigma_i - \sigma_r)\xi + R(\rho_i - \rho_r)\xi] \delta^{k_r+1-k-1}(\xi, \xi) \sum_{i=1}^n (\varphi_{s,i}(\xi, \xi) +$$

$$+ \psi_{s,i}(\xi, \xi)) d\xi \Big\}.$$

L'esponenziale per una potenza di $\delta(u, \eta)$ o di $\delta(\xi, \xi)$ decresce (almeno per u e v abbastanza grandi) al crescere di ξ onde la precedente espressione è maggiorata da

$$(28_2) \quad \sum_{s, \tau_r+1}^{\tau_r+1} \left\{ \frac{1}{\delta(u, v)} \int_v^u \delta^{\mu_r}(u, \eta) \sum_1^n |\varphi_{s, i}(u, \eta)| d\eta + \right. \\ \left. + \int_u^{+\infty} \delta^{\mu_r-1}(\xi, \xi) \sum_1^n (|\varphi_{s, i}(\xi, \xi)| + |\psi_{s, i}(\xi, \xi)|) d\xi \right\}.$$

III. - Se $R(\rho_i - \rho_r) > 0$, $R(\sigma_i - \sigma_r) < 0$, scegliamo per $\gamma_{r, k}$, per tutti i valori di k , la poligonale c) [se fosse $R(\rho_i - \rho_r) < 0$, $R(\sigma_i - \sigma_r) > 0$ si sceglierebbe la c']); la solita espressione è maggiorata da

$$\exp[R(\rho_r - \rho_i)u + R(\sigma_r - \sigma_i)v] \delta^{k-j}(u, v) \sum_{s, \tau_r+1}^{\tau_r+1} \int_v^u \exp[R(\rho_i - \rho_r)\xi + \\ + R(\sigma_i - \sigma_r)v] \delta^{\mu_r+j-k-1}(\xi, v) \sum_1^n |\varphi_{s, i}(\xi, v)| d\xi + \int_v^{+\infty} \exp[R(\rho_i - \rho_r)U + \\ + R(\sigma_i - \sigma_r)\eta] \delta^{\mu_r+j-k-1}(U, \eta) \sum_1^n |\psi_{s, i}(U, \eta)| d\eta \Big\},$$

che, per ragioni analoghe alle precedenti, è maggiorata da

$$(28_3) \quad \sum_{s, \tau_r+1}^{\tau_r+1} \left\{ \frac{1}{\delta(u, v)} \int_v^u \delta^{\mu_r}(\xi, v) \sum_1^n |\varphi_{s, i}(\xi, v)| d\xi + \right. \\ \left. + \int_v^{+\infty} \delta^{\mu_r-1}(U, \eta) \sum_1^n |\psi_{s, i}(U, \eta)| d\eta \right\}.$$

IV. - Sia $R(\rho_i - \rho_r) = 0$, $R(\sigma_i - \sigma_r) > 0$; allora se $k \leq j - 1$ scegliamo per $\gamma_{r, k}$ la poligonale a); la solita espressione è maggiorata da

$$\begin{aligned}
& \exp R(\sigma_r - \sigma_i) v \cdot \delta^{k-j}(u, v) \sum_{s=r+1}^{\tau_{r+1}} \left\{ \int_V^u \exp R(\sigma_i - \right. \\
& \left. - \sigma_r) V \cdot \delta^{\mu_r+j-k-1}(\xi, V) \sum_1^n |\varphi_{s,t}(\xi, V)| d\xi + \right. \\
& \left. + \int_V^v \exp R(\sigma_i - \sigma_r) \eta \cdot \delta^{\mu_r+j-k-1}(u, \eta) \sum_1^n |\psi_{s,t}(u, \eta)| d\eta \right\} ;
\end{aligned}$$

sul secondo integrale si ragiona come in I; per quanto riguarda il primo, si ha $\exp R(\sigma_i - \sigma_r') V < \exp R(\sigma_i - \sigma_r) v$ e $\delta^{j-k-1}(\xi, V) < \delta^{j-k-1}(u, v)$, onde la precedente è maggiorata da

$$\begin{aligned}
(28_4) \quad & \sum_{s=r+1}^{\tau_{r+1}} \frac{1}{\delta(u, v)} \left\{ \int_V^u \delta^{\mu_r}(\xi, V) \sum_1^n |\varphi_{s,t}(\xi, V)| d\xi + \right. \\
& \left. + \int_V^v \delta^{\mu_r}(u, \eta) \sum_1^n |\psi_{s,t}(u, \eta)| d\eta \right\} .
\end{aligned}$$

