Rendiconti
del
Seminario Matematico
della
Università di Padova

Mauro Pagni

Sulla definizione dell' area di una superficie per via assiomatica

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 19 (1950), p. 303-316

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1950__19__303_0>

SULLA DEFINIZIONE DELL'AREA DI UNA SUPERFICIE PER VIA ASSIOMATICA

Nota (*) *di* MAURO PAGNI (*a Padova*).

È noto [1] che un funzionale di curva continua coincide con la lunghezza se è additivo ed inferiormente semicontinuo, se si riduce alla lunghezza sulle poligonali ed assume valori uguali per curve congruenti [2].

La questione analoga per l'area di una superficie (posta da CACCIOPOLI nella prefazione di una sua Memoria [3]) è stata risolta da ZWIRNER [4] e successivamente da SCORZA DRAGONI [5] per particolari classi di superficie, e recentemente da STAMPACCHIA [6] per la classe delle superficie rettificabili.

Il risultato di STAMPACCHIA contiene quello ottenuto da ZWIRNER, ma non quello di SCORZA DRAGONI.

Il Prof. SCORZA DRAGONI mi ha proposto di studiare la que-

(*) Pervenuta in Redazione il 19 aprile 1950.

(1) G. BARBA, *Sulla definizione di lunghezza di una curva* (Note ed Esercitazioni Matematiche, vol. 6 (1931), pagg. 16-18).

(2) Quest' ultima condizione, meno restrittiva di quella posta inizialmente da BARBA è dovuta a G. SCORZA DRAGONI; vedi G. SCORZA DRAGONI, *Una osservazione sui funzionali additivi e semicontinui di curva* (Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, vol. XIII (1934), pagg. 23-30).

(3) R. CACCIOPOLI, *Trasformazioni piane, superficie quadrabili, integrali di superficie* (Rend. Circ. Mat. di Palermo, t. LIV (1930), pagg. 217-262).

(4) G. ZWIRNER, *Sulla definizione d'area di una superficie* (Atti del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, t. XCVII, Parte II (1937-38), pagg. 409-416).

(5) G. SCORZA DRAGONI, *Sulla definizione assiomatica dell'area di una superficie* (Rend. Seminario Matem. di Padova, vol. XV (1946), pagg. 1-17).

(6) G. STAMPACCHIA, *Sulla definizione assiomatica dell'area di una superficie rettificabile* (Rendiconti Acc. Nazionale dei Lincei, classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali, s. VIII, vol. II (1947), pagg. 542-546).

stione per una certa classe di superficie, che comprendeva quella considerata da lui e da STAMPACCHIA. Nella presente Nota espongo il risultato ottenuto. Il sistema di assiomi da me adottato differisce da quello usato da ZWIRNER, SCORZA DRAGONI e STAMPACCHIA, ma si presta ugualmente (come dimostro) a caratterizzare nel caso delle curve continue la lunghezza.

§ 1.

Posizione del problema ed enunciato del teorema.

1. – Indichiamo con $\{S\}$ la classe delle superficie, di area finita secondo LEBESGUE, il cui elemento corrente S sia suscettibile di una rappresentazione parametrica

$$(1) \qquad x = x(u, v), \qquad y = y(u, v), \qquad z = z(u, v)$$

godente delle seguenti proprietà ([7]):

a) le $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ risultino continue in tutti e derivabili in quasi tutti i punti del quadrato $A: 0 \leq u \leq 1$, $0 \leq v \leq 1$ ([8]);

b) la funzione

$$W(u, v) = \left[\left(\frac{\partial (y, z)}{\partial (u, v)}\right)^2 + \left(\frac{\partial (z, x)}{\partial (u, v)}\right)^2 + \left(\frac{\partial (x, y)}{\partial (u, v)}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

(definita quasi ovunque sul quadrato A) sia quasi ovunque positiva;

([7]) Una sifatta parametrizzazione è ad es. possibile per ogni superficie del tipo topologico del disco circolare, di area finita secondo LEBESGUE (questo per un teor. di C. D. MORREY); rimando per l'esame della questione al lavoro di L. CESARI, *Parametrizzazione delle superficie continue di area finita secondo Lebesgue* (Annali di Matematica, serie IV, Tomo XXVI (1947), pagg. 301-374).

