

RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

GIUSEPPE COLOMBO

Sulle oscillazioni non-lineari in due gradi di libertà

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 19 (1950), p. 413-441

[<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1950__19__413_0>](http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1950__19__413_0)

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1950, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SULLE OSCILLAZIONI NON - LINEARI IN DUE GRADI DI LIBERTÀ

Memoria () di GIUSEPPE COLOMBO (a Padova)*

Lo studio delle oscillazioni non-lineari costituisce ormai un capitolo notevole della meccanica e dell'analisi. In questi ultimi anni la notevole produzione scientifica in questo campo ha portato ad una sistemazione pressochè definitiva l'argomento delle oscillazioni libere in un grado di libertà ⁽¹⁾. Sulle oscillazioni non lineari forzate i recenti lavori di N. LEVINSON ⁽²⁾ e M. L. CARTWRIGHT - J. E. LITTLEWOOD ⁽³⁾ hanno bene messo in luce il fenomeno che si presenta spesso molto complicato. Altrettanto, per quanto mi consta, non si può dire per il problema

(*) Pervenuta in Redazione il 16 giugno 1950.

(1) N. MINORSKI: *Introduction to non-linear mechanics*. [S. W. Edwards, 1947, Ann. Arbor, Michigan].

A. A. ANDRONOW and C. E. CHAIKIN: *Theory of oscillations*, [Princeton. Un. Press. 1949].

Di questo argomento si sono attivamente occupati in Italia il prof. DARIO GRAFFI fin dal 1940 ed ultimamente il prof. GIOVANNI SANSONE. Si veda per esempio: D. GRAFFI: *Sopra alcune equazioni differenziali non lineari della fisica matematica*. [Mem. Accad. Sci. Ist. Bologna. Cl. Sci. Fis. (9) 7, 121-129 (1940)]. *Sopra alcune equazioni differenziali della radiotecnica*, [stessa rivista, (9) 9, 145-153, (1942)]. G. SANSONE: *Valutazione asintotica degli integrali sulla equazione di Liénard che per $t \rightarrow -\infty$ tendono allo zero*, [Atti Accad. Naz. Lincei. Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. (8) 6, 13-18, (1949)]. *Sopra una classe di equazioni di Liénard prive di integrali periodici*. [stessa rivista, (8) 6, 156-160 (1949)].

(2) N. LEVINSON: *A second order differential equation with singular solutions*, [Ann. of Math. vol. 50 (1949), pp. 127-153].

(3) M. L. CARTWRIGHT and J. E. LITTLEWOOD: *On non-linear differential equation of the second order: 1° The equation $\ddot{y} - k(1 - y^2)\dot{y} + y = 0$*

delle oscillazioni non-lineari in due gradi di libertà. A qualche risultato anche notevole, si giunge considerando sistemi per i quali le due equazioni differenziali che descrivono il fenomeno si possono far degenerare dal secondo al primo ordine ⁽⁴⁾; ma è evidente che per avere un'idea completa del fenomeno bisognerà studiare i sistemi *non degenerati*. In questo ultimo tempo mi sono occupato di particolari sistemi di questo tipo ed ho ottenuto i risultati che espongo nel presente lavoro.

1. - Posizione del problema e riassunto dei risultati ottenuti.

Quando si accoppiano elasticamente un pendolo di FROUDE con un pendolo composto, oppure due pendoli di FROUDE con caratteristiche in generale diverse, scrivendo le equazioni differenziali che reggono il moto, si perviene rispettivamente a sistemi di questi due tipi, sostanzialmente diversi tra di loro:

$$(1) \quad \begin{cases} \ddot{x} - (\alpha_1 - \beta_1 x^2) \dot{x} + \omega_1^2 x + M_1 y = 0 \\ \ddot{y} + K \dot{y} + \omega_2^2 y + M_2 x = 0 \end{cases}$$

$$(2) \quad \begin{cases} \ddot{x} - (\alpha_1 - \beta_1 x^2) \dot{x} + \omega_1^2 x + M_1 y = 0 \\ \ddot{y} - (\alpha_2 - \beta_2 y^2) \dot{y} + \omega_2^2 y + M_2 x = 0 \end{cases}$$

ove $K, \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \omega_1^2, \omega_2^2$ sono costanti positive, M_1, M_2 sono costanti. Allo stesso problema analitico si giunge in radiotecnica quando si voglia studiare il comportamento di due circuiti accoppiati capacitivamente, nel caso che uno dei due sia triodico

$= b \lambda k$ con $(\lambda t + \alpha)$, k large. [J. London Math. Soc. vol. 20 (1945) pp. 180-189]. II° The equation $\ddot{y} + k f(y) \dot{y} + g(y, k) = p_1(t) + k p_2(t)$; $k > 0, f(y) \geq 1$. [Ann. of Math. vol. 48 (1947) pp. 472-494]. III° The equation $\ddot{x} - k(1 - x^2) \dot{x} + x = p + k \lambda \omega(\lambda t + \alpha)$, K small and λ near 1. [Proc. of the Cambridge Phil. Soc. vol. 45 (1949) pp. 495-501].

⁽⁴⁾ Audronov and Chaikin testo citato in 1, p. 266.

e l'altro lineare [sistema 1)], oppure che siano tutti e due triodici [sistema 2)].

La complessità del problema dal punto di vista analitico appare evidente appena si consideri che essa è certamente legata ad un'altra questione che pur essendo sorta negli ultimi anni è già stata tanto dibattuta. Intendo la già citata questione delle oscillazioni forzate non lineari in un grado di libertà, sorta con il problema della sincronizzazione automatica di un oscillatore triodico ⁽⁵⁾, cioè, in termini analitici, la questione dello studio delle soluzioni periodiche, e della loro stabilità, dell'equazione:

$$(3) \quad \ddot{x} + K(x^2 - 1)x + \omega^2 x = e(t),$$

ove $e(t)$ è una funzione periodica del tempo.

La varietà e la complessità dei casi che si presentano come la possibilità di moti discontinui ricorrenti, nel senso di BIRKHOFF ⁽⁶⁾, è stata messa in evidenza recentemente nei notevoli e brillanti lavori di N. LEVINSON e CHARTWRIGHT-LITTLEWOOD citati più sopra.

Tutto lascerebbe prevedere che nel caso che ci siamo proposti di studiare, succedano cose analoghe. Mi è sembrato perciò non privo di interesse poter stabilire la possibilità dell'esistenza di soluzioni periodiche per sistemi del tipo (1) e (2). Ho potuto provare l'esistenza di tali soluzioni nel caso che il prodotto $M_1 M_2$ sia in modulo sufficientemente piccolo (il sufficientemente intendendosi relativo alle altre caratteristiche del sistema), cioè che l'accoppiamento tra i due pendoli o tra i due circuiti sia sufficientemente lasco. Anzi osservo alla fine che nel caso di sistemi del tipo (2) si intravede l'esistenza di due soluzioni periodiche che possono non coincidere. In ognuna di esse uno dei nostri due sistemi oscilla in prossimità della oscillazione propria. Può darsi che nessuna delle due soluzioni periodiche sia stabile, e che il sistema oscilli un po' sull'una, un po' sull'altra.

⁽⁵⁾ E. V. APPLETON: [Proc. Cambridge Phil. Soc. 21 (1922), 231-48].
B. VAN DER POOL. [Phil. Mag. 3 (1927), pp. 65-80].

⁽⁶⁾ G. D. BIRKHOFF: *Surface transformation and their dynamical application*. [Acta Math. vol. 43 (1922) pp. 1-119].

Ho dato inoltre dei teoremi che mi sembrano interessanti per le equazioni del tipo (3) con $e(t)$ funzione continua ed opportunamente limitata qualunque (e quindi non necessariamente periodica).

Si viene anche a provare una zona di stabilità intorno alla soluzione periodica trovata, non però nel senso che la soluzione sia stabile, ma solo nel senso che le soluzioni sufficientemente prossime non si scostano da essa di più di una certa quantità finita.