Se invece è $k > j - 1$, allora si sceglierà per $\gamma_{i,t}$ la poligonale c' onde si ha la maggiorazione

$$\begin{aligned}
& \exp R(\sigma_r - \sigma_i) v \cdot \delta^{k-j}(u, v) \sum_{s=r+1}^{\tau_{r+1}} \left\{ \int_V^u \exp R(\sigma_i - \right. \\
& \left. - \sigma_r) \eta \cdot \delta^{\mu_r+j-k-1}(u, \eta) \sum_1^n |\psi_{s,t}(u, \eta)| d\eta + \right. \\
& \left. + \int_u^{+\infty} \exp R(\sigma_i - \sigma_r) V \cdot \delta^{\mu_r+j-k-1}(\xi, V) \sum_1^n |\varphi_{s,t}(\xi, V)| d\xi \right\} .
\end{aligned}$$

sul primo integrale si ragiona come al solito; sul secondo, si ha

$\exp R(\sigma_i - \sigma_r) V \cdot \delta^{r-k}(\xi, V) < \exp R(\sigma_i - \sigma_r) \cdot \delta^{r-k}(u, v)$, essendo $j - k \leq 0$, onde si ha la maggiorante

$$(28_5) \quad \sum_{s=1}^{\tau_{r+1}} \left\{ \frac{1}{\delta(u, v)} \int_V^v \delta^{kr}(u, \eta) \sum_{i=1}^n |\psi_{s,i}(u, \eta)| d\eta + \right. \\ \left. + \int_u^{+\infty} \delta^{kr-1}(\xi, V) \sum_{i=1}^n |\varphi_{s,i}(\xi, V)| d\xi \right\};$$

e così via di seguito.

Ora dalle ipotesi (20) e (20') segue che, fissato a piacere un numero positivo d , è possibile trovare un $T > 0$ tale che per $u > T$, $v > T$, sia

$$\sum_{s=1}^{\tau_{r+1}} \sum_{i=1}^n \int_T^{+\infty} \delta^{kr-1}(u, v) |\varphi_{s,i}(u, v)| du < d,$$

$$\sum_{s=1}^{\tau_{r+1}} \sum_{i=1}^n \int_T^{+\infty} \delta^{kr-1}(u, v) |\psi_{s,i}(u, v)| dv < d,$$

$$\sum_{s=1}^{\tau_{r+1}} \sum_{i=1}^n \int_T^{+\infty} \delta^{kr-1}(x, x) (|\varphi_{s,i}(x, x)| + |\psi_{s,i}(x, x)|) dx < d$$

$$r = 1, 2, \dots, \nu.$$

D'altra parte se $\omega(x) \geq 0$ è una funzione sommabile su $(x_0, +\infty)$, si ha

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_{x_0}^x x \omega(v) dx = 0 \quad (12).$$

(12) Cfr. S. FAEDO, l. c. in (1') p. 211...

