RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

GIORGIO TREVISAN

A proposito delle relazioni di congruenza sui quasi-gruppi

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 19 (1950), p. 367-370

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1950__19__367_0>

A PROPOSITO DELLE RELAZIONI DI CONGRUENZA SUI QUASI-GRUPPI

Nota (*) *di* GIORGIO TREVISAN (*a Padova*).

1. - Un quasi-gruppo G può essere definito (1) come un'algebra dotata di due operazioni binarie O_1, O_2 verificanti le condizioni :

1) O_1 ed O_2 sono definite per ogni coppia ordinata a, b di elementi di G ed i risultati $O_1(a, b)$, $O_2(a, b)$ sono elementi di G univocamente determinati ;

2) sono univocamente determinati gli elementi y e z di G per modo che $O_1(a, y) = b$ ed $O_2(a, z) = b$;

3) $O_1(a, b) = O_2(b, a)$.

Nel seguito si chiameranno algebre $\overline{G}$ quelle dotate di una operazione binaria come $O_1(x, y)$ che verifichi delle 1) e 2) le proprietà che la riguardano ed inoltre tale che:

4) $O_1(\overline{G}, x) = \overline{G}$ qualunque sia l'elemento x di $\overline{G}$, dove $O_1(\overline{G}, x)$ rappresenta l'insieme degli elementi $O_1(g, x)$ con $g \in \overline{G}$.

Per semplicità si scriverà xy al posto di $O_1(x, y)$.

In questa Nota, definito il concetto di normalità per le relazioni di congruenza su $\overline{G}$, come fa KIOKEMEISTER (2) per i quasi-gruppi, si dimostra che le relazioni normali su $\overline{G}$ sono tra loro permutabili.

(*) Pervenuta in Redazione il 27 maggio 1950.

(1) La forma della presente definizione si ritiene sia nuova e possa risultare di qualche interesse.

(2) F. KIOKEMEISTER. *A theory of normality for quasi-groups*, [American Journal of mathematics, vol. LXX, n. 1, (1948)) pagg. 100, condizioni *i*) e *ii*).

In particolare si vedrà che nei quasi gruppi con un numero finito di elementi tutte le relazioni di congruenza sono normali e quindi tra loro permutabili. Si risponde così ad una domanda posta da BIRKHOFF [3].

2. - Si osservi che la condizione 4) esprime che, assegnati gli elementi x e b di $\overline{G}$ esiste *almeno* un elemento a di $\overline{G}$ tale che $ax = b$.

Si conclude col

TEOREMA I: *Un quasi-gruppo è un algebra* $\overline{G}$.

Si ha poi il

TEOREMA II: *Un algebra* $\overline{G}$ *con un numero finito di elementi è un quasi-gruppo.*

Infatti per la 4) $O_1(z, a)$ al variare di z in $\overline{G}$ descrive $\overline{G}$. Quindi se $\overline{G}$ ha un numero finito di elementi è unico lo z per cui $O_1(z, a) = b$.

Epperò, se si definisce l'operazione $O_2(x, y)$ con la posizione $O_2(x, y) = O_1(y, x)$, la seconda delle 2) risulta anche essa verificata e $\overline{G}$ è allora un quasi-gruppo.

3. - Una relazione di equivalenza [4] θ su $\overline{G}$ distribuisce gli elementi di $\overline{G}$, in sottoinsiemi disgiunti, i blocchi [5] della θ e per indicare che due elementi a e b appartengono ad uno stesso blocco della θ si scrive $a \equiv b(\theta)$.

La θ è detta poi una relazione di congruenza su $\overline{G}$, se verifica la condizione:

α) se $a \equiv b(\theta)$ e $c \equiv d(\theta)$ è pure $ac \equiv bd(\theta)$.

[3] G. BIRKHOFF, *Lattice theory* [American Math. Society, Colloquium Pubblications, vol. XXV, (1948)] a pag. 86 nel «Problem 31» tra l'altro si domanda se esistono quasi-gruppi con un numero finito di elementi le cui relazioni di congruenze non siano permutabili.

[4] Cioè una relazione binaria che gode della proprietà riflessiva, simmetrica e transitiva.

[5] Questo termine è usato da O. ORE, *Theory of equivalence relations* [Duke Journal 9 (1942)] pag. 574.

Seguendo KIOKEMEISTER, la relazione di congruenza θ su $\overline{G}$ è normale se

β) $ax \equiv bx\,(\theta)$ implica $a \equiv b\,(\theta)$ e $xa \equiv xb\,(\theta)$ implica $a \equiv b\,(\theta)$.