La questione è ben lontana dall'essere completamente risolta anche perchè questa che noi faremo è solamente un'analisi qualitativa del fenomeno.

Il metodo qui seguito è una generalizzazione del metodo già usato in un mio precedente lavoro (7).

2. - Un teorema nell'equazione (3).

Si consideri l'equazione (3) ove K e ω^2 sono costanti positive, $e(t)$ è una funzione continua qualunque di t soddisfacente alla sola condizione

$$(4) \quad |e(t)| \leq \rho < \omega^2.$$

L'equazione (3) equivale ovviamente al sistema

$$(5) \quad \frac{dx}{dt} = v, \quad \frac{dv}{dt} = K(1 - x^2)v - \omega^2 x + e(t).$$

Siano x e v coordinate cartesiane di un punto di un piano. Una soluzione generica di (5) rappresenta sul piano una traiettoria di equazioni parametriche $x = x(t)$, $v = v(t)$; ovviamente di tali traiettorie ne passa per ogni punto una semplice infinità. Ci proponiamo di dimostrare che:

Esiste una curva Γ semplice chiusa e simmetrica rispetto all'origine tale che, se P è un suo punto, la semitraiettoria $\gamma^+(P)$ appartiene completamente alla regione finita S del piano (u, v) delimitata da Γ .

(7) Questo volume pag. 114.

DIMOSTRAZIONE ⁽⁸⁾: Si noti, per cominciare, che dalle (5) si ha immediatamente:

$$(6) \quad \frac{d}{dt} (v^2 + \omega^2 x^2) = 2 K (1 - x^2) v^2 + 2 v e(t),$$

e che da questa si deducono in base alla ipotesi (4) le seguenti disequaglianze

$$(6') \quad \text{per } v > 0 \quad \frac{d}{dt} \left[v^2 + \omega^2 \left(x - \frac{\rho'}{\omega^2} \right)^2 \right] < 2 K (1 - x^2) v^2$$

$$(6'') \quad \text{per } v < 0 \quad \frac{d}{dt} \left[v^2 + \omega^2 \left(x + \frac{\rho'}{\omega^2} \right)^2 \right] < 2 K (1 - x^2) v^2$$

dove abbiamo indicato con ρ' un qualunque numero maggiore di ρ e minore di ω^2 .

Si consideri ora il sistema

$$(5') \quad \frac{dx}{dt} = v, \quad \frac{dv}{dt} = K(1 - x^2)v - \omega^2 x + \rho'$$

ed il punto A di coordinate $(1, v)$ con $v_0 > 0$. Poichè nel sistema (5') non compare esplicitamente la variabile t , se si considera la soluzione di (5') soddisfacente alle condizioni iniziali $x(t_0) = 1$, $v(t_0) = v_0$, questa rappresenta una traiettoria γ_1 indipendente dal valore t_0 prefissato. Vedremo ora che la semi-traiettoria $\gamma^+(A)$ di γ_1 , incontra l'asse x , per la prima volta, in un punto B che soddisfa alle

$$(7) \quad 1 < x_B < \frac{\rho'}{\omega^2} + \frac{1}{\omega} \left(v_0^2 + \omega^2 \left(1 - \frac{\rho'}{\omega^2} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

⁽⁸⁾ Il procedimento usato nella dimostrazione di questo teorema ha affinità con quello usato da N. LEVINSON e O. SMITH nel lavoro: *A general equation for relaxation oscillations*. Duke Math. J. 9, 382-403 (1942).

Per dimostrarlo si consideri la regione finita R_1 del quadrante $x \geq 1$, $v \geq 0$ delimitata dall'arco AA_1 , contenuto in questo quadrante, dell'ellisse e_1 di equazione

$$(8) \quad v^2 + \omega^2 \left(x - \frac{\rho'}{\omega^2} \right)^2 = v_0^2 + \omega^2 \left(1 - \frac{\rho'}{\omega^2} \right)^2$$

e si osservi che nei punti di questo quadrante, relativamente al sistema (5'), risulta:

$$(8') \quad \frac{d}{dt} \left(v^2 + \omega^2 \left(x - \frac{\rho'}{\omega^2} \right)^2 \right) = 2K(1 - x^2)v^2 \leq 0.$$

Ora la semitraiettoria $\gamma^+(A)$ di γ_1 penetra in R_1 al crescere di t , perchè è soddisfatta in A , assieme alla precedente relazione, anche la relazione $\frac{dx}{dt} = v > 0$. Essa ovviamente non può essere tutta contenuta in R_1 , perchè in R_1 non ci sono punti singolari (l'unico punto singolare del sistema è il punto $I \equiv (\frac{\rho'}{\omega^2}, 0)$, che non è un punto di R_1 perchè $\frac{\rho'}{\omega^2} < 1$), e poichè non può uscire da R_1 nè attraverso i punti dell'arco AA' di e_1 per la (8'), nè attraverso i punti del segmento AA'' perchè ivi è $\frac{dx}{dt} \geq 0$, uscirà da R_1 attraverso un punto B del segmento AA'' , come si voleva dimostrare.

Si consideri ora la regione R_1 contenuta in R_1 delimitata dall'arco AB di γ_1 e dei segmenti AA'' ed $A''B$. È ora facile vedere che, considerata una traiettoria generica del sistema (5) che abbia un punto P in R_1 , la semitraiettoria $\gamma^+(P)$ non esce da R_1 al crescere di t attraverso punti interni all'arco AB di γ_1 .

Per vedere ciò, si incominci a considerare che poichè x è crescente lungo l'arco AB di γ_1 , si può pensare che la sua equazione sia $v = f(x)$. Basta ora osservare che relativamente al sistema (5), nei punti di questo arco è verificata la diseuguaglianza:

$$(9) \quad \frac{d}{dt} (v - f(x)) = \frac{dv}{dt} - \frac{df}{dx} v = e(t) - \rho' < 0,$$

per concludere come asserito.

Allo scopo della dimostrazione serve ora stabilire una maggiorazione di x_B più forte di quella espressa dalla (7). Facciamo all'uopo la seguente posizione:

$$(10) \quad \lambda(P) = \lambda(x, v) = \\ = v^2 + \omega^2 \left(x - \frac{\rho'}{\omega^2} \right)^2,$$

e cerchiamo di determinare una maggiorazione di $\lambda(B)$. Sia x_1 un valore soddisfacente per ora alla sola condizione

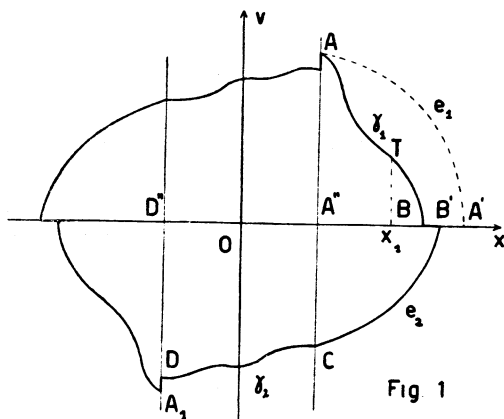


Fig. 1

$$(11) \quad 1 < x_1 < \frac{\rho'}{\omega^2} + \frac{1}{\omega} \left(v_0 + \left(1 - \frac{\rho'}{\omega^2} \right)^2 \omega^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Se l'arco AB di γ_1 incontra la retta $x = x_1$ in un punto $T \equiv (x_1, v_T)$ con $v_T < \frac{v_0}{2}$ sarà ovviamente

$$(12) \quad \lambda(T) < \omega^2 \left(x_1 - \frac{\rho'}{\omega^2} \right)^2 + \frac{v_0^2}{4}$$

e poichè $\lambda(P)$ non cresce lungo l'arco TB di γ_1 sarà anche

$$(12') \quad \lambda(B) < \omega^2 \left(x_1 - \frac{\rho'}{\omega^2} \right)^2 + \frac{v_0^2}{4}.$$