([8]) La considerazione di un quadrato invece che un dominio (pluriconnesso) serve soltanto a snellire la trattazione.

c) L'area $\mathcal{A}(S)$ di S sia uguale all'integrale (secondo LEBESGUE)

$$\mathcal{A}(S) = \iint_A W(u, v)\, du\, dv .$$

2. – Specificata la classe di superficie nella quale opereremo, facciamo alcune considerazioni che renderanno più spedito il seguito. Sia S un elemento di $\{S\}$, indichiamo con C la curva continua e chiusa immagine su S del contorno del quadrato A. Sia π un piano arbitrario e sia C_π la curva continua chiusa e piana, proiezione ortogonale di C su π. Sia Q un punto del piano π non appartenente a C_π e si indichi con $O(Q; C_\pi)$ l'indice topologico [9] dal punto Q rispetto alla curva C_π. La funzione $O(Q; C_\pi)$ è definita (come si sa) in tutti i punti del piano π (ad eccezione dei punti di C_π) e assume soltanto valori interi (lo zero compreso). Denotiamo infine con s^* l'insieme dei punti del piano π (non appartenenti a C_π) per i quali $O(Q; C_\pi) \neq 0$. Sia ora $\varphi(S)$ un funzionale definito in $\{S\}$ che goda delle seguenti proprietà:

α) sia semicontinuo inferiormente;

β) presi sul quadrato A un numero finito p di quadrati (aventi i lati paralleli a quelli di A)

$$A_1, A_2, \ldots, A_p$$

(privi a due a due di punti interni comuni) e detta S_i la porzione di S in cui le (1) portano A_i risulti

[9] Per una definizione elementare di indice topologico (o di KRONECKER) vedasi per es. B. v. KERÉKJÀRTÓ; *Vorlesungen uber Topologie*, I, (Berlin, 1923), pag. 83 segg. Per una definizione più generale ed una trattazione più approfondita nel senso della topologia combinatoria, vedere ALEXANDROFF-HOPF, *Topologie*, I (Berlin, 1935), Kap. XI, XII, in part. pagg. 419, 425, 462-464.

$$\varphi(S) \geq \sum_{i=1}^{p} \varphi(S_i) ;$$

γ) sia

$$\varphi(S) = \mathcal{A}(S)$$

sulle superficie poliedriche appartenenti ad $\{S\}$;

δ) per ogni S di $\{S\}$ e per ogni piano π sia

$$\varphi(S) \geq mis\ s^* \ (^{10}) .$$

Dimostreremo che *nelle ipotesi fatte è*

$$\varphi(S) = \mathcal{A}(S)$$

nella classe $\{S\}$.

Osservazione. - La condizione δ) porta come conseguenza che $\varphi(S)$ non può essere negativo; questo fatto sarà sfruttato nel seguito.

§ 2.

Dimostrazione del teorema.

3. - Ricordiamo la nozione di differenziabilità asintotica regolare (11).

Una funzione $f(x, y)$ data in un insieme aperto e limitato E del piano x, y ed ivi continua, è asintoticamente differenzia-

(10) La condizione δ) mi è stata suggerita dal Prof. Scorza Dragoni; con *mis* indichiamo la misura (superficiale) secondo Lebesgue.

