RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

RENATO GANDIN

Sulla determinazione geometrico-funzionale del gruppo dei punti di contatto di un sistema di spazi con una curva algebrica

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 19 (1950), p. 54-61

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1950__19__54_0>

SULLA DETERMINAZIONE GEOMETRICO-FUNZIONALE DEL GRUPPO DEI PUNTI DI CONTATTO DI UN SISTEMA DI SPAZI CON UNA CURVA ALGEBRICA

Nota (*) *di* RENATO GANDIN (*a Verona*).

Introduzione. - Il problema generale degli spazi plurisecanti una curva algebrica C_p^n di ordine n e di genere p, priva di singolarità puntuali, immersa in uno spazio ad r dimensioni si può dire consista nella determinazione degli S_k dello S_r che hanno con la curva contatti ν_1, $\nu_2 \dots \nu_t$ — punto essendo $\nu_i \geq 1$; è noto che, perchè tali spazi esistano, occorre sia soddisfatta la seguente uguaglianza:

$$(r-k)\sum_{i=1}^{t} \nu_i - t = (k+1)(r-k) .$$

Tale problema, per le curve razionali, dal punto di vista numerativo, è stato risolto da SEVERI mentre la trattazione completa dal punto di vista *geometrico-funzionale* e per una curva di genere p, non mi risulta conosciuta.

Scopo della presente Nota è, giusta quanto detto, di offrire la risoluzione del seguente problema particolare, perchè poi, in una successiva generalizzazione del metodo usato che è nella sostanza quello del mio compianto Maestro ANNIBALE COMESSATI, sia possibile conseguire la dimostrazione della formula di equivalenza nel caso generale:

(*) Pervenuta in Redazione il 30 giugno 1949.

« *Determinazione del gruppo dei contatti* ν — *punto degli* S_{r-3} *di* S_r *con una* C_p^n *di* S_r *aventi con la curva oltre l'incontro* ν — *punto, uno* $(r-\nu-2)$ — *punto ed un ulteriore semplice incontro* ».

Preliminari. - Giova innanzi tutto avvertire che, indicate con $a_i = a_i\ (n\,, r\,, p\,, i)$ e $b_i = b_i\ (n\,, r\,, p\,, i)$ due funzioni intere dell'ordine n, del genere p, della curva C_p^n, supposta priva di singolarità puntuali, della dimensione r dello spazio ambiente e dell'indice $i\ (i = 1\,,\ 2\,, \ldots\ r-\nu-2)$, con G e K rispettivamente la generica sezione iperpiana ed un gruppo canonico della curva l'interpretazione *geometrico-funzionale*, nel senso di Severi, del gruppo Z_i incognito di cui all'enunciato, si esprimerà mediante una equivalenza del tipo:

$$Z_i \equiv a_i G + b_i K\,, \tag{1}$$

che sarà dimostrata seguendo il metodo di induzione (1) cioè ammettendo la formula

$$Z_{i-1} \equiv a_{i-1} G + b_{i-1} K\,,$$

dove a_{i-1} e b_{i-1} hanno ovvio significato, cioè $a_{i-1} = a_{i-1}\ (n\,, r-1\,, p\,, i-1)$, $b_{i-1} = b_{i-1}\ (n\,, r-1\,, p\,, i-1)$, e deducendone quindi la (1).

Il procedimento che seguiremo dimostrerà che l'equivalenza (1) vale per $i = 1$ ed in più darà modo di esprimere le funzioni a_i e b_i mediante formule ricorrenti; quando infine tali funzioni saranno note il numero N_i degli S_{r-3} di cui all'enunciato sarà dato dalla formula

$$N_i = \frac{1}{\alpha}\,[n\,a_i + 2\,(p-1)\,b_i]\,, \tag{2}$$

che è l'interpretazione numerativa della (1) ed in cui α è un intero che in seguito verrà precisato.

(1) Il procedimento usato per risolvere il problema enunciato è analogo a quello adoperato da A. Comessatti nella Nota « *Determinazione dei gruppi di* $(r+1)$ *punti comuni ad* $(r+1)$ *serie lineari* g_n^r ». [Atti del Reale Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, t. 69, P. II, pag. 871].

Costruzione di una corrispondenza sulla C_p^n. - Prima di risolvere il problema di cui all'enunciato è opportuno premettere la determinazione *geometrico-funzionale* del gruppo dei contatti degli S_{r-3} aventi un incontro $(r-3)$ — punto e due ulteriori semplici incontri comuni C_p^n di S_r cioè, insomma, risolvere il problema nel caso $\nu = 1$.

Allo scopo, fissato un generico punto P sulla C_p^n, si consideri la corrispondenza T che nasce dall'associargli il gruppo dei contatti $(r-4)$ — punto degli S_{r-3} passanti per P ed ulteriormente bisecanti.