Se invece $v_p > \frac{v_0}{2}$, tenuto conto della (6') e dal fatto che

v è decrescente lungo l'arco AT di γ_1 , perchè ivi è $x > 1 > \frac{\rho'}{\omega^2}$ e $v > 0$, possiamo scrivere

$$d\lambda = 2K(1-x^2)v dx < 2K(1-x^2)\frac{v_0}{2}dx,$$

dalla quale integrando si ha

$$(13) \quad \lambda(B) - \lambda(A) < \lambda(T) - \lambda(A) < K v_0 \int_1^{x_1} (1-x^2) dx.$$

Infine se $x_B < x_1$, sarà ovviamente

$$(14) \quad \lambda(B) < \omega^2 \left(x_1 - \frac{\rho'}{\omega^2} \right)^2.$$

Premesso ciò, poniamo

$$(15) \quad x_1 = 1 + \sqrt{\frac{3v_0}{4K}}$$

e scegliamo v_0 in maniera che risulti

$$(16) \quad v_0 > \frac{3\omega^2}{4K} + 2\omega$$

allora anzitutto sarà certamente soddisfatta la (11), come si prova con un semplice calcolo, ed inoltre avremo dalla (13)

$$\lambda(B) - \lambda(A) < -2Kv_0 \int_1^{x_1} (x-1) dx = -Kv_0(x_1-1)^2,$$

e quindi infine per la (15)

$$(17) \quad \lambda(B) < \omega^2 \left(1 - \frac{\rho'}{\omega^2} \right)^2 + v_0^2 - \frac{3}{4} v_0^2 \leq \omega^2 \left(x_1 - \frac{\rho'}{\omega^2} \right)^2 + \frac{v_0^2}{4}.$$

Con tale scelta di x_1 e v_0 , cioè soddisfacenti alle (15) e (16), se denotiamo con λ^* un valore sicuramente maggiorante di $\lambda(B)$ avremo

$$(18) \quad \lambda^* = \omega^2 \left(x_1 - \frac{\rho'}{\omega^2} \right)^2 + \frac{v_0^2}{4}.$$

Dalla relazione $\lambda(B) < \lambda^*$ si ricava allora

$$(19) \quad x_B < \frac{\rho}{\omega^2} + \frac{1}{\omega} \sqrt{\lambda^*} = x_{B'},$$

denotando con B' un punto sicuramente a destra di B ed a sinistra di A' .

Ragioniamo ora nel semipiano $v \leq 0$ e consideriamo l'ellisse e_2 di equazione

$$v^2 + \omega^2 \left(x + \frac{\rho'}{\omega^2} \right)^2 = \omega^2 \left(\frac{2\rho'}{\omega^2} + \frac{1}{\omega} \sqrt{\lambda^*} \right)$$

che passa ovviamente per il punto B' . Sia C il punto di intersezione di queste ellisse con la semiretta $x = 1$, $v \geq 0$, punto certamente reale per la (16). Sull'arco BC di detta ellisse e_2 , arco appartenente al quadrante $v \geq 0$, $x \geq 1$, è certamente per la (6'')

$$(20) \quad \frac{d}{dt} \left[v^2 + \omega^2 \left(x + \frac{\rho'}{\omega^2} \right)^2 - \omega^2 \left(\frac{2\rho'}{\omega^2} + \frac{1}{\omega} \sqrt{\lambda^*} \right) \right] < 0,$$

relativamente alle soluzioni del sistema (5). Quindi le semitraziettorie $\gamma^+(P)$ relative alle soluzioni di (5), ove P sia un punto qualunque della regione R_2 delimitata dall'arco BC di e_2 e dai segmenti $B'A''$, $A'C$, non escono certamente al crescere di t da R_2 attraverso punti dell'arco BC .

Osserviamo ora che le coordinate di C sono $(1, -v_1)$, con v_1 dato da

$$(21) \quad v_1 = \omega \left[\left(\frac{2\rho'}{\omega^2} + \frac{\sqrt{\lambda^*}}{\omega} \right)^2 - \left(1 + \frac{\rho'}{\omega^2} \right)^2 \right]^{\frac{1}{4}}.$$

Da questa relazione, ricordando inoltre l'espressione di λ^* data da (18), discende che si può scegliere v_0 in maniera che risulti $v_1 < v_0$.

Ragioniamo infine nella regione Σ definita dalle disequazioni $x^2 - 1 \leq 0$, $v \leq 0$. Si consideri allora il sistema

$$(5'') \quad \frac{dx}{dt} = v, \quad \frac{dv}{dt} = K(1 - x^2)v - \rho' - \omega^2 x,$$

e la semitraiettoria $\gamma^+(C)$ relative ad esso. Denotiamo con γ_2 l'arco di $\gamma^+(C)$ contenuto in Σ e dimostriamo che in nessun punto di γ_2 può essere $v < -v_0$ appena si assuma v_0 soddisfacente alla

$$(22) \quad \frac{3v_0^2}{4} - v_0 \left(4K + \frac{3\omega}{4K} + \frac{2\rho'}{K} \right) - v_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{3}{K} \right)^{\frac{1}{2}} (\omega^2 + \rho') - \\ - \frac{\rho'}{\omega^2} - \omega^2 + 2\rho' \geq 0.$$

Infatti ragionando per assurdo supponiamo, se è possibile, che sia Q il primo punto, partendo da C lungo γ_2 , in cui è $v_Q = -v_0$, ed indichiamo con x_Q la sua ascissa. Poichè da C a Q lungo γ_2 è sempre $|v| \leq |v_0|$ se poniamo

$$(23) \quad \lambda'(P) = v^2 + \omega^2 \left(x + \frac{\rho'}{\omega^2} \right)^2.$$

attesa la (5'') risulta, sempre lungo γ_2

$$d\lambda' \leq 2K(1 - x^2)v_0 dx,$$

dalla quale integrando da C a Q si ottiene

$$(24) \quad \lambda(Q) - \lambda(C) \leq 2K \int_{x_Q}^1 (1 - x^2)v_0 dx < 4Kv_0.$$

Ora si osservi che

$$\lambda'(C) = v_1^2 + \omega^2 \left(1 + \frac{\rho'}{\omega^2} \right)^2 = \omega^2 \left(\frac{2\rho'}{\omega^2} + \sqrt{\lambda^*} \right)^2 = \left(\frac{2\rho'}{\omega} + \sqrt{\lambda^*} \right)^2$$

onde, poichè

$$\lambda'(Q) = v_0^2 + \omega^2 \left(x_0 + \frac{\rho'}{\omega^2} \right)^2$$

si dovrebbe avere per la (24)

$$v_0^2 + \omega^2 \left(x_0 + \frac{\rho'}{\omega^2} \right)^2 < \left(\frac{2\rho'}{\omega^2} + \sqrt{\lambda^*} \right)^2 + 4Kv_0.$$

Se si tien conto dell'espressione di λ^* e di x_1 si vede che, a maggior ragione, si dovrebbe avere

$$\frac{3}{4}v_0^2 \leq 4Kv_0 - \frac{\rho'}{\omega^2} + \omega^2 x_1^2 + 2\rho'x_1 + 2\rho'\frac{v_0}{\omega},$$

e quindi infine che il primo membro della (22) dovrebbe essere maggiore di zero, contrariamente al supposto.

È inoltre evidente che se v_0 soddisfa alle (22) e (16) è necessariamente soddisfatta anche la condizione $v_1 < v_0$.

Ritornando allora alla semitraiettoria $\gamma^+(C)$ si vede che essa non può essere contenuta in Σ . Infatti essa sarebbe tutta contenuta nella regione finita di Σ corrispondente a $v > -v_0$ e quindi dovrebbe tendere ad un ciclo o ad un punto singolare. Ma in questa parte di Σ non ci possono essere cicli (è ivi sempre $\frac{dx}{dt} \geq 0$, e l'unico punto singolare che sta nel contorno

di Σ in $I \equiv -(\frac{\rho'}{\omega^2}, 0)$) è instabile. Si conclude quindi che

$\gamma^+(C)$ deve uscire da Σ o attraverso un punto D della semiretta $x = -1$, $v \leq 0$ tale però, per quanto abbiamo visto qui sopra, che $v_D > -v_0$, oppure attraverso un punto del segmento $D''I$ dell'asse x , essendo D'' il punto di coordinate $(-1, 0)$.