Tenuto conto di ciò, si vede che, prendendo U e V abbastanza grandi, si può fare in modo che le espressioni $(28)_{1,2,3,4,5}$, e simili, siano tutte inferiori a d ; di più esse convergeranno a 0 per $u \rightarrow +\infty$, $v \rightarrow \infty$. Sarà perciò

$$|\Delta y_h^{(1)}| < \exp[R(\rho_i)u + R(\sigma_i)v] \delta^{j-1}(u, v) \cdot C_1 C_2 nd, \\ h = 1, 2, \dots, n;$$

dopo di ciò si ha

$$|\Delta y_h^{(2)}| < \exp[R(\rho_i)u + R(\sigma_i)v] \delta^{j-1}(u, v) \sum_1^v \sum_1^{\mu_r} \exp[R(\rho_r - \rho_i)u + \\ + R(\sigma_r - \sigma_i)v] \delta^{k-j}(u, v) nd C_1^2 C_2^2 \cdot (\gamma_{r,k}) \int_{\tau_r+1}^{\tau_r+1} \sum_1^n \exp[R(\rho_i - \rho_r)\xi + \\ + R(\sigma_i - \sigma_r)\eta] \cdot \delta^{\mu_r+j-k-1}(\xi, \eta) (|\varphi_{s,i}(\xi, \eta)| d\xi + |\psi_{s,i}(\xi, \eta)| d\eta)$$

che, con gli stessi ragionamenti di sopra, si trova essere maggiorata da

$$\exp[R(\rho_i)u + R(\sigma_i)v] \delta^{j-1}(u, v) (nd C_1 C_2)^2, \text{ ecc.}$$

Pertanto se si sceglie d in modo che sia $nd C_1 C_2 < 1$, e in conseguenza si scelgono U e V , si ha

$$(29) \quad \sum_0^\infty \Delta y_h^{(m)} = \exp(\rho_i u + \sigma_i v) \delta^{j-1}(u, v) [\delta^{1-j}(u, v) p_{h, \tau_i+j}(u, v) + \\ + O_{h, \tau_i+j}(u, v)], \quad h = 1, 2, \dots, n$$

dove $O_{h, \tau_i+j}(u, v)$ per ogni valore di h , indica una serie totalmente convergente la cui somma (i cui termini) tende a 0 per $u, v \rightarrow +\infty$. Se indichiamo con $\mathbf{y}_{\tau_i+j}^*$ il vettore che ha per componenti le (29), essendo lecito passare al limite per $m \rightarrow \infty$ nella (23) sotto al segno di integrale, si riconosce che $\mathbf{y}_{\tau_i+j}^*$ è

una soluzione di (13) associata a y_{τ_i+j} e, in un certo senso, asintotica a questa. Dando ad i successivamente i valori $1, 2, \dots, \nu$ e a j , per ogni i , i valori $1, 2, \dots, \mu_i$, si vengono ad individuare n soluzioni y_h^* , $h = 1, 2, \dots, n$, di (13) (associate alle y_h , $h = 1, 2, \dots, n$, di (12)), le quali riescono linearmente indipendenti. Infatti scriviamo la (22) per $y = y_{\tau_i+j}^*$ e $c = i_{\tau_i+j}$ come segue

$$y_{\tau_i+j}^* = W(u, v) (i_{\tau_i+j} + z_{\tau_i+j});$$

si è provato che

$\exp [R(\rho_r - \rho_i) + R(\sigma_r - \sigma_i) v] \delta^{k-j}(u, v) |z_{\tau_r+k, \tau_i+j}| \xrightarrow{u, v \rightarrow \infty} 0$ per ogni coppia $\tau_r + k, \tau_i + j$. Si ha

$$W^{-1} W^* = E + \|z_{hk}\| \quad (W^* = \|y_{hk}^*\|)$$

e

$$\det (E + \|z_{hk}\|) = 1 + \sum_1^n \sum_{\substack{1 \\ i_1 < i_2 < \dots < i_h}}^n i_1 i_2 \dots i_h \left| \begin{array}{c} z_{i_1 i_1} \dots z_{i_1 i_h} \\ \dots \dots \dots \\ z_{i_h i_1} \dots z_{i_h i_h} \end{array} \right| \xrightarrow{u, v \rightarrow \infty} 1$$

perchè nello sviluppo di ciascuno dei determinanti interni figurano dei prodotti $\Pi z_{\tau_r+k, \tau_i+j}$ nei quali i primi e i secondi indici assumono complessivamente gli stessi valori, onde

$$\Pi z_{\tau_r+k, \tau_i+j} = \Pi \exp [(\rho_r - \rho_i)u + (\sigma_r - \sigma_i)v] \delta^{k-j}(u, v) z_{\tau_r+k, \tau_i+j} \quad (13)$$