(11) Vedasi T. Radó, *On the derivative of the Lebesgue area of continuous surfaces* (Fundamenta Mathematicae, vol. XXX (1938), pag. 34-39), *On absolutely continuous transformations in the plane* (Duke Mathema-

bile in modo regolare in un punto $P_0 \equiv (x_0, y_0)$ di E, se esistono due costanti a, b tali che sia

$$\lim_{P\to P_0} \frac{1}{\overline{PP_0}} [f(x, y) - f(x_0, y_0) - a(x - x_0) - b(y - y_0)] = 0$$

per P tendente a P_0 senza abbandonare un conveniente insieme $J(P_0)$ di densità superficiale 1 in P_0 e costituito dai contorni di tanti quadrati col centro in P_0 e con i lati paralleli agli assi.

Vale inoltre (vedi nota ([11])) il seguente teorema:

Se $f(x, y)$, continua in E, vi è quasi ovunque parzialmente derivabile, essa è dotata quasi ovunque (in E) di un differenziale asintotico regolare (e i coefficienti di questo sono quasi ovunque uguali a $f'_x(x, y)$, $f'_y(x, y)$).

4. - Ciò posto passiamo alla dimostrazione del nostro teorema.

Ragioneremo per assurdo. Se per una data superficie S_0 di $\{S\}$ risulta $\varphi(S_0) \neq \mathcal{A}(S_0)$, deve essere

$$\varphi(S_0) < \lambda^* \mathcal{A}(S_0)$$

con λ^* conveniente, positivo, minore di uno. Infatti $\mathcal{A}(S_0)$ coincide (per definizione) col minimo limite delle aree delle superficie poliedriche tendenti a S_0; e quindi assume su S_0 il massimo fra i valori di tutti i funzionali inferiormente semicontinui in $\{S\}$ che si riducono all'area ordinaria sulle superficie poliedriche.

Siano λ, ε due numeri positivi tali che

$$\lambda^* < \lambda < 1, \quad (\lambda - \lambda^*) \mathcal{A}(S_0) > 3\lambda\varepsilon.$$

tical Journal, vol. IV (1938), pagg. 189-221; pag. 219–220); R. Caccioppoli e G. Scorza Dragoni, *Necessità della condizione di Weierstrass per la semicontinuità di un integrale doppio sopra una data superficie* (Memorie della R. Accademia d'Italia, classe di Scienze fisiche matematiche e naturali vol. IX (1938), pag. 261 segg.); G. Scorza Dragoni loc. cit. in ([5]).

Per l'assoluta continuità (come funzione d'insieme) dell'integrale

$$\iint W(u, v)\, du\, dv ,$$

esiste un numero $\delta > 0$, tale che per ogni insieme misurabile I di punti del quadrato A, per cui $mis\, I < \delta$, sia

$$\iint_I W(u, v)\, du\, dv < \varepsilon . \tag{2}$$

D'altra parte le funzioni (1), rappresentanti la superficie S_0, risultano, nelle ipotesi fatte, quasi dapertutto in A dotate di un differenziale asintotico regolare. In virtù di ciò, della condizione *b*) e della quasi continuità delle derivate parziali x_u, x_v, y_u, y_v, z_u, z_v per ogni intero n positivo è possibile determinare un insieme chiuso E_n interno ad A tale che

$$mis\,(A - E_n) < \frac{\delta}{2n} \tag{3}$$

e che in E_n le derivate x_u, x_v, y_u, y_v, z_u, z_v risultino tutte continue, la funzione $W(u, v)$ positiva e le funzioni $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ dotate di un differenziale asintotico regolare.

In E_n la funzione $W(u, v)$ è uniformemente continua, quindi si può determinare un numero $\rho_n > 0$ tale che per ogni coppia di punti $P_1 \equiv (u_1, v_1)$, $P_2 \equiv (u_2, v_2)$ di E_n, la cui distanza sia minore di ρ_n, risulti

$$| W(u_2, v_2) - W(u_1, v_1) | < \varepsilon . \tag{4}$$

Indichiamo poi con m_n il minimo positivo di $W(u, v)$ in E_n e con M_n il massimo (positivo) della somma $|x_u| + |x_v| + |y_u| + |y_v| + |z_u| + |z_v|$, sempre in E_n.