Si consideri ora l'arco CD di $\gamma^+(C)$, che abbiamo già denotato con γ_2 ed osserviamo che, poichè lungo quest'arco x è sempre crescente, si può pensare che la sua equazione sia $v = \varphi(x)$. Considerato che relativamente al sistema (5) è

$$\frac{d}{dt}(v - \varphi(x)) = e + \rho' > 0$$

si può concludere che, se denotiamo con Σ' la regione finita di Σ delimitata da γ_2 , le semitraiettorie $\gamma^+(P)$ relative a (5), ove P sia un punto di Σ' , non escono da Σ' attraverso punti dell'arco γ_2 .

Si può allora finalmente concludere. Infatti nell'ipotesi che il punto D appartenga alla retta $x = -1$ la curva Γ che volemmo costruire è una spezzata costituita: dall'arco AB di γ_1 (assumendo $v_A = v_0$ soddisfacente alle (16) e (22)) dal segmento BB' , dall'arco $B'C$ di e_2 , dell'arco CD di γ_2 , del segmento DA_1 (A_1 è il simmetrico di A rispetto ad 0) ed infine dalla spezzata simmetrica di questa rispetto all'origine. Si prova subito che la curva Γ determinata gode della proprietà annunciata più sopra. Infatti tale proprietà risulta subito, dalle considerazioni fatte, per quanto riguarda gli archi di curve che costituiscono le spezzate, e dalla simmetria del sistema rispetto all'origine. Resta da vedere cosa succede per le traiettorie di (5) passanti per i punti dei segmenti BB' e DA_1 . Per questo basta pensare che nei punti di BB' risulta, sempre relativamente al sistema (5), $\frac{dv}{dt} < 0$ e tener conto, per quanto riguarda l'estremo B' , della dipendenza continua delle soluzioni dalle condizioni iniziali. Analogamente per quanto riguarda i punti del segmento DA_1 , perchè ivi risulta $\frac{dx}{dt} < 0$.

Analogamente si mostra che se D appartiene all'asse x , cioè se $\gamma^+(C)$ esce da Σ attraverso un punto di detto asse, la curva Γ si costruisce sostituendo al segmento DA_1 della analoga curva, costruita più sopra, la spezzata rettilinea costituita dai segmenti DD'' e $D''A_1$.

OSSERVAZIONE I^a: Basta una semplice considerazione sul contorno per convincersi che una soluzione generica, che passa per un qualunque punto di S all'istante $t = t_0$, soddisfa per ogni $t \leq t_0$ alle condizioni

$$(25) \quad |x| < x_{B'}, \quad |v| < v_0.$$

OSSERVAZIONE II^a: È utile per il seguito esplicitare le disuguaglianze date dalle (16), (20), (22).

Consideriamo intanto le condizioni (16) e (22). Per soddisfare le (22) basta assumere $v_0 \geq 1$ (per modo che $v_0^{3/2} \leq v_0$) e tale che risulti

$$\begin{aligned} \frac{3 v_0^2}{4} = v_0 \left(4 K + \left(\frac{3}{K} \right)^{3/2} (\omega^2 + \rho') + \frac{3 \omega^2}{4 K} + \frac{2 \rho'}{\omega} \right) - \\ \left(- \frac{\rho'}{\omega^2} + \omega^2 + 2 \rho' \right) \geq 0 \end{aligned}$$

e quindi, posto h uguale al coefficiente di v_0 in questa disuguaglianza è sufficiente assumere

$$(26) \quad v_0(\rho', \omega, K) = \frac{3}{4} \left[h + (h^2 + 3 \left(\frac{\rho'}{\omega^2} + \omega^2 + 2 \rho' \right)^{3/2}) \right],$$

purchè con ciò risulti anche $v_0 \geq 1$.

Si constata che la (26) comporta automaticamente la (16). Inoltre la (20), tenute presenti le (15) e (18), diventa

$$(27) \quad x_{B'}(\rho', \omega, K) = \frac{\rho'}{\omega^2} + \frac{\lambda}{\omega} \left[\omega^2 + \left(1 + \sqrt{\frac{3 v_0}{4 K}} - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{\rho'}{\omega^2} \right) + \frac{v_0^2}{4} \right].$$

3. Corollario del teorema precedente.

La determinazione della curva Γ del teorema del numero precedente si semplifica notevolmente se, anzichè dell'equazione non lineare (3), si tratta dell'equazione lineare

$$(28) \quad \ddot{x} + K \dot{x} + \omega^2 x = e(t)$$

con $|e(t)| > \rho$, ovvero del sistema analogo

$$(29) \quad \frac{dx}{dt} = v, \quad \frac{dv}{dt} = -Kv - \omega^2 x + e(t).$$

Infatti si consideri il sistema associato al (29)

$$(30) \quad \frac{dx}{dt} = v, \quad \frac{dv}{dt} = -Kv - \omega^2 x + \rho'$$

ove ρ' è un qualunque numero maggiore di ρ . L'unico punto singolare di questo sistema è il punto $I_1 \equiv (\frac{\rho'}{\omega^2}, 0)$, esso è in ogni caso completamente stabile.

Siano, dapprima, reali le due radici dell'equazione caratteristica relativa al sistema (30) le denoteremo con r_1 ed r_2 , numeri positivi. Si determini la soluzione di (30) soddisfacente alle condizioni iniziali $x(0) = -\frac{\rho}{\omega^2}$, $v(0) = 0$; detta soluzione è data da

$$(31) \quad \begin{cases} x = \frac{\rho}{\omega^2} + \frac{2\rho'}{\omega^2(r_1 - r_2)} (r_2 e^{-r_1 t} - r_1 e^{-r_2 t}) \\ v = \frac{-2\rho' r_1 r_2}{\omega^2(r_1 - r_2)} (e^{-r_1 t} - e^{-r_2 t}). \end{cases}$$

L'arco di curva γ rappresentata dalle (31) per $0 \leq t$ ha l'origine nel punto $I_2 \equiv (e^{-\lambda\pi/\mu}, 0)$, simmetrico di I_1 rispetto all'origine O , e l'estremo destro sul punto singolare I_1 . Essa inoltre appartiene tutta al semipiano $v \geq 0$ e determina con il suo simmetrico γ_2 rispetto all'origine, una curva semplice chiusa Γ , che è la curva cercata.

Infatti basta ripetere il ragionamento già fatto nel numero precedente, cioè considerare, come si è fatto lì, che le traiettorie relative al sistema (29) non possono uscire dalla regione finita S delimitata da Γ col crescere di t attraverso i punti interni di γ_1 e di γ_2 , e considerare che nei punti I_1, I_2 la stessa cosa deve succedere per continuità.

Si supponga ora invece, che le soluzioni dell'equazione caratteristica siano complesse; le indicheremo con $\lambda + i\mu$, $\lambda - i\mu$. Si consideri quindi la traiettoria del sistema (30) che passa per il punto E_1 di coordinate

$$(32) \quad x_{E_1} = -\frac{\rho'}{\omega^2} \frac{1 + e^{-\lambda\pi/\mu}}{1 - e^{-\lambda\pi/\mu}}, \quad v_{E_1} = 0,$$

essa ha per equazioni:

$$(33) \quad \left\{ \begin{aligned} x &= \frac{\rho}{\omega^2} - \frac{2\rho' e^{-\lambda t}}{\omega^2 (1 - e^{-\lambda\pi/\mu})} \left(\cos \mu t + \frac{\lambda}{\mu} \sin \mu t \right) \\ v &= \frac{2\rho' \lambda e^{-\lambda t}}{\omega^2 (1 - e^{-\lambda\pi/\mu})} \left(\cos \mu t + \frac{\lambda}{\mu} \sin \mu t \right) + \\ &+ \frac{2\mu\rho' e^{-\lambda t}}{\omega^2 (1 - e^{-\lambda\pi/\mu})} \left(\sin \mu t - \frac{\lambda}{\mu} \cos \mu t \right) \end{aligned} \right.$$

Se si considera di questa traiettoria l'arco γ_1 corrispondente a $0 \leq t \leq \frac{\pi}{\mu}$ si vede che questo appartiene tutto al semipiano $v \geq 0$ ed ha il primo estremo nel punto E_1 ed il secondo nel punto E_2 simmetrico rispetto all'origine. L'arco γ_1 ed il suo simmetrico rispetto all'origine O determinano la curva Γ che risulta così individuata anche in questo caso. Ci risparmiamo di ripetere il ragionamento già fatto nell'altro caso per giustificare questo asserto.