Vale allora il

LEMMA: *Se θ è una relazione di congruenza normale su $\overline{G}$ ed A_1 è un blocco e $a \in \overline{G}$ anche $A_1 \cdot a$* (6) *è un blocco della θ. Se A_1 ed A_2 sono blocchi distinti della θ, tali sono $A_1 \cdot a$ ed $A_2 \cdot a$.*

Per la α) tutti gli elementi di $A_1 \cdot a$ appartengono ad uno stesso blocco C della θ; se $c \in C$, $a_1 \in A_1$ e se per l'elemento u risulta $ua = c$ (7), si ha $ua \equiv a_1 a\,(\theta)$ e per la β) $u \equiv a_1\,(\theta)$ cioè $u \in A_1$, e $A_1 \cdot a$ contiene C.

Se $a_2 \in A_2$ e se $a_2 \cdot a \in C$, dalla $a_2 a \equiv a_1 a\,(\theta)$ e dalla β) segue $a_2 \equiv a_1\,(\theta)$, contro l'ipotesi che A_1 ed A_2 siano blocchi diversi e quindi insiemi disgiunti. Da cui appunto $A_1 \cdot a \neq A_2 \cdot a$.

Ora è possibile dimostrare il

TEOREMA III: *Se A_1, A_2 e B_1, B_2 sono blocchi rispettivamente delle congruenze normali su $\overline{G}$, θ e θ_1 e verificano le*

$$A_1 \cap B_1 \neq 0\,, \quad A_1 \cap B_2 \neq 0\,, \quad B_1 \cap A_2 \neq 0\,, \tag{1}$$

A_2 e B_2 soddisfanno alla

$$A_2 \cap B_2 \neq 0\,. \tag{2}$$

Sia $k \in A_1 \cap B_1$ ed $h \in A_1 \cap B_2$, ed y un elemento di $\overline{G}$ tale che $ky = h$ e quindi per il lemma, $B_1 y = B_2$.

Si dica A^* il blocco della θ al quale appartiene y.

Sia $u \in A_2 \cap B_1$, allora $uy = v \in B_2$.

Scelto z in modo che sia $hz = h$, dalla $k \equiv h\,(\theta)$ segue, per la α), $ky \equiv hy\,(\theta)$; ma è anche $ky = h = hz$, quindi $hz \equiv hy\,(\theta)$ e, per la β), $z \equiv y\,(\theta)$; cioè $z \in A^*$.

Dall'ultima congruenza stabilita si trae $uz \equiv uy\,(\theta)$. Ma esiste un $\tau \in B_2$ tale che $\tau z = v = uy$ (poichè dalla $hz = h$ si

(6) Con $A_1 a$ s'intenda l'insieme degli elementi $a_1 a$ con $a_1 \in A_1$.

(7) L'esistenza di u segue dalla 4).

ricava per il lemma $B_2 x = B_2$) ; e si conclude che $\tau z \equiv u x(\theta)$; per la β) è quindi $\tau \equiv u(\theta)$; perciò $\tau \in A_2$ e in definitiva $A_2 \cap B_2$ è diverso da zero perchè contiene τ. E la (2) è dimostrata.

Teorema IV : *Una relazione di congruenza* θ *su* $\overline{G}$, *la quale distribuisca gli elementi di* $\overline{G}$ *in un numero finito di blocchi è normale.*

Siano $A_1, A_2, \ldots. A_n$ i blocchi della θ.

Gli insiemi $x A_1, x A_2, \ldots. x A_n$ sono, per la α), contenuti ciascuno in un blocco delle θ. Inoltre essi esauriscono $\overline{G}$ perchè $x \overline{G} = \overline{G}$ per la prima delle 2). Quindi ogni blocco della θ coincide con uno di questi insiemi.

Lo stesso può dirsi in virtù del lemma per gli insiemi $A_1 x$, $A_2 x, \ldots A_n x$. Perciò se $x a \equiv x b(\theta)$ e $a \in A_i$, $b \in A_j$, segue $x A_i = x A_j$; cioè $i = j$ e quindi $a \equiv b(\theta)$. In modo analogo si dimostra che è soddisfatta anche la seconda parte della β).

Si ottiene così come corollario il

Teorema V : *Un quasi–gruppo* $\overline{G}$, *con un numero finito di elementi, possiede soltanto relazioni di congruenza normali.*

Basta tener conto dei teoremi I e IV.

4. – Si conclude ora con il

Teorema VI : *In un quasi–gruppo con un numero finito di elementi tutte le relazioni di congruenza sono permutabili.*

Il fatto che le (1) implichino la (2), che è chiamato da Dubreil ([8]) associabilità delle relazioni di congruenza θ e θ_1, da Dubreil stesso è mostrato essere equivalente alla permutabilità delle θ e θ_1 cioè al fatto che se $a \equiv x(\theta)$, $x \equiv b(\theta_1)$ esiste y per cui $a \equiv y(\theta_1)$, $y \equiv b(\theta)$ e viceversa.

Perciò se si tiene conto dei teoremi III e V ne segue il teorema VI.

([8]) P. Dubreil, *Algèbre* [Cahiers Scientifiques, Gauthrier-Villers, Paris, 1946] pagg. 17–18. La cosa del resto è facile a dimostrarsi.