Ad ogni punto $P_0 \equiv (u_0, v_0)$ di E_n è possibile associare una successione di quadrati $Q_{n,1}(P_0)$, $Q_{n,2}(P_0), \ldots$, interni ad A, coi centri in P_0, coi lati infinitesimi e paralleli agli assi u, v, in modo che valgano le

$$(5)\quad \begin{cases} \lim\limits_{P\to P_0} \dfrac{1}{\overline{PP_0}}[x(u,v)-x(u_0,v_0)-x_u(u_0,v_0)(u-u_0)-x_v(u_0,v_0)(v-v_0)]=0, \\ \lim\limits_{P\to P_0} \dfrac{1}{\overline{PP_0}}[y(u,v)-y(u_0,v_0)-y_u(u_0,v_0)(u-u_0)-y_v(u_0,v_0)(v-v_0)]=0, \\ \lim\limits_{P\to P_0} \dfrac{1}{\overline{PP_0}}[z(u,v)-z(u_0,v_0)-z_u(u_0,v_0)(u-u_0)-z_v(u_0,v_0)(v-v_0)]=0, \end{cases}$$

se P tende a P_0 mantenendosi sui lati di $Q_{n,1}(P_0)$, $Q_{n,2}(P_0)$,...

Per un noto lemma geometrico di VITALI, applicato all'insieme E_n e ai quadrati $Q_{n,m}$, si possono prendere r_n punti $P_1 \equiv (u_1, v_1)$, $P_2 \equiv (u_2, v_2)$, ..., $P_{r_n} \equiv (u_{r_n}, v_{r_n})$ ed r_n quadrati $T_{n,1} = Q_{n,m_1}(P_1)$, ..., $T_{n,r_n} = Q_{n,m_{r_n}}(P_{r_n})$ in modo che:

I) $T_{n,1}$, ..., T_{n,r_n} siano a due a due privi di punti comuni ed abbiano i lati minori di δ_n (dove δ_n è un numero positivo minore di ρ_n);

II) sia

$$(6)\qquad mis\,(E_n - E_n \cdot \sum_{i=1}^{r_n} T_{n,i}) < \frac{\delta}{2n},$$

di guisa che, ricordando la (3),

$$(7)\qquad mis\left(A - \sum_{i=1}^{r_n} T_{n,i}\right) < \frac{\delta}{n},$$

$$(8)\qquad mis\left(\sum_{i=1}^{r_n} T_{n,i} - E_n \cdot \sum_{i=1}^{r_n} T_{n,i}\right) < \frac{\delta}{n};$$

III) posto $\nu_n = \dfrac{m_n}{4n \cdot M_n}$, sia

$$(9)\begin{cases} |x(u,v)-x(u_i,v_i)-x_u(u_i,v_i)(u-u_i)-x_v(u_i,v_i)(v-v_i)|<\nu_n\overline{PP_i}, \\ |y(u,v)-y(u_i,v_i)-y_u(u_i,v_i)(u-u_i)-y_v(u_i,v_i)(v-v_i)|<\nu_n\overline{PP_i}, \\ |z(u,v)-z(u_i,v_i)-z_u(u_i,v_i)(u-u_i)-z_v(u_i,v_i)(v-v_i)|<\nu_n\overline{PP_i} \end{cases}$$
$$(i=1,2,\ldots,r_n),$$

se $P\equiv(u,v)$ si mantiene sul contorno di $T_{n,i}$.

Consideriamo per ogni punto $P_i\equiv(u_i,v_i)$ $(i=1,2,\ldots,r_n)$ le trasformazioni

$$(10)\qquad \begin{cases} x=x(u,v), \\ y=y(u,v), \\ z=z(u,v), \end{cases}$$

$$(11)\qquad \begin{cases} x=x_i+x_u(u_i,v_i)(u-u_i)+x_v(u_i,v_i)(v-v_i), \\ y=y_i+y_u(u_i,v_i)(u-u_i)+y_v(u_i,v_i)(v-v_i), \\ z=z_i+z_u(u_i,v_i)(u-u_i)+z_v(u_i,v_i)(v-v_i) \end{cases}$$

per u, v variabile in $T_{n,i}$, dove (x_i, y_i, z_i) è il punto corrispondente nella (10) a P_i.