(13) Il teorema n. 4 si può facilmente estendere al caso più generale di un sistema variato non lineare (cfr. anche H. WEYL: *Comment on the preceding paper* [Am. J. of Math. LXVIII, 1946, 7-12], relativo al lavoro di N. LEVINSON: *The asymptotic behavior of a system of linear differential equations*, Ibid. 1-6). In luogo del sistema (13) si consideri il sistema

$$(13') \quad d y = [A y + \varphi(u, v, y)] du + [B y + \psi(u, v, y)] dv$$

con A e B matrici costanti permutabili; in ogni dominio della regione $u \geq 0$, $v \geq 0$ φ e ψ siano funzioni vettoriali di cui la prima, per ogni u , sia assolu-

5. - Caso del sistema non variato a coefficienti periodici.

Torniamo ora agl'integrali $z_1, z_2, \dots, z_n$ del n. 2. Si è già visto che $z_1 = \exp(m_1 u + n_1 v) g_1(u, v)$.

Orbene, con un ragionamento induttivo analogo a quello tenuto da FLOQUET⁽¹⁴⁾ (che qui per brevità omettiamo), e tenendo presente la permutabilità delle matrici $\mathcal{M}$ ed $\mathcal{N}$, si riconosce che il gruppo di cui in (9) può essere scritto nella seguente forma

$$(30) \quad z_i = \exp(m_i u + n_i v) \sum_{0 \leq h+k \leq i-1} u^h v^k g_{h,k}^{(v)}(u, v) \quad i = 1, 2, \dots, \mu_1,$$

ove m_i e n_i sono gli esponenti caratteristici definiti in (7) e i $g_{h,k}^{(v)}(u, v)$ sono vettori periodici in u e v di periodo ω ; analogamente per i restanti $\nu - 1$ gruppi.

Chiamati, come al solito, $y_1(u, v), \dots, y_n(u, v)$ tali n integrali fondamentali, la loro matrice $W(u, v)$ si può scrivere nella forma $\|W_1 W_2 \dots W_n\|$ con

$$W_i = \begin{vmatrix} y_{1,\tau_i+1} & \dots & y_{1,\tau_i+1} \\ \dots & \dots & \dots \\ y_{n,\tau_i+1} & \dots & y_{n,\tau_i+1} \end{vmatrix} \quad i = 1, 2, \dots, \nu; \tau_i = \mu_1 + \dots + \mu_{i-1}; \mu_0 = 0,$$

tamente continua rispetto a v e la seconda, per ogni v , sia assolutamente continua rispetto ad u ; siano lipschitziane in y :

$$\begin{aligned} |\varphi_i(u, v, y) - \varphi_i(u, v, \bar{y})| &\leq |\bar{y} - y| f_i(u, v) \\ |\psi_i(u, v, y) - \psi_i(u, v, \bar{y})| &\leq |\bar{y} - y| g_i(u, v) \end{aligned} \quad i = 1, 2, \dots, n;$$

soddisfino quasi-dappertutto le condizioni di completa integrabilità; esistano delle funzioni $F_r(u)$, $G_r(v)$ non negative ($r = 1, 2, \dots, n$) e sommabili su $(0, +\infty)$ tali che, quasi-dappertutto rispetto a v e, rispettivamente, rispetto ad u , sia

$$\mathfrak{L}^{\mu_r-1}(u, v) f_i(u, v) \leq F_r(u), \quad \mathfrak{L}^{\mu_r-1}(u, v) g_i(u, v) \leq G_r(v), \quad \tau_r + 1 \leq i \leq \tau_{r+1} \quad r = 1, 2, \dots, \nu.$$

Si può allora ripetere tutto quanto è stato detto al n. 4.

(14) Cfr. G. FLOQUET, l. c. in (2).

