

# RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

ROBERTO CONTI

## **Sul secondo teorema della media per gli integrali doppi**

*Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova*,  
tome 19 (1950), p. 294-302

[http://www.numdam.org/item?id=RSMUP\\_1950\\_\\_19\\_\\_294\\_0](http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1950__19__294_0)

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1950, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

## SUL SECONDO TEOREMA DELLA MEDIA PER GLI INTEGRALI DOPPI

Nota (\*) di ROBERTO CONTI (a Firenze).

Siano  $p$  ed  $f$  due funzioni reali delle variabili  $x, y$ , definite nel rettangolo  $R$  di vertici  $A \equiv (a, \alpha)$ ,  $B \equiv (b, \alpha)$ ,  $C \equiv (b, \beta)$ ,  $D \equiv (a, \beta)$ , ed ivi entrambe integrabili- $L$  (cioè integrabili secondo LEBESGUE); la  $p$  sia inoltre non negativa e limitata.

LEBESGUE ha provato (1) che per ogni coppia di funzioni  $p, f$  soddisfacenti le ipotesi dette e per ogni numero  $\bar{p}$  non inferiore al limite superiore  $p''$  della  $p$  in  $R$ , esiste almeno un insieme  $I$  di  $R$  per cui si ha

$$(A) \quad \int_R p f d(x, y) = \bar{p} \int_I f d(x, y).$$

La (A), la quale esprime il secondo teorema della media per gli integrali doppi, vale anche per funzioni di un numero  $n$  qualunque di variabili; se  $n = 1$ , sostituendo il rettangolo  $R$  con un intervallo  $(a, b)$ ,  $I$  rappresenterà un opportuno insieme di punti di  $(a, b)$ . In quest'ultimo caso la natura dell'insieme  $I$  viene, com'è noto, notevolmente precisata se alle ipotesi fatte si aggiunge quella che la  $p$  sia una funzione non crescente; in tal caso infatti  $I$  è addirittura costituito dai punti di un intervallo  $(a, c)$  di  $(a, b)$ , il punto  $c$  potendo eventualmente coincidere con  $b$  (2).

(\*) Pervenuta in Redazione il 14 aprile 1950.

(1) ved.: H. LEBESGUE, *Sur l'intégration des fonctions discontinues*, (Ann. sc. Ec. Normale Sup., (3), XXVII, pp. 361-450, (1910); p. 444).

(2) ved.: E. W. HOBSON, *On the second mean value theorem of the integral calculus*, (Proc. London Math. Soc., (2), 7, pp. 14-23, (1909));

È naturale allora chiedersi se nel caso di due variabili l'aggiunta di opportune « ipotesi di monotonia » circa la  $p$  renda possibile un' analoga determinazione della natura dell' insieme  $I$  che appare in (A).

Ora il concetto di funzione monotona di più variabili può esser posto, com' è noto, in più modi; tuttavia le ricerche concernenti il secondo teorema della *media* in più variabili considerano, in vista delle applicazioni, principalmente <sup>(3)</sup> due classi di « funzioni monotone » e cioè:

I. - le funzioni  $p$  non crescenti rispetto a ciascuna variabile (cioè soddisfacenti in tutto  $R$  le

$$(1) \quad p(x+h, y) - p(x, y) \leq 0, \quad h > 0;$$

$$(2) \quad p(x, y+k) - p(x, y) \leq 0, \quad k > 0),$$

e dotate in  $R$  di incremento doppio non positivo (cioè soddisfacenti in tutto  $R$  la

$$(3) \quad p(x+h, y+k) + p(x, y) - p(x+h, x) - p(x, y+k) \leq 0, \quad h > 0, k > 0);$$

II. - le funzioni  $p$  non crescenti rispetto a ciascuna variabile (cioè soddisfacenti in  $R$  le (1), (2), ma non, in generale, altre condizioni, quali la (3)).

Poichè la prima delle due classi è più ristretta della seconda è presumibile che intorno all' insieme  $I$  si avranno no-

cfr. anche: G. VITALI - G. SANSONE: *Moderna teoria delle funzioni di variabile reale* (parte I<sup>a</sup>, Bologna, 1943, 2<sup>a</sup> ed., p. 116).