Indicando con Y il gruppo dei punti P' omologhi di P nella T ed osservando che tale gruppo è equivalente a quello dei contatti $(r-4)$ — punto degli S_{r-4} aventi un incontro $(r-4)$ e due ulteriori semplici incontri con la Γ_p^{n-1}, proiezione della C_p^n da P in un S_{r-1}, tenendo presente quanto precedentemente detto, si potrà scrivere per Y, la seguente equivalenza:

$$Y \equiv a'_{i-1}\,(G - P) + b'_{i-1}\,K \,, \tag{3}$$

dove con a'_{i-1} e b'_{i-1} si sono indicate le funzioni prima definite dopo aver sostituito in esse ad n, r, i rispettivamente $(n-1)$, $(r-1)$ ed $(i-1)$.

Per quanto riguarda la corrispondenza inversa T^{-1} si noti che, fissato P' sulla C_p^n, i punti P da cui esso proviene sono quelli di appoggio semplice degli S_{r-3} aventi un incontro $(r-4)$ — punto in P' ed ulteriormente trisecanti. Indicando pertanto con X il gruppo dei punti P', omologhi di P nella T^{-1}, osservando che tale gruppo è equivalente a quello delle trisecanti la Γ_p^{n-r+4} di S_4, come facilmente si deduce proiettando su detto spazio la C_p^n dallo S_{r-5} osculatore in P' e ricordando la relativa formula di equivalenza nota (2), dopo aver sostituito in essa ad n e G rispettivamente $(n-r+4)$ e $\{G-(r-4)P\}$, si potrà scrivere, per X, la seguente espressione:

(2) Cfr. R. Gandin: « *Risoluzione geometrico funzionale del problema degli spazi plurisecanti una curva algebrica immersa in uno spazio a tre, quattro e cinque dimensioni* » [Memorie del R. Istituto Veneto di Scienze Lettere ed Arti, Vol. XXX, N. 5].

$$(4) \qquad X \equiv \left\{ \binom{n-r}{2} - (p-1) \right\} \left\{ G - (r-4)\, P \right\} - (n-r-2)\, K,$$

da cui discende che la corrispondenza T istituita fra i punti della C_p^n è dotata di *valenza*

$$\gamma = \left\{ \binom{n-r}{2} (r-4) - (p-1)(r-4) \right\}.$$

Notando che le coincidenze della T cadono solamente nei punti di contatto $(r-3)$ — punto degli S_{r-3} di cui detto, applicando il *principio* di Cayley - Brill si potrà scrivere, per il gruppo Z_i incognito, la seguente equivalenza:

$$(5) \qquad Z_i \equiv \left\{ a'_{i-1} + \binom{n-r}{2} - (p-1) \right\} G +$$

$$+ \left\{ b'_{i-1} - (n-r-2) + \binom{n-r}{2} (r-4) - (p-1)(r-4) \right\} K.$$

Da tale formula discende inoltre che i coefficienti di G e di K altro non sono che le espressioni che competono rispettivamente alle funzioni a_i e b_i.

La formula (1) rimane quindi dimostrata nella ipotesi che valga la (2) ed in più sono state trovate espressioni ricorrenti per a_i e b_i. Rimane da provare che la (1) vale per $i = 1$ e ciò si ottiene molto semplicemente considerando che in tal caso il problema è già risolto poichè si riduce alla determinazione del significato funzionale del gruppo dei punti di appoggio delle rette trisecanti una C_p^n di S_4; ricordando perciò la formula di equivalenza nota, ri potrà scrivere, per il gruppo Z_1, la seguente relazione:

$$(6) \qquad Z_1 \equiv \left\{ \binom{n-4}{2} - (p-1) \right\} G - (n-6)\, K,$$

dalla quale si deduce, inoltre, che per $i = 1$ i cofficienti a_1 e b_1 hanno rispettivamente le espressioni:

$$(7) \qquad a_1 \equiv \left\{ \binom{n-4}{2} - (p-1) \right\}, \quad b_1 = -(n-6);$$

nel caso $i = 2$, adoperando ancora una volta la corrispondenza T precedentemente costruita, ed applicando il *principio* di Cayley-Brill si ottiene, per Z_2, la seguente equivalenza:

$$(8) \qquad Z_2 \equiv \left\{ 2\binom{n-5}{2} - 2(p-1) \right\} G +$$
$$+ \left\{ \binom{n-5}{2} - 2(n-7) - (p-1) \right\} K:$$

da cui si deduce inoltre che, per $i = 2$, i coefficienti a_2 e b_2 hanno le espressioni seguenti:

$$a_2 = \left\{ 2\binom{n-5}{2} - 2(p-1) \right\},$$
$$b_2 = \left\{ \binom{n-5}{2} - 2(n-7) - (p-1) \right\}.$$

Da quanto precede si riesce ad intuire la formula generale che è, come sarà ora dimostrato, data dalla seguente equivalenza:

$$(9) \qquad \boxed{\begin{aligned} Z_{r-3} \equiv \left\{ (r-3)\binom{n-r}{2} - (r-3)(p-1) \right\} G + \\ + \left\{ \binom{r-3}{2}\binom{n-r}{2} - (r-3)(n-r-2) - \binom{r-3}{2}(p-1) \right\} K \end{aligned}}$$

con la convenzione che $\binom{r-3}{2} = 0$ quando $(r-3) < 2$.