Vogliamo provare che *i complementi algebrici degli elementi della colonna di posto $r_i + h$ in W sono dati dal prodotto dell'exp $[-\rho_i u - \sigma_i v]$ per dei polinomi in u e v , con coefficienti funzioni periodiche di periodo ω in u e v , di grado al più $\mu_i - h$; $h = 1, 2, \dots, \mu_i$; $i = 1, 2, \dots, \nu$.*

Posto

$$y = Tz \quad \text{con} \quad T = \begin{pmatrix} y_{11} & 0 & \dots & 0 \\ y_{21} & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_{n1} & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}, \quad y_{11} \neq 0$$

si ha da (1)

$$(31) \quad dz = T^{-1} \left(AT - \frac{\partial T}{\partial u} \right) z du + T^{-1} \left(BT - \frac{\partial T}{\partial v} \right) z dv$$

che si spezza nell'equazione

$$(32) \quad dz_1 = \sum_k^n \frac{a_{1k}}{y_{11}} z_k du + \sum_k^n \frac{b_{1k}}{y_{11}} z_k dv$$

e nel sistema

$$(33) \quad dz_i = \sum_k^n \left(a_{ik} - a_{1k} \frac{y_{i1}}{y_{11}} \right) z_k du + \sum_k^n \left(b_{ik} - b_{1k} \frac{y_{i1}}{y_{11}} \right) z_k dv$$

$i = 2, 3, \dots, n.$

Dall'ipotesi che quasi-dappertutto sia $\frac{\partial A}{\partial v} + AB = \frac{\partial B}{\partial u} + BA$

ed essendo quasi-dappertutto $\frac{\partial^2 T}{\partial u \partial v} = \frac{\partial^2 T}{\partial v \partial u}$, segue che (31) è completamente integrabile. Inoltre i coefficienti del sistema (31) sono funzioni periodiche di periodo ω in u e v ; infatti, poichè le y_{ii} ($i = 1, 2, \dots, n$) sono le componenti di una soluzione

periodica di seconda specie, i rapporti di due qualsiasi di esse sono funzioni propriamente periodiche.

Ora, avendosi $W(u, v) = T(u, v) Z(u, v)$, segue

$$Z(u + \omega, v) = T^{-1}(u + \omega, v) T(u, v) Z(u, v) \mathcal{M},$$

$$Z(u, v + \omega) = T^{-1}(u, v + \omega) T(u, v) Z(u, v) \mathcal{N}.$$

D'altra parte, essendo

$$T^{-1}(u, v) = \begin{vmatrix} 1/y_{11} & 0 & \dots & 0 \\ -y_{21}/y_{11} & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -y_{n1}/y_{11} & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix}$$

si ha

$$T^{-1}(u + \omega, v) T(u, v) = \begin{vmatrix} 1/\rho_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix},$$

$$T^{-1}(u, v + \omega) T(u, v) = \begin{vmatrix} 1/\sigma_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix}$$

e poichè

$$Z = \begin{vmatrix} 1 & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ 0 & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & x_{n2} & \dots & x_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \cdot \\ 0 & Z_1 \end{vmatrix}$$

si ha

$$\begin{aligned} Z(u + \omega, v) &= \begin{vmatrix} 1 & \cdot \\ 0 & Z_1(u + \omega, v) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1/\rho_1 & 0 \\ 0 & E \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & \cdot \\ 0 & Z_1(u, v) \end{vmatrix} \mathcal{M} \\ &= \begin{vmatrix} 1/\rho_1 & 0 \\ 0 & E \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & \cdot \\ 0 & Z_1(u, v) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \rho_1 & \cdot \\ 0 & \mathcal{M} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \cdot \\ 0 & Z_1(u, v) \end{vmatrix} \mathcal{M} \end{aligned}$$