Avvertiamo che per evitare ripetizioni nel seguito si indicherà sempre con  $p$  una funzione non negativa e limitata. Inoltre supporremo, senza sostanziali restrizioni, che il 1° membro della (A) sia diverso da zero; se fosse nullo la (A) può scriversi ad es. per un qualunque insieme di misura nulla.

<sup>(3)</sup> Si fa astrazione dalle ricerche riguardanti gli integrali « ripetuti » o « iterati », dove compaiono anche altri tipi di monotonia. Cfr. ad es.: U. DINI, *Sugli integrali multipli in generale, ecc.* (Rend. Circ. Mat. Palermo, XVIII, pp. 318-359, (1904), p. 326).

zioni più precise quando  $p$  appartiene appunto a tale classe; effettivamente W. H. YOUNG ha provato <sup>(4)</sup> che *in questo caso l'insieme  $I$  è un rettangolo di  $R$  avente un lato  $AU$  su  $AD$  ed un lato  $AV$  su  $AB$ ; tale rettangolo può coincidere con  $R$ .*

Sembra tuttavia che la natura di  $I$  risulti sufficientemente precisata anche nel caso che la  $p$  faccia parte della seconda classe. Si ha infatti il

**TEOREMA** - *Se  $p$  è in  $R$  una funzione non crescente rispetto a ciascuna variabile ed  $f$  è in  $R$  una funzione integrabile- $L$ , limitata o no, allora la (A) vale per almeno un insieme  $I$  che è la regione interna ad una curva continua chiusa <sup>(5)</sup> (e rettificabile) costituita da un segmento  $AU$  del lato  $AD$ , da un segmento  $AV$  del lato  $AB$  e da una curva continua  $\mathcal{D}$  congiungente  $U$  con  $V$  ed incontrata in un sol punto od in un solo segmento da ogni retta perpendicolare ad  $AU$  o ad  $AV$ .*

La dimostrazione di questo teorema (che estende e completa due risultati di ARZELÀ <sup>(6)</sup>) si basa su alcune proprietà di un certo insieme di curve (n. 1, 2), su alcune considerazioni di carattere abbastanza elementare circa le funzioni di due variabili non crescenti rispetto a ciascuna variabile (n. 3), ed infine su di una disuguaglianza dovuta ad E. W. HOBSON (n. 4).

1. - Cominciamo dallo studio di un certo insieme di curve, ponendo anzitutto alcune definizioni.

Indicheremo con  $\mathcal{D}$  una curva continua aperta, appartenente al rettangolo  $R$ , chiuso, avente come primo estremo  $U$  un punto di  $AD$ , chiuso, e come secondo estremo  $V$  un punto

<sup>(4)</sup> ved.: W. H. YOUNG: *On multiple integration by parts and the second theorem of the mean*, (Proc. London Math. Soc., (2), XVI, pp. 273-293, (1917); p. 290). Cfr. anche E. W. HOBSON, *Theory of functions* (vol. I° Cambridge, 1927, 3ª ed., pp. 625-626).

<sup>(5)</sup> Curva continua chiusa (aperta) è un insieme ordinato di punti omeomorfo ad una circonferenza (ad un segmento).

<sup>(6)</sup> ved.: C. ARZELÀ: *Sugli integrali doppi* (Mem. R. Acc. Sc. Ist. Bologna, (V), II, pp. 133-147, (1891), p. 145); *Sul secondo teorema della media per gli integrali doppi*, (ibid. (V), X, pp. 99-108, (1902)). Tali ricerche riguardavano, necessariamente, funzioni integrabili secondo MENGOLI-CAUCHY-RIEMANN.

di  $AB$ , chiuso; tale curva sia incontrata da ogni parallela ad  $AB$  uscente da un punto di  $AU$  e da ogni parallela ad  $AD$  uscente da un punto di  $AV$ , in un sol punto od in un solo segmento.  $\Delta$  indichi l'insieme di tutte le curve  $\mathcal{D}$ .