Esaminiamo da ultimo brevemente il caso in cui le due radici dell'equazione caratteristica siano reali e coincidenti. Si vede subito con facili calcoli che questo caso non differisce sostanzialmente dal primo. Se r è la radice dell'equazione caratteristica, la semitraiettoria γ_1 di equazioni

$$(34) \quad x = \frac{\rho'}{\omega^2} - \frac{2\rho'}{\omega^2} e^{-rt}, \quad v = \frac{2\rho'}{\omega^2} r e^{-rt}, \quad 0 \leq t,$$

e la sua simmetrica rispetto all'origine determinano la curva Γ .

OSSERVAZIONE: Notiamo che se P è un punto qualunque della regione S , su ogni semitraiettoria $\gamma^+(P)$ relativa al sistema (29) è sempre

$$(35) \quad |x| < \frac{\rho'}{\omega^2}$$

nel caso di radici reali e eguali o distinte, mentre nel caso di radici complesse è

$$(36) \quad |x| < \frac{\rho'}{\omega^2} \frac{1 + e^{-\lambda\pi/\mu}}{1 - e^{-\lambda\pi/\mu}}$$

Basta semplicemente osservare la configurazione di Γ per convincersi di ciò.

4. - Un secondo teorema su una equazione del tipo (3).

Si consideri l'equazione:

$$(37) \quad \ddot{x} - K(1 - x^2)\dot{x} + x = e(t)$$

ove sia

$$(38) \quad |e(t)| < \rho < \frac{1}{3}$$

ed inoltre K sia un numero positivo soddisfacente alla:

$$(39) \quad K > \frac{9}{8} \left(\frac{3\rho}{2} \cdot \frac{3 + (1 + 12\rho)^{\frac{1}{2}}}{2 \cdot 3\rho} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Come nel teorema precedente ci poniamo sul piano ove siano $x, v = \dot{x}$ coordinate cartesiane ortogonali. Si ha allora il seguente teorema:

Relativamente al sistema

$$(40) \quad \frac{dx}{dt} = v, \quad \frac{dv}{dt} = -x + K(1 - x^2) + e(t)$$

si può determinare una curva semplice chiusa Γ , simmetrica rispetto all'origine O , delimitante una regione finita S , tale che, se P è un punto di Γ , tutte le semitraiettorie $\gamma^+(P)$ non hanno all'infuori di P punti comuni con S .

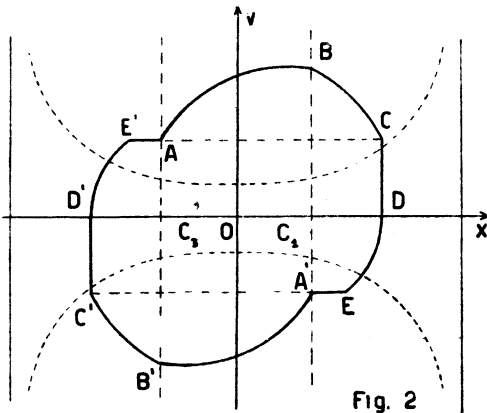
DIMOSTRAZIONE: Sia Σ la regione del piano x, v definita da $x^2 - 1 \leq 0$ e Σ_1 la regione di Σ definita

$$\text{dalla } v \geq \frac{\rho}{K(1 - x^2)}.$$

$$\text{Il punto } A \equiv \left(\frac{1}{3}, \frac{9\rho}{4K} \right)$$

è ovviamente un punto di Σ_1 . Sia inoltre Σ_2 la regione di Σ_1 i cui punti soddisfano alla

$$v \geq \frac{9\rho}{4K}, \quad x^2 \leq \frac{1}{9}.$$



Nei punti di Σ_2 risulta

$$(42) \quad \frac{d}{dt} ((x - \rho)^2 + v^2) > 0.$$

Sia B l'intersezione del cerchio c_1 , di centro $C_1 \equiv (\rho, 0)$ e passante per A , con la semiretta $\left(x = \frac{1}{3}, v \geq 0 \right)$. Le

coordinate di B sono :

$$(43) \quad x_B = \frac{1}{3}, \quad v_B = \frac{(3\rho)^{\frac{1}{2}}}{12K} (64K^2 + 243\rho)^{\frac{1}{2}}.$$

Sia inoltre C l'intersezione del cerchio c_3 di centro l'origine e passante per B con la semiretta $x \geq 0$, $v = \frac{9\rho}{4K}$. Si trovano per C le seguenti coordinate con facili calcoli che omettiamo

$$(44) \quad x_C = \frac{1}{3} (1 + 12\rho)^{\frac{1}{2}}, \quad v = \frac{9\rho}{4K}.$$

Il punto C appartiene a Σ_1 ; infatti si ha :

$$\frac{9\rho}{4K} > \frac{\rho}{K \left(1 - \frac{1}{9} (1 + 12\rho) \right)}$$

ovverossia $\rho < \frac{1}{3}$ come è per l'ipotesi (38).

Si consideri ora il punto D di coordinate $\left(\frac{1}{3} (1 + 12\rho)^{\frac{1}{2}}, 0 \right)$ ed il cerchio c_3 di centro $C_3 \equiv (\rho, 0)$ e passante per il punto D . Questo cerchio incontra le semirette $x \geq 0$, $v = \frac{9\rho}{4K}$ in un punto E di coordinate

$$x_E = \rho + \left(\frac{1}{3} (1 + 12\rho)^{\frac{1}{2}} - \rho \right) - \frac{81\rho^2}{16K^2}^{\frac{1}{2}}, \quad v = -\frac{9\rho}{4K}.$$

Si osservi la condizione (39) supposta soddisfatta per ipotesi assicura che $x_E > \frac{1}{3}$.

Premesso ciò si vede subito qual'è la curva Γ di cui si vuole dimostrare l'esistenza. Denoteremo con apici i simmetrici dei punti A, B, C, D, E , rispetto all'origine O . Si consideri allora

la curva costituita: dall'arco AB del cerchio c_1 , dall'arco BC del cerchio c_2 , dal segmento CD , dall'arco DE del cerchio c_3 , dal segmento EA' . Questa spezzata mista e la sua simmetrica rispetto all'origine determinano una curva chiusa Γ che è la curva cercata.

Per convincersi che la curva Γ così determinata gode della proprietà enunciata, basta osservare che la (42), che è soddisfatta sull'arco AB di c_1 , ci assicura che le traiettorie che passano per i punti interni di quest'arco escono dal cerchio c_1 stesso e quindi dalla regione S delimitata da Γ .

Analogamente sull'arco BC del cerchio c_2 , è soddisfatta la condizione:

$$2[K(1-x^2)v + e(t)]v > 0$$

poichè l'arco BC in discorso appartiene completamente alla regione Σ_1 e quindi sui punti di quest'arco si ha

$$\frac{d}{dt}(x^2 + v^2) > 0$$

e quindi si ha ancora che le traiettorie, che passano per i punti interni di quest'arco, escono da S al crescere di t .

Infine se si considera che nel segmento CD (D escluso) è verificata la

$$\frac{dx}{dt} = v > 0,$$

che sull'arco DE di c_3 si ha

$$\frac{d}{dt}(x - \rho)^2 + v^2 > 0,$$

ed infine che sul segmento EA'

$$\frac{dv}{dt} = K(1-x^2)v - K\frac{8}{9}\frac{9\rho}{4k} - x + \rho < 0,$$

si riconosce che le traiettorie che passano per i punti di Γ , che non siano vertici escono al crescere di t da S . Sui vertici,

ovviamente per continuità, succederà la stessa cosa e resta quindi provato l'asserto.