A $T_{n,i}$ corrispondono per le (10) una porzione della superficie S_0, porzione che indicheremo con $S_{n,i}$, per le (11) un parallelogramma, che denoteremo con $\Sigma_{n,i}$.

Osserviamo subito (ci sarà utile in seguito) che la distanza tra due punti di $S_{n,i}$, $\Sigma_{n,i}$ corrispondenti ad uno stesso punto P del bordo di $T_{n,i}$ è per le (9) minore di $\sqrt{3}\,\nu_n\,\overline{PP_i}$.

5. - Prendiamo ora in esame la seguente differenza

$$\sum_{i=1}^{r_n}\{\mathcal{A}(\Sigma_{n,i})-\mathcal{A}(S_{n,i})\}=\sum_{i=1}^{r_n}\iint\limits_{T_{n,i}}[W(u_i,v_i)-W(u,v)]\,du\,dv=$$

$$= \sum_{i=1}^{r_n} \iint\limits_{E_n \cdot T_{n,i}} [W(u_i, v_i) - W(u, v)]\, du\, dv + \sum_{i=1}^{r_n} \iint\limits_{(T_{n,i} - E_n \cdot T_{n,i})} W(u_i, v_i)\, du\, dv -$$

$$- \iint\limits_{\left(\sum_{i=1}^{r_n} T_{n,i} - E_n \cdot \sum_{i=1}^{r_n} T_{n,i}\right)} W(u, v)\, du\, dv .$$

Il primo integrale dell'ultimo membro risulta, per la (4) e per la I), in modulo minore di ε *mis* A, cioè di ε, perchè *mis* $A = 1$; l'ultimo integrale, per la (8) e per la (2), è anch'esso minore in modulo di ε. Invece il secondo è non negativo, quindi,

$$\sum_{i=1}^{r_n} \{ \mathcal{A}(\Sigma_{n,i}) - \mathcal{A}(S_{n,i}) \} > -2\varepsilon .$$

D'altra parte si ha

$$\mathcal{A}(S_0) - \sum_{i=1}^{r_n} \mathcal{A}(S_{n,i}) = \iint\limits_{A - \sum_{i=1}^{r_n} T_{n,i}} W(u, v)\, du\, dv$$

e quest'ultimo integrale è per la (7) e per la (2) minore di ε.

Dico allora che

$$\varphi(S_0) < \lambda \sum_{i=1}^{r_n} \mathcal{A}(\Sigma_{n,i}) . \tag{12}$$

Infatti

$$\lambda \sum_{i=1}^{r_n} \mathcal{A}(\Sigma_{n,i}) > \lambda \sum_{i=1}^{r_n} \mathcal{A}(S_{n,i}) - 2\varepsilon\lambda > \lambda\, \mathcal{A}(S_0) - 3\lambda\varepsilon$$

e quest'ultima quantità, per come sono stati presi λ ed ε, è minore di

$$\lambda\, \mathcal{A}(S_0) - (\lambda - \lambda^*)\, \mathcal{A}(S_0) > \varphi(S_0) .$$

Tenendo presente l'ipotesi β) relativa al funzionale $\varphi(S)$ e cioè che

$$\sum_{i=1}^{r_n} \varphi(S_{n,i}) \leq \varphi(S_0),$$

segue dalla (12)

$$\sum_{i=1}^{r_n} \varphi(S_{n,i}) < \lambda \sum_{i=1}^{r_n} \mathcal{A}(\Sigma_{n,i}) ;$$

esiste allora almeno un indice i_n (prendiamo il più piccolo) tale che

$$\varphi(S_{n,i_n}) < \lambda\, \mathcal{A}(\Sigma_{n,i_n}) . \tag{13}$$

6. - La relazione $\varphi(S_{n,i_n}) < \lambda\, \mathcal{A}(\Sigma_{n,i_n})$ vale per ogni intero positivo.