Per ogni numero  $\rho > 0$ , fissato ad arbitrio, diremo intorno  $(\rho)$ , puntuale, di una  $\mathcal{D}$ , l'insieme dei punti di  $R$  che abbiano distanza non superiore a  $\rho$  da almeno un punto di  $\mathcal{D}$ . L'insieme di tutte le curve di  $\Delta$  i punti delle quali appartengono tutti ad un certo intorno  $(\rho)$  di una data  $\mathcal{D}$  si dirà che costituisce un intorno  $V_\rho$  (di curve, dipendente da  $\rho$ ) di tale  $\mathcal{D}$ .

Una  $\mathcal{D}$  si dirà poi curva di accumulazione di un sottoinsieme  $E$  di  $\Delta$ , i cui elementi indichiamo con  $\mathcal{E}$ , se per ogni  $\rho > 0$  esiste un intorno  $V_\rho$  della  $\mathcal{D}$  del quale faccia parte almeno una curva  $\mathcal{E}$  distinta da  $\mathcal{D}$ . In questo modo l'insieme  $\Delta$  viene ad esser considerato come uno spazio  $(V)$ , nel senso di FRÉCHET (7).

Con queste definizioni vale il

LEMMA I. - *L'insieme  $\Delta$  è chiuso, compatto e connesso.*

$\Delta$  è chiuso per definizione. La seconda asserzione è provata da un noto criterio di TONELLI (8) da cui risulta che ogni insieme di infinite  $\mathcal{D}$  dà luogo ad almeno una  $\mathcal{D}$  di accumulazione.

Resta dunque da provare soltanto che  $\Delta$  è connesso, vale a dire che se  $\Delta_1, \Delta_2$  sono due insiemi non vuoti, privi di elementi comuni e tali che  $\Delta_1 + \Delta_2 = \Delta$ , esiste almeno un elemento di uno dei due che è elemento di accumulazione dell'altro. Per dimostrare ciò è sufficiente (9) far vedere che ogni coppia  $\mathcal{D}_0, \mathcal{D}_1$  di elementi di  $\Delta$  appartiene ad un sottinsieme di  $\Delta$  connesso.

Osserviamo anzitutto che se  $\mathcal{D}$  è una qualunque curva di  $\Delta$  è sempre possibile esprimere le coordinate  $x, y$  del punto  $P$  variabile su di essa mediante due funzioni  $x(t), y(t)$  di un parametro  $t$  variabile da zero ad uno; basta per questo indicare

(7) ved.: M. FRÉCHET, *Espaces abstraits* (Paris, 1928, p. 172). Si vedano ivi anche le altre definizioni relative agli insiemi di uno spazio  $(V)$ .

(8) ved.: L. TONELLI, *Fondamenti di Calcolo delle Variazioni* (vol. I<sup>o</sup>, Bologna, 1922, p. 89).

(9) cfr.: M. FRÉCHET, loc. cit., p. 228.

con  $t$  il rapporto tra la lunghezza dell'arco di estremi  $U$ ,  $P$  e la lunghezza totale della  $\mathcal{D}$ .

Dette allora  $\mathcal{D}_0$ ,  $\mathcal{D}_1$  due qualunque curve di  $\Delta$  siano

$$\mathcal{D}_0: \quad x = x_0(t), \quad y = y_0(t); \quad 0 \leq t \leq 1$$

$$\mathcal{D}_1: \quad x = x_1(t), \quad y = y_1(t); \quad 0 \leq t \leq 1$$

le loro rappresentazioni parametriche, nel modo ora detto, e si consideri la curva

$$\mathcal{D}_\theta: \quad x_\theta = (1 - \theta)x_0(t) + \theta x_1(t), \quad y_\theta = (1 - \theta)y_0(t) + \theta y_1(t); \quad 0 \leq t \leq 1$$

dove  $\theta$  è un numero compreso tra zero ed uno.