e quindi

$$Z_1(u + \omega, v) = Z_1(u, v) \mathcal{M}^1;$$

analogamente si trova

$$Z_1(u, v + \omega) = Z_1(u, v) \mathcal{N}^1$$

(con $\mathcal{N}^1$ rispetto ad $\mathcal{N}$ analogo di $\mathcal{M}^1$ rispetto ad $\mathcal{M}$). Segue che le matrici $\mathcal{M}^1$ ed $\mathcal{N}^1$ sono ancora permutabili e hanno gli stessi autovalori di $\mathcal{M}$ ed $\mathcal{N}$ salvo che ρ_1 e σ_1 sono multipli di ordine minore di una unità rispetto a quello che erano relativamente ad $\mathcal{M}$ ed $\mathcal{N}$. Giunti a questo punto si può ripetere un ragionamento fatto da FAEDO⁽¹⁵⁾ che porta a concludere quanto si è affermato.

Poichè la presenza, attualmente, di coefficienti periodici, anzichè costanti, nelle p_{h,τ_r+k} , q_{s,τ_r+k} (per adoperare le notazioni già usate) permette ancora di effettuare delle maggiorazioni come le (27) e di ripetere tal quale tutti i ragionamenti fatti nella seconda parte del n. 4, si conclude che: *il teorema colà dimostrato sussiste invariato anche se il sistema di partenza, anzichè essere a coefficienti costanti, è a coefficienti periodici (beninteso che ora, al posto degli autovalori delle matrici A e B, figurano gli esponenti caratteristici definiti in (7)).*

(¹⁵) Cfr. S. FAEDO, l. c. in (¹⁰), pp. 210-211.

Quando il presente lavoro era già alla stampa, sono venute a conoscenza di due recentissime note di E. LEVI dal titolo «*Sul comportamento asintotico delle soluzioni dei sistemi di equazioni differenziali lineari omogenee*» [Rend. Acc. Naz. Lincei (8) VIII (1950) pp. 465-470 e (8) IX (1950) pp. 26-31] in cui si dà un teorema che perfeziona il risultato di S. FAEDO citato in (¹¹) ma che può ulteriormente perfezionarsi come abbiamo indicato in (¹¹) stesso.

Precisamente, riferendosi al sistema

$$y' = [A + \Phi(x)] y$$

S. FAEDO ha provato l'esistenza di una n -pla fondamentale di integrali

asintotici (in senso analogo a quello indicato nelle pagine che precedono) agli integrali di una n -pla fondamentale relativa al sistema $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y}$, sotto la condizione che sia

$$\int_0^{+\infty} x^{\nu-1} |\varphi_{h,k}(x)| dx < +\infty, \quad h, k = 1, 2, \dots, n,$$

se ν è il massimo tra gli ordini di molteplicità degli autovalori di $\mathbf{A}$.

La condizione è data da E. LEVI è la medesima ove per ν s'intenda il massimo tra gli esponenti dei divisori elementari relativi alla matrice $\mathbf{A}$.

Orbene, se ci riferiamo al sistema normalizzato, ove $\mathbf{A}$ sia nella forma canonica di JORDAN

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1 & & \\ & \mathbf{A}_2 & \\ & & \ddots \\ & & & \mathbf{A}_m \end{pmatrix} \text{ con } \mathbf{A}_i = \begin{pmatrix} \rho_i E_{i_1} + U_{i_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \rho_i E_{i_{p_i}} + U_{i_{p_i}} \end{pmatrix} \begin{cases} i_1 + i_2 + \dots + i_{p_i} = \mu_i \\ \mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_m = n \end{cases}$$

si riconosce (come caso particolare dei risultati conseguiti nelle pagine che precedono) che i ragionamenti di S. FAEDO e le relative conseguenze restano immutati qualora si facciano le ipotesi meno restrittive

$$\int_0^{+\infty} x^{i_j-1} |\varphi_{h,k}(x)| dx < +\infty$$

per $k = 1, 2, \dots, n$; $h = \tau_{i-1} + i_1 + \dots + i_{j-1} + 1, \dots, \tau_{i-1} + i_1 + \dots + i_j$; $j = 1, 2, \dots, p_i$; $i = 1, 2, \dots, m$ (essendo, per ogni i , $i_0 = 0$).