Per semplicità di scrittura poniamo (per ogni n)

$$S_{n,i_n} = s_n \ ; \quad \Sigma_{n,i_n} = \sigma_n \ .$$

Con ciò la relazione (13) si scrive

$$\varphi(s_n) < \lambda\, \mathcal{A}(\sigma_n) . \tag{14}$$

Indichiamo con t_n la lunghezza del lato del quadrato T_{n,i_n} del piano u, v (quadrato a cui corrispondono per le (10), (11) rispettivamente s_n, σ_n); la distanza di due punti di s_n, σ_n corrispondenti ad uno stesso punto P del bordo di T_{n,i_n} è (per quanto abbiamo osservato alla fine del n. 4) minore di $\sqrt{3}\, \nu_n \overline{PP_{i_n}}$ e quindi (essendo $t_n > \overline{PP_{i_n}}$) minore di $\sqrt{3}\, \nu_n t_n$.

Consideriamo un parallelogramma σ'_n interno a σ_n e coi lati paralleli a quelli di σ_n, ogni lato di σ'_n disti poi dal vicino lato parallelo di σ_n di $\sqrt{3}\, \nu_n t_n$.

Ciò posto, sia C_n la curva chiusa immagine su S_0 del bordo di T_{n,i_n}; C^*_n la curva chiusa piana proiezione ortogonale di C_n

sul piano contenente σ_n. Con s_n^* indichiamo l'insieme dei punti Q (del piano di σ_n) non appartenenti a C_n^* per i quali sia $O(Q; C_n^*) \neq 0$.

Per quanto postulato in δ) risulta

$$\varphi(s_n) \geq mis\, s_n^* \;;$$

d'altra parte non è difficile constatare (applicando il teorema di Poincarè-Bohl) [12] che l'indice topologico $O(Q; C_n^*)$ è diverso da zero nei punti appartenenti al parallelogramma σ_n'; segue così

$$mis\, s_n^* \geq mis\, \sigma_n' = \mathcal{A}(\sigma_n') = \varphi(\sigma_n')$$

ed anche

$$\varphi(s_n) \geq \varphi(\sigma_n') \,. \tag{15}$$

Tenendo presente la (14) possiamo scrivere

$$\lambda = \frac{\lambda\, \mathcal{A}(\sigma_n)}{\varphi(\sigma_n)} > \frac{\varphi(s_n)}{\varphi(\sigma_n') + \varphi(\sigma_n) - \varphi(\sigma_n')} \,. \tag{16}$$

Cerchiamo una maggiorazione di $\varphi(\sigma_n) - \varphi(\sigma_n')$.

Indicati con l_n^u, l_n^v i lati del parallelogramma σ_n, si ha

$$\varphi(\sigma_n) - \varphi(\sigma_n') < 2\sqrt{3}\, \nu_n\, t_n\, (l_n^u + l_n^v) \,.$$

D'altronde

$$l_n^u = t_n \sqrt{x_u^2 + y_u^2 + z_u^2} \;, \quad l_n^v = t_n \sqrt{x_v^2 + y_v^2 + z_v^2} \,,$$

dove le derivate, che compaiono sotto i segni di radice, sono calcolate nel centro del quadrato T_{n,i_n} e quindi in un punto di E_n.