È subito visto che per  $0 \leq \theta \leq 1$  ogni  $\mathcal{D}_\theta$  appartiene ad  $R$  e che il suo primo (secondo) estremo appartiene ad  $AD$  (ad  $AB$ ); infine ogni  $\mathcal{D}$  essendo caratterizzata dall'essere la  $x$  funzione non decrescente, la  $y$  funzione non crescente del parametro e tali essendo appunto la  $x$  e la  $y$  di ogni  $\mathcal{D}_\theta$  (poichè  $1 - \theta \geq 0$ ,  $\theta \geq 0$ ), ogni  $\mathcal{D}_\theta$  appartiene a  $\Delta$ .

Per provare che l'insieme delle  $\mathcal{D}_\theta$  ( $0 \leq \theta \leq 1$ ) è connesso basterà osservare che tale è l'insieme dei punti dell'intervallo  $0 \leq \theta \leq 1$  e che se  $d$  è il limite superiore, al variare di  $t$ , delle distanze

$$\sqrt{[x_0(t) - x_1(t)]^2 + [y_0(t) - y_1(t)]^2}$$

e  $\theta'$ ,  $\theta''$  sono due qualunque valori di  $\theta$  si ha

$$\sqrt{[x_{\theta'}(t) - x_{\theta''}(t)]^2 + [y_{\theta'}(t) - y_{\theta''}(t)]^2} \leq |\theta' - \theta''| \cdot d,$$

cioè  $\mathcal{D}_{\theta'}$  appartiene all'intorno ( $|\theta' - \theta''| \cdot d$ ) di  $\mathcal{D}_{\theta''}$  (e reciprocamente).

2. - Delle due spezzate in cui gli estremi  $U, V$  di una qualunque  $\mathcal{D}$  dividono il contorno di  $R$ , sia  $\mathcal{D}_0$  quella che contiene il punto  $A$ . Se  $\mathcal{D}$  coincide con  $\mathcal{D}_0$  sia  $I$  l'insieme dei punti di  $\mathcal{D} \equiv \mathcal{D}_0$ , altrimenti  $I$  indichi l'insieme dei punti della curva chiusa  $\mathcal{D} + \mathcal{D}_0$  e quelli della regione ad essa interna.

Sia poi  $f$  una funzione integrabile- $L$  in  $R$ ; il numero

$$\mathcal{F}(\mathcal{D}) = \int_I f d(x, y)$$

è una funzione della curva  $\mathcal{D}$ , vale a dire un funzionale definito nell'insieme  $\Delta$  ed ivi limitato.

Nel seguito  $\delta', \delta''$  indicheranno il limite inferiore ed il limite superiore di  $\mathcal{F}(\mathcal{D})$  nell'insieme  $\Delta$ .

$\mathcal{F}(\mathcal{D})$  è un funzionale continuo in  $\Delta$ ; vale a dire, fissato un numero  $\varepsilon > 0$  e detta  $\mathcal{D}$  una qualunque curva di  $\Delta$ , si può determinare un intorno  $V_\rho$  di  $\mathcal{D}$  per tutte le  $\mathcal{D}'$  del quale si ha <sup>(10)</sup>

$$|\mathcal{F}(\mathcal{D}') - \mathcal{F}(\mathcal{D})| < \varepsilon.$$

Segue da ciò e dal lemma I, in virtù di noti teoremi <sup>(11)</sup> il

LEMMA II. - Se  $\delta$  è un qualunque numero,  $\delta' \leq \delta \leq \delta''$ , esiste almeno una  $\mathcal{D}$  di  $\Delta$  per cui è  $\mathcal{F}(\mathcal{D}) = \delta$ .