OSSERVAZIONE I^a: Si noti che la condizione (39) è certamente soddisfatta se è soddisfatta la

$$(45) \quad K > \frac{9}{8} \sqrt{\frac{3 + \sqrt{5}}{2}}$$

OSSERVAZIONE II^a: Il teorema ora dimostrato assicura che se P è un punto che non appartiene ad S tutte le infinite semitraziettorie $\gamma^+(P)$ del sistema (40) non hanno punti in comune con S . Da qui segue anche tutte le soluzioni che in un generico istante t_0 sono tali che il punto $P \equiv (x(t_0) \ v(t_0))$ non appartiene ad S soddisfano per ogni $t > t_0$ alla condizione

$$(46) \quad x^2 + v^2 > \epsilon^2,$$

ove ϵ^2 è un certo numero positivo.

OSSERVAZIONE III^a: Se si consideri l'equazione (37) e si applicano ad essa contemporaneamente i teoremi dimostrati nei num. precedenti si ottiene il seguente teorema:

Relativamente al sistema (40) ove $e(t)$ soddisfi alla (38), e K soddisfi alla condizione (39), si possono determinare sul piano (x, v) due curve Γ_1, Γ_2 semplici chiuse l'una interna all'altra, che costituiscono la frontiera di una regione finita R del piano (equivalente ad una corona circolare) tale che se P è un punto di R la semitraziettoria $\gamma^+(P)$ relativa al sistema (40) è tutta costituita di punti interni ad R .

5. - Riduzione alla forma tipica dei sistemi di tipo 1) e 2).

Ritorniamo finalmente allo scopo principale del presente lavoro. Cominciamo col trasformare i sistemi 1) e 2) alla forma più semplice possibile nel modo che diremo. Operiamo sulla prima equazione del sistema 2) con le seguenti sostituzioni

$$(47) \quad \xi = x \left(\frac{\beta_1}{\alpha_1} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad t = \frac{\tau}{\omega_1},$$

l'equazione assume allora la forma:

$$(48) \quad \ddot{\xi} - K_1 (1 - \xi^2) \dot{\xi} + \xi + M' y = 0$$

ove si è posto

$$(49) \quad K_1 = \frac{h_1 \alpha_1}{\omega_1} \quad , \quad M'_1 = \frac{M_1}{\omega_1^2} \left(\frac{\beta_1}{\alpha_1} \right)^{\frac{1}{2}} .$$

Se si operano anche sulla seconda del sistema 2), assieme alle sostituzioni (47), anche le sostituzioni

$$(50) \quad \eta = y \left(\frac{\beta_2}{\alpha_2} \right)^{\frac{1}{2}}$$

e si pone

$$(51) \quad K_2 = \frac{h_2 \alpha_2}{\omega_1} \quad , \quad \omega^2 = \frac{\omega_2^2}{\omega_1^2} \quad , \quad M'_2 = \frac{M_2}{\omega_1^2} \left(\frac{\alpha_1 \beta_2}{\beta_1 \alpha_2} \right)^{\frac{1}{2}}$$

la seconda del sistema 2) diventa

$$(52) \quad \ddot{\eta} - K_2 (1 - \eta^2) \dot{\eta} + \omega^2 \eta + M'_2 \xi = 0 .$$

Quindi ponendo infine

$$(53) \quad \mathcal{M}_1 = M'_1 \sqrt{\frac{\alpha_2}{\beta_2}} = \frac{M_1}{\omega_1^2} \left(\frac{\alpha_1 \beta_1}{\alpha_2 \beta_2} \right)^{\frac{1}{2}} \quad , \quad \mathcal{M}_2 = M'_2$$

il sistema 2) assume la forma tipica, che con ovvia sostituzione di simboli, diventa

$$2') \quad \begin{cases} \ddot{x} - K_1 (1 - x^2) \dot{x} + \dot{x} + \mathcal{M}_1 y = 0 \\ \ddot{y} - K_2 (1 - y^2) \dot{y} + \omega^2 y + \mathcal{M}_2 x = 0 \end{cases} \quad (K_1 > 0, K_2 > 0).$$

Analogamente per il sistema 1); se si opera su di esso con le sostituzioni (47) e (49) e si fanno le posizioni

$$(54) \quad K_2 = \frac{h_2}{\omega_2} \quad , \quad \omega^2 = \frac{\omega_2^2}{\omega_1^2} \quad , \quad \mathcal{M}_2 = \frac{M_2}{\omega_1^2} \sqrt{\frac{\alpha_1}{\beta_1}} \quad , \quad \mathcal{M}_1 = M'_1 ,$$

esso assume la forma tipica

$$1') \quad \begin{cases} \ddot{x} - K_1(1 - x^2)\dot{x} + x + \mathcal{M}_1 y = 0, \\ \ddot{y} + K_2 \dot{y} + \omega^2 y + \mathcal{M}_2 x = 0, \end{cases} \quad (K_1 > 0, K_2 > 0).$$

Nel prossimo numero discuteremo i sistemi del tipo 1') e 2').

6. - Teoremi di stabilità per i sistemi del tipo 1') e 2').

Cominciamo con i sistemi del tipo 1') che possiamo anche porre sotto la forma

$$1'') \quad \begin{cases} \frac{dv}{dt} = u, & \frac{du}{dt} = K_1(1 - x^2)u - x - \mathcal{M}_1 y, \\ \frac{dy}{dt} = v, & \frac{dv}{dt} = K_2 v - \omega^2 y - \mathcal{M}_2 x, \end{cases}$$

ove richiediamo per ora, solamente che K_1 soddisfi alla condizione (45).

Il sistema 1') equivalente al sistema 1'') si può anche scrivere:

$$(55) \quad \begin{cases} \ddot{x} - K_1(1 - x^2)\dot{x} + x = e_1(t) = -\mathcal{M}_1 y \\ \ddot{y} + K_2 \dot{y} + \omega^2 y = e_2(t) = -\mathcal{M}_2 x. \end{cases},$$

Con riferimento alla prima della (55), cui applichiamo il teorema del n. 2, poniamo $\rho = \frac{1}{3} - 2\varepsilon > 0$ e $\rho' = \frac{1}{3} - \varepsilon$ e determiniamo in corrispondenza il valore $v_0\left(\frac{1}{3} - \varepsilon, 1, K_1\right)$ dato dalle (26), valore che denoteremo con $\bar{u}$, ed inoltre determiniamo il valore $x_{B'}\left(\frac{1}{3} - \varepsilon, 1, K_1\right)$ dato dalla (27) che denoteremo

con $\bar{x}$. Supponendo per ora che sia $K_2^2 - 4\omega^2 \geq 0$ ammettiamo che almeno per ε e σ sufficientemente piccoli ma positivi sia

$$(56) \quad \left[\frac{\mathcal{M}_1 (\mathcal{M}_2 \bar{x} + \sigma)}{\omega^2} \right] < \frac{1}{3} - 2\varepsilon .$$

Premesso ciò, in corrispondenza a $\rho' = \frac{1}{3} - \varepsilon$ e relativamente alla prima equazione del sistema (55) alla quale pensiamo applicato il risultato ottenuto nella osservazione III^a del n. 4 esisterà certamente una regione R_1 del piano $(x, u = \dot{x})$ che godrà della proprietà ivi enunciata. Analogamente in corrispondenza al valore $\rho' = \mathcal{M}_2 \bar{x} + \sigma$, applicando alla seconda equazione della (55) il teorema contenuto nel corollario del n. 3 si determina una regione R_1 del piano $(y, v = \dot{y})$ che ha le proprietà indicate.