Da ciò segue

$$l_n^u + l_n^v \leq t_n M_n \,,$$

(12) Vedasi ad es. Alexandroff – Hopf, *Topologie*, I (Berlin 1935), pag. 459.

e quindi

$$\varphi(\sigma_n) - \varphi(\sigma'_n) < 2\sqrt{3}\, \nu_n M_n t_n^2 ;$$

e, ricordato che

$$\nu_n = \frac{m_n}{4n \cdot M_n},$$

in definitiva si ha

$$\varphi(\sigma_n) - \varphi(\sigma'_n) < \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{m_n}{n} t_n^2 .$$

Dalla relazione ora scritta, tenendo presente la $\varphi(\sigma_n) \geq m_n t_n^2$, si ha

$$\varphi(\sigma'_n) > m_n t_n^2 - \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{m_n}{n} t_n^2 ;$$

segue allora facilmente che per $n \to \infty$ la differenza $\varphi(\sigma_n) - \varphi(\sigma'_n)$ è un infinitesimo di ordine superiore rispetto a $\varphi(\sigma'_n)$.

Questo, insieme con la (15), permette di rilevare che la relazione (16) è assurda.

Infatti da una parte λ è un numero fisso minore di 1 e dall' altra

$$\min_{n \to \infty} \lim \frac{\varphi(s_n)}{\varphi(\sigma'_n) + \varphi(\sigma_n) - \varphi(\sigma'_n)} \geq 1 .$$

Resta così provata la nostra asserzione e cioè che

$$\varphi(S) = \mathcal{A}(S)$$

nella classe $\{S\}$ delle superficie da noi considerate.

§ 3.

Caratterizzazione della lunghezza.

7. - Facciamo ora vedere che un funzionale $\phi(C)$ di curva continua godente di proprietà analoghe a quelle poste per φ (vedi n. 2, α) β) γ) δ)) coincide con la lunghezza.

Sia $\{C\}$ la classe di curve il cui elemento corrente C sia una curva continua avente lunghezza finita od infinita; detta lunghezza si indicherà con $\mathcal{L}(C)$.

Sia poi $\phi(C)$ un funzionale, definito in $\{C\}$ e che goda delle seguenti proprietà:

α) sia semicontinuo inferiormente;

β) sia additivo, cioè decomposta la curva C in un numero finito p di archi $C_1, C_2, \ldots, C_p$, risulti

$$\phi(C) = \sum_{i=1}^{p} \phi(C_i);$$

γ) sia

$$\phi(C) = \mathcal{L}(C)$$

sulle poligonali;

δ) per ogni curva C, indicata con $\overline{C}$ la corda sottesa, sia

$$\phi(C) \geq \mathcal{L}(\overline{C}) = \phi(\overline{C}).$$

In queste ipotesi proveremo che risulta

$$\phi(C) = \mathcal{L}(C)$$

nella classe $\{C\}$ sopradetta.

Osserviamo innanzitutto che, per la δ), $\phi(C)$ è non negativo.

Ciò fatto ragioniamo anche qui per assurdo. Supponiamo cioè che su una curva C_0 di $\{C\}$ sia

$$\mathcal{L}(C_0) \neq \psi(C_0) .$$

Segue anche qui facilmente (per α), γ)) che deve essere

$$\mathcal{L}(C_0) > \psi(C_0) .$$

Per la definizione di lunghezza di una curva, come estremo superiore delle poligonali inscritte, si potrà allora determinare una poligonale, di lato corrente $\overline{C}_n$, inscritta in C_0 e tale che

$$\Sigma\, \mathcal{L}(\overline{C}_n) = \Sigma\, \psi(\overline{C}_n) > \psi(C_0) .$$

D'altra parte, per la additività di ψ, si ha

$$\psi(C_0) = \Sigma\, \psi(C_n) ,$$

(C_n essendo l'arco di C avente gli estremi di $\overline{C}_n$) e quindi

$$\Sigma\, \psi(\overline{C}_n) > \Sigma\, \psi(C_n) ;$$

ed essendo (come abbiamo osservato) ψ non negativo esiste allora almeno un indice i tale che $\psi(\overline{C}_i) > \psi(C_i)$.

Ma questo contraddice la δ) ; e quindi risulta appunto $\psi(C) = \mathcal{L}(C)$.