<sup>(10)</sup> Si ricordi che  $\int_I f d(x, y)$  tende uniformemente a zero con la mi-

sura di  $I$  e si osservi che l'intorno ( $\rho$ ) di una  $\mathcal{D}$  è un insieme chiuso la cui misura decresce con  $\rho$  e tende a zero per  $\rho \rightarrow 0$ . Quest'ultima affermazione si rende evidente ad es. se supposto  $\rho = 1/n$  e detta  $L$  la lunghezza totale della  $\mathcal{D}$  considerata si divide la  $\mathcal{D}$  in  $n$  archi di uguale lunghezza mediante i punti  $P_0 \equiv U, P_1, P_2, \dots, P_k, \dots, P_{n-1}, P_n \equiv V$  e si descrive il cerchio  $C_k$  di raggio  $(L+1)/n$  avente il centro in  $P_k$ . Ogni punto dell'intorno  $(1/n)$  della  $\mathcal{D}$  appartiene ad almeno un  $C_k$  e quindi all'insieme somma  $\Sigma_k C_k$ , la cui area tende a zero con  $1/n$ .

<sup>(11)</sup> ved. : M. FRÉCHET, loc. cit., p. 236.

3. - Svolgeremo ora alcune considerazioni sulle funzioni non crescenti.

Sia anzitutto  $\varphi = \varphi(\xi)$  una funzione, limitata o no, definita nell'intervallo chiuso  $r$  ed ivi non crescente; sia  $\mu$  un qualunque numero non maggiore del limite superiore  $\varphi''$  della  $\varphi$  in  $r$ , e sia infine  $i = i(\mu)$  l'insieme dei punti  $\xi$  di  $r$  nei quali è

$$\mu < \varphi(\xi) \leq \varphi''.$$

Se  $i$  non si riduce all'estremo sinistro di  $r$  sia  $\xi$  un punto della frontiera  $Fi$  di  $i$  distinto da tale estremo (ed eventualmente coincidente con l'estremo destro di  $r$ ). Se  $\xi$  appartiene ad  $i$  ogni  $\xi' < \xi$  appartiene anch'esso ad  $i$ , nè vi possono essere  $\xi'' > \xi$  appartenenti ad  $i$  altrimenti  $\xi$  risulterebbe interno ad  $i$  contro l'ipotesi. Se  $\xi$  appartiene ad  $r - i$  ogni  $\xi' > \xi$  è anch'esso punto di  $r - i$ , nè vi saranno punti  $\xi'' < \xi$  appartenenti ad  $r - i$ , altrimenti  $\xi$  sarebbe interno ad  $r - i$ . Dunque esiste al più un punto di  $Fi$  interno ad  $r$ , ossia

LEMMA III. - *L'insieme  $i$  [l'insieme  $r - i$ ] se non consta unicamente dell'estremo sinistro [destro] di  $r$ , è un intervallo, che può risultare aperto o chiuso a destra [a sinistra].*

Sia ora  $\varphi = \varphi(x, y)$  una funzione definita nel rettangolo  $R$ , chiuso, limitata o no, ivi non crescente sia rispetto alla  $x$  che rispetto alla  $y$ ; sia  $\varphi''$  il limite superiore della  $\varphi$  in  $R$ ,  $\mu$  un qualunque numero  $\leq \varphi''$ .

Proviamo il

LEMMA IV. - *Se esiste almeno un punto dell'insieme*

$$I = I(\mu): \quad \mu < \varphi(x, y)$$

*che non appartenga ad  $AB$  od a  $AD$ , esiste una curva  $\mathcal{D}$  dell'insieme  $\Delta$  (n. 1) congiungente un punto  $U$  di  $AD$  con un punto  $V$  di  $AB$ , tale che tutti i punti della regione interna [esterna] alla curva chiusa costituita dalla  $\mathcal{D}$  e dalla spezzata  $VAU$  appartengono ad  $I$  [ad  $R - I$ ].*

Detto  $i_\alpha$  l'insieme in cui  $\varphi(x, \alpha) > \mu$  si ha (lemma III):

$$i_\alpha: \quad a \leq x \leq c \leq b, \quad y = \alpha.$$



Se fosse  $a = c$  non vi potrebbe essere alcun punto di  $I$  non appartenente ad  $AB$  o ad  $AD$ ; quindi  $a < c$  e detto  $V$  il punto  $(c, \alpha)$  è  $V \notin A$ . Analogamente se  $i_a$  è l'insieme in cui  $\varphi(a, y) > \mu$ , potremo definire il punto  $U \equiv (a, \gamma)$  distinto da  $A$ .