Si fissi ora un punto generico $\bar{P}_1$ di R_1 ed un punto $\bar{P}_2$ di R_2 , e si consideri la soluzione del sistema 1''), ovviamente unica, soddisfacente alle condizioni:

$$x(0) = x_{P_1}, \quad u(0) = u_{P_1}, \quad y(0) = y_{P_2}, \quad v(0) = v_{P_2} .$$

Siano $P_1(t)$ e $P_2(t)$ i punti di coordinate rispettivamente $x(t)$, $u(t)$ e $y(t)$, $v(t)$ corrispondenti a questa soluzione nell'istante generico. *Vogliamo provare che $P_1(t)$ e $P_2(t)$ appartengono per ogni valore di $t > 0$ rispettivamente ad R_1 ed R_2 .* Infatti supponiamo, se è possibile, che esista un certo istante $t_0 \geq 0$ tale che, per $0 \leq t \leq t_0$ $P_1(t)$ appartenga ad R_1 e per $t_0 < t < t_1$, (t_1 può anche essere infinito), P_1 non appartenga ad R_1 . Perchè ciò avvenga, atteso il teorema dimostrato nel n. 2, bisognerebbe che $e_1(t)$ superasse in qualche istante $\frac{1}{3} - \varepsilon$, poichè, finchè ciò non succede, sono certamente soddisfatte le condizioni sotto le quali continua a valere il teorema suddetto. Ora si vede che $e_1(t)$ non può superare $\frac{1}{3} - \varepsilon$ se y non è sufficientemente grande cioè tale che sia $|\mathcal{M}_1 y| > \frac{1}{3} - 2\varepsilon$ e questa non può

essere soddisfatta finchè P_2 è un punto di R_2 perchè se P_2 appartiene ad R_2 si ha

$$|y| < \frac{M_2 \bar{x} + \sigma}{\omega_2},$$

e quindi

$$|e_1(t)| = |M_1 y| \leq \frac{1}{3} - 2\varepsilon.$$

Concludendo $P_1(t)$ non esce da R_1 se P_2 non è già uscito da R_2 . Dimostriamo il reciproco. Sia infatti t_0 un tale istante per cui P_2 appartenga ad R_2 per ogni $0 \leq t \leq t_0$ e P_2 non appartenga ad R_2 per $t_0 < t < t_1$. Perchè ciò avvenga bisogna che in qualche istante antecedente a t_0 sia $|e_2(t)| > M_2 \bar{x} + \sigma$ sia finchè $P_1(t)$ appartiene ad R_1 è certamente $|x| \leq \bar{x}$ e quindi $|e_2(+)| \leq \mathcal{M}_2 \bar{x} < \mathcal{M}_2 \bar{x} + \sigma$. Quindi P_2 non può uscire da R_2 se già P_1 non è uscito da R_1 . Tanto basta per concludere che per nessun valore di $t > 0$, né P_1 esce da R_1 , né P_2 da R_2 .

La condizione espressa dalla (56) si modifica semplicemente se ci si pone nel caso $K^2 - 4\omega^2 < 0$; essa infatti diventa

$$(56') \quad \left| \mathcal{M}_1 (\mathcal{M}_2 \bar{x} + \sigma) \right| \frac{1 + e^{-\lambda\mu/\pi}}{1 - e^{-\lambda\mu/\pi}} \leq \frac{1}{3}$$

ove λ e μ sono rispettivamente la parte reale ed il coefficiente della parte immaginaria della soluzione dell'equazione caratteristica.

È da notare che la condizione (56) è certamente soddisfatta se denotato con x^* il valore di $x_{B'}$ $\left(\frac{1}{3}, 1, K_2\right)$ risulta rispettivamente nei due casi $K_2^2 - 4\omega^2 > 0$, oppure $K_2^2 - 4\omega^2 < 0$

$$(57) \quad \left| \frac{\mathcal{M}_1 \mathcal{M}_2 x}{\omega_2} \right| < \frac{1}{3}, \quad (57') \quad \left| \frac{\mathcal{M}_1 \mathcal{M}_2 x^*}{\omega^2} \frac{1 + e^{-\lambda\mu/\pi}}{1 - e^{-\lambda\mu/\pi}} \right| < \frac{1}{3}.$$

Infatti esisteranno allora certamente un ϵ ed uno σ tali che risultino soddisfatte rispettivamente la (56) o la (56').

Ad analoga conclusione, cioè all'esistenza di due regioni R_1 ed R_2 che godono della stessa proprietà, si giunge anche per il sistema di tipo 2'), che si può anche scrivere analogamente al sistema 1'),

$$(58) \quad \begin{cases} \ddot{x} - K_1(1 - x^2) \dot{x} + x = e_1(t) = -\mathcal{M}_1 y, \\ \ddot{y} - K_2(1 - y^2) \dot{y} + \omega^2 y = e^2(t) = -\mathcal{M}_2 x, \end{cases}$$

ove si supponga ancora anzitutto che K_1 soddisfi alla (45).

Assumiamo anche qui $\rho = \frac{1}{3} - 2\epsilon$, $\rho' = \frac{1}{3} - \epsilon$ e denotiamo ancora con $\bar{x}$ il valore di $x_{B'}$ $\left(\frac{1}{3} - \epsilon, 1, K_1\right)$. Se si suppone che, almeno per un opportuno σ positivo sia $|\mathcal{M}_2 \bar{x} + \sigma| < \omega^2$ si potrà applicare alla seconda equazione il risultato del teorema del n. 2 assumendo $\rho' = \mathcal{M}_2 \bar{x} + \sigma$. Allora se $\mathcal{M}_1$ ed $\mathcal{M}_2$ sono sufficientemente piccoli in maniera che, denotato con $\bar{y}$ il valore di $y_{B'}$ $(\mathcal{M}_2 \bar{x} + \sigma, \omega, K_2)$, risulti

$$|\mathcal{M}_1 \bar{y}| = |\mathcal{M}_1 y_{B'}(\mathcal{M}_2 \bar{x} + \sigma, \omega, K_2)| < \frac{1}{3} - 2\epsilon$$

almeno per opportuni ϵ e σ , si può concludere come sopra. In definitiva se $\mathcal{M}_1$ ed $\mathcal{M}_2$ sono tali che, denotato ancora con x^* il valore di $x_{B'}$ $\left(\frac{1}{3}, 1, K_1\right)$, risultino soddisfatte le

$$(59) \quad |\mathcal{M}_2 x^*| < \omega^2, \quad |\mathcal{M}_1 y_{B'}(\mathcal{M}_2 x^*, \omega, K_2)| < \frac{1}{3}.$$

si può assicurare ancora l'esistenza di una regione R_1 del piano (x, u) topologicamente equivalente ad una corona circolare, e di una regione R_2 , equivalente ad un cerchio che godono, relativamente al sistema 2'), della proprietà più sopra enunciata relativamente al sistema 1').

OSSERVAZIONE I^a: Per dare un'idea dell'ordine di grandezza della limitazione trovata, si consideri il seguente esempio di sistema del tipo 1')

$$\begin{cases} \ddot{x} - 3(1 - x^2)\dot{x} + x + \mathcal{M}_1 y = 0, \\ \ddot{y} + 10\dot{y} + 24y + \mathcal{M}_2 x = 0. \end{cases}$$

In questo caso la condizione espressa dalla (60) comporta $|\mathcal{M}_1 \mathcal{M}_2| < 1$.

OSSERVAZIONE II^a: La condizione (60'') comporta $|\mathcal{M}_1 \mathcal{M}_2| < \omega^2$ perchè x^* è certamente maggiore di 1). Questo avviene anche nell'altro caso considerato e ci assicura che l'unica posizione di equilibrio per il sistema è la configurazione ove si annullano contemporaneamente x, y, u, v .

7. - Esistenza di una soluzione periodica.

Siamo ora in grado di provare l'esistenza di una soluzione periodica per i sistemi del tipo 1') e 2') (1'') o (2'')) nella ipotesi che siano soddisfatte le condizioni compendiate nelle (57) (57') o (59) per quanto riguarda M_1, M_2, ω , e l'ipotesi espressa dalla (45) per quanto riguarda K_1 .