Verifichiamo innanzi tutto la (9) per $i = 1$, cioè per $r = 4$; se ne ricavano immediatamente le (6) e (7).

Ciò fatto, ammettiamo la sua validità per il valore $(r-1)$ di r ed $(n-1)$ di n e dimostriamola per il valore di r ed n servendoci della (5).

Posto $(r-1)$ in luogo di r ed $(n-1)$ in luogo di n nella (9) e tenuto conto della (5) si ha, per a_{r-3}, la seguente espressione:

$$a_{r-3}=\left\{(r-4)\binom{n-r}{2}-(r-4)(p-1)+\binom{n-r}{2}-(p-1)\right\},$$

da cui, dopo elementari trasformazioni,

$$a_{r-3}=\left\{(r-3)\binom{n-r}{2}-(r-3)(p-1)\right\}.$$

Procedendo in maniera affatto analoga si perviene, per b_{r-3}, alla seguente formula:

$$b_{r-3}=\left\{\binom{r-4}{2}\binom{n-r}{2}-(r-4)(n-r-2)-\binom{r-4}{2}(p-1)-\right.$$
$$\left.-(n-r-2)+(r-4)\binom{n-r}{2}-(p-1)(r-4)\right\},$$

cioè dopo ovvie trasformazioni,

$$b_{r-3}=\left\{\binom{r-3}{2}\binom{n-r}{2}-(r-3)(n-r-2)-\binom{r-3}{2}(p-1)\right\}.$$

L'interpretazione numerativa della (9) si ottiene ponendo n in luogo di G e $2(p-1)$ in luogo di K e porge, per il numero N_{r-3} delle coincidenze, la seguente espressione:

$$N_{r-3}=3!\,\frac{r-3}{2}\binom{n-r-2}{3}+ \tag{10}$$
$$+\frac{r-3}{2}\Big\{n(n-1)(r-4)-2n(r-1)(r-3)+$$
$$+r(r-1)(r-2)\Big\}p-2\Big\{(r-3)(r-4)\Big\}\binom{p}{2}.$$

Il risultato conseguito mediante l'uso della corrispondenza T istituita fra i punti della C_p^n ci permette ora di risolvere immediatamente anche il problema di cui all'enunciato usando una corrispondenza del tutto analoga.

Infatti, considerata sulla C_p^n la corrispondenza T' che associa al generico punto P il gruppo dei punti di appoggio semplice degli S_{r-3} aventi in P un incontro $(\nu-1)$ — punto, uno $(r-\nu-2)$ e due ulteriori semplici incontri, e notando che, per quanto riguarda la corrispondenza inversa T'^{-1}, valgono considerazioni simili a quelle già espresse precedentemente, si giunge con il procedimento già adoperato, alla seguente formula di equivalenza, per il gruppo Z_ν dei contatti degli S_{r-3} di cui all'enunciato:

$$\boxed{\begin{aligned} Z_\nu \equiv & \left\{ \nu(r-\nu-2)\binom{n-r}{2} - \nu(r-\nu-2)(p-1) \right\} G + \\ & + \left\{ \nu\binom{r-\nu-2}{2}\binom{n-r}{2} - \nu(r-\nu-2)(n-r-2) - \right. \\ & - \nu\binom{r-\nu-2}{2}(p-1) + \nu(r-\nu-2)\binom{n-r}{2} - \\ & \left. - (\nu-1)(r-\nu-2)(p-1) \right\} K \end{aligned}} \tag{11}$$

la cui interpretazione numerativa, che si ottiene dalla (11), come più volte detto, porge, dopo qualche trasformazione, la seguente espressione:

$$N_\nu = 3!\,\frac{\nu_1\,\nu_2}{\alpha}\binom{n-r+2}{3} + \tag{12}$$

$$+ \frac{\nu_1\,\nu_2}{\alpha}\left\{ n(n-1)(r-4) - 2n(r-1)(r-3) + \right.$$

$$+ r(r-1)(r-2)\left\{p + \frac{4}{\alpha}\left\{2(n-r+2)\binom{\nu_1}{2}\binom{\nu_2}{2} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \nu_1 \nu_2 (2\nu_1\nu_2 - r + 2)\right\}\binom{p}{2}\right\},$$

dove $\nu_2 = (r - \nu_1 - 2)$ ed $\alpha = 1$ se $\nu_1 \neq \nu_2$ ed entrambi da 1, $\alpha = 2$ se $\nu_1 = \nu_2$ o se $\nu_2 = 1$ ed $\alpha = 3$ se $\nu_1 = \nu_2 = 1$, formula che coincide con quella nota (3).

(3) Cfr. F. SEVERI: « *Sopra alcune singolarità delle curve di un iperspazio* ». [Memorie della R. Accademia Scienze di Torino, t. 51 (1904)] pag. 95.