Ragioniamo per maggiore semplicità nell' S_4 ove x, u, y, v sono coordinate di punto. Una soluzione generica del sistema 1'') e 2'')) rappresenta una traiettoria in tale spazio. L'unico punto singolare per il sistema 1'') (2'')) è l'origine O delle coordinate (vedi osservazione II^a del numero precedente). Per ogni punto fuori dell'origine passa una ed una sola traiettoria. Consideriamo la regione finita chiusa R^* di questo S_4 , definita come il luogo dei punti $P \equiv (x, u, y, v)$ tali che il punto $P_1 \equiv (x, u)$ appartenga ad R_1 ed il punto $P_2 \equiv (y, v)$ appartenga ad R_2 . Per quanto abbiamo visto nel numero precedente una traiettoria che abbia un punto $P \equiv (P_1, P_2)$ appartenente ad R^* è tale che la semitragittoria $\gamma^+(P)$ appartiene completamente a questa regione. Notiamo inoltre che R^* non contiene l'origine O .

Premesso ciò consideriamo l'intersezione di R^* con il semi-

iperpiano π definito dalle $u = 0, v \geq 0$. Se denotiamo con x_m, x_M gli estremi del segmento di intersezione di R_1 con il semiasse positivo delle x , la intersezione di π con R^* è una bicella C_3 definita da $x_m \leq x \leq x_M, u = 0$, e $P_2 \equiv (y, v)$ appartenente ad R_2 . Sia ora P un generico punto di tale tricella C_3 e denotiamo con R_+^*, R_-^* le due 4-celle in cui R^* viene diviso dall'iperpiano $u = 0$. La traiettoria $\gamma(P)$ passa attraverso P da R_+^* ed R_-^* ; infatti basta notare che è, per ogni $x_m \leq x \leq x_M$ e per ogni (y, v) appartenente ad R_1 , $\frac{du}{dt} < 0$. La semitraiettoria $\gamma^+(P)$ penetra quindi attraverso P in R_-^* e ne può uscire soltanto attraverso i punti della tricella C'_3 simmetrica di C_3 rispetto all'origine O , per la proprietà già riconosciuta della regione R^* .

Ora si vede che $\gamma^*(P)$ non può essere contenuta tutta in R_-^* ; infatti si consideri l'insieme limite $\Gamma^+(\gamma)$ di tale traiettoria, questa $\Gamma^+(\gamma)$ non si può ridurre ad un punto singolare, perchè ciò è escluso dal fatto che l'unico punto singolare per il sistema è l'origine O che non appartiene ad R_-^* , quindi l'insieme limite non è costituito da punti ordinari e quindi faranno parte dell'insieme limite anche traiettoria del sistema. Ma siccome in R_-^* la x non è crescente, $\Gamma^+(\gamma)$ sarebbe contenuto in un iperpiano $x = x_0$ e quindi esisterebbero per il sistema soluzioni del tipo $x = \text{costante}$, il che è assurdo sempre per l'osservazione II^a del numero precedente.

Resta dunque stabilito che $\gamma^+(P)$ esce da R_-^* attraverso un punto P' di C'_3 . Consideriamo allora la trasformazione topologica $\mathcal{T}$ di C_3 in sè che fa corrispondere ad ogni punto P il simmetrico di P' rispetto all'origine O . In detta trasformazione esiste almeno un punto unito P^* . Ora basta tener presente la simmetria del sistema rispetto ad O per concludere che le traiettorie $\gamma(P^*)$ è un ciclo cioè che il sistema ammette una soluzione periodica tutta contenuta in R^* .

OSSERVAZIONE I^a: Il ciclo di cui si è mostrata l'esistenza è simmetrico rispetto all'origine O e le variabili x ed u si annullano una sola volta durante un periodo cosicchè la x è periodica semplice nel senso che essa si annulla con la sua derivata prima una sola volta in ogni periodo. Questo succede in ogni

caso, cioè sia che la seconda equazione sia lineare oppure no. Nel secondo caso si può però osservare che può darsi che le condizioni, sotto le quali è assicurata l'esistenza di una soluzione periodica, restino ancora soddisfatte scambiando l'ufficio nelle due equazioni e quindi può darsi che esista anche una soluzione periodica nella quale y e v si annullino una sola volta in un periodo.

Le condizioni purchè ciò avvenga si ottengono agevolmente. Si supponga anzitutto che per il sistema (58) siano soddisfatte le condizioni prima dette cioè K_1 soddisfi alla (45) ed inoltre siano soddisfatte la (59). Si operi allora sul sistema (58) con la sostituzione $t = \frac{\tau}{\omega}$; esso allora diventa, denotando con apici le derivate rispetto a τ ,

$$(58') \quad \begin{cases} x'' - \frac{K_1}{\omega} (1 - x^2) x' + \frac{1}{\omega^2} x + \frac{\mathcal{M}_1}{\omega^2} y = 0, \\ y'' - \frac{K_2}{\omega} (1 - y^2) y' + y + \frac{\mathcal{M}_2}{\omega^2} x = 0. \end{cases}$$

Ora ripetiamo il ragionamento fatto più sopra sul sistema (58) partendo però questa volta dalla seconda equazione. Si avranno allora le condizioni seguenti per l'esistenza di un ciclo semplice su y e v : 1°) $\frac{K_2}{\omega}$ soddisfa alla (4); 2°) denotato con y^* il valore di y , $\left(\frac{1}{3}, 1, \frac{K_2}{\omega}\right)$ dato dalla (27), sia

$$(59') \quad |\mathcal{M}_1 y^*| < \frac{1}{\omega^2}, \quad \left| \mathcal{M}_1 x_{y'} \left(M_2 y^*, \frac{1}{\omega}, \frac{K}{\omega} \right) \right| < \frac{1}{3}.$$

Allora se $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$ sono talmente piccole da soddisfare oltre alla (59) anche la (59') si potrà assicurare l'esistenza di due soluzioni periodiche l'una semplice in (x, u) altra semplice in (y, v) . Ce ne sarà una semplice in tutte e quattro le variabili; cioè potranno le due soluzioni periodiche coincidere? Il tipo di ragionamento qui eseguito non permette di dedurre ciò, ed è prevedibile che in generale ciò non avvenga.

Si osservi infatti che con referenza al sistema (58') si potranno determinare con le stesse considerazioni rivolte più sopra due regioni R_1, R'_2 del piano $\left(x, u' = \frac{dx}{d\tau}\right), \left(y, v' = \frac{dy}{d\tau}\right)$ che godano della proprietà sopra accennata con riguardo al sistema (58'). Queste regioni si trasformano con la semplice sostituzione $u = u'\omega, v = v'\omega$ in due regioni $\bar{R}_1, \bar{R}_2$ del piano (x, u) e (y, v) rispettivamente equivalenti ad un cerchio ed ad una corona circolare.

Le regioni R_1, R_2 prime determinate e quelle $\bar{R}_1, \bar{R}_2$ determinate che avranno a due a due certe regioni R_1^*, R_2^* (topologicamente equivalenti entrambe ad una corona circolare) in comune.

Si consideri che là regione R^* nell' S_4 definita come luogo dei punti P i cui corrispondenti (P_1, P_2) appartengono rispettivamente ad R_1^* ed R_2^* . Tenutone conto delle proprietà di cui godono $R_1, \bar{R}_1, R_2, \bar{R}_2$ le regioni R^* nell' S_4 è tale che, se una traiettoria ha un punto P in comune con R^* , la semitraiettoria $\gamma^+(P)$ giace tutta in R^* . È facile vedere che nell' R^* così determinato non si può ragionare come precedentemente. Infatti si sezioni R^* con l'iperpiano $u = 0$, si ottiene allora così, non più una bicella come prima, bensì una regione dell' S_3 topologicamente equivalente ad un toro. Una trasformazione topologica del toro in sè non ha necessariamente un punto unito. Tanto basta per concludere come asserito.

OSSERVAZIONE II^a: Non è provato qui che il ciclo di cui abbiamo mostrato l'esistenza sia stabile. Si può però dire in ogni modo che per opportune condizioni iniziali, in un intorno completo di P^* la soluzione generica resta in un intorno finito della soluzione periodica.