Detto  $I_0$  l'insieme dei punti  $I$  non appartenenti ad  $AB$  nè ad  $AD$  (non vuoto per ipotesi) mostriamo che l'insieme costituito dai punti  $U$  e  $V$  e dalla frontiera  $FI_0$  di  $I_0$  è una curva  $\mathcal{D}$  (n. 1).

Fissiamo a piacere  $x$  in  $(a, b)$  chiuso e sia  $i_x = i(\mu, x)$  l'insieme dei punti  $I$  di ascissa  $x$ ;  $i_x$  è vuoto se  $c < x \leq b$ . Sia dunque  $a < x \leq c \leq b$ ; la frontiera di  $i_x$  appartiene a quella di  $I_0$  ed è costituita da un sol punto  $P$  (lemma III). Associando ad ogni  $x$  di  $a < x \leq c$  l'ordinata  $y$  di  $P$  e ad  $x = a$  l'ordinata  $\gamma$  di  $U$  si ottiene una funzione ad un valore  $y = y(x)$  definita in  $(a, c)$  e tale che  $\alpha \leq y(x) \leq \beta$ ; tale funzione è non crescente.

Sia infatti  $P'$  un qualunque punto interno al rettangolo  $(A, P)$  di vertici opposti  $A, P$  e quindi di ordinata  $y' < y(x)$ ; se  $P'$  appartenesse ad  $R - I$  dovrebbe appartenere ad  $R - I$  anche il punto  $(x, y')$  ed allora il punto  $P \equiv (x, y(x))$  sarebbe (lemma III) interno ad  $R - i_x$  contro l'ipotesi. Perciò per ogni coppia di numeri  $x, x'$  di  $(a, c)$  con  $x' < x$  è  $y(x') \geq y(x)$ .

Della frontiera di  $I_0$  fa dunque parte la grafica di una funzione  $y = y(x)$  non crescente in  $(a, c)$ . Se questa funzione non è continua sia  $\bar{x}$  uno dei punti di discontinuità, necessariamente di prima specie, e siano  $y(\bar{x} +)$ ,  $y(\bar{x} -)$  i limiti destro e sinistro di  $y = y(x)$  in  $\bar{x}$ . Il punto  $\bar{U} \equiv (\bar{x}, y(\bar{x} -))$ , se non coincide con  $(\bar{x}, y(\bar{x}))$ , è punto di accumulazione di punti  $(x, y(x))$  e quindi appartiene in ogni caso alla  $FI_0$ : lo stesso sarà del punto  $V \equiv (\bar{x}, y(\bar{x} +))$ .

Sia poi  $i_\eta$  l'insieme dei punti di  $I$  aventi ordinata  $\eta$  scelta ad arbitrio tra  $y(\bar{x} +)$  ed  $y(\bar{x} -)$  e sia  $Q$  il punto frontiera (lemma III) di  $i_\eta$  facente parte, quindi, di  $FI_0$ ; dico che è  $Q \equiv (\bar{x}, \eta)$ . Infatti se  $Q$  si trovasse a destra del segmento  $\bar{U}\bar{V}$ ,  $\bar{V}$  risultando interno al rettangolo  $(A, Q)$  sarebbe interno ad  $I_0$ , mentre si è visto che  $V$  fa parte di  $FI_0$ ; se  $Q$  stesse a sinistra del segmento  $\bar{U}\bar{V}$  esso sarebbe interno al rettangolo  $(A, \bar{U})$  e

quindi interno ad  $I_0$ , mentre appartiene ad  $FI_0$ . Dunque se la grafica della  $y = y(x)$  ha delle discontinuità, della  $FI_0$  fanno parte, oltre i punti della grafica stessa, anche i punti dei segmenti  $\overline{UV}$  ed è chiaro che non vi sono altri punti di  $FI_0$  oltre quelli ora detti.

Aggiungendo  $U$  e  $V$  alla  $FI_0$  si ottiene appunto una curva  $\mathcal{D}$  dell'insieme  $\Delta$  e l'asserto è provato.

4. - Siano infine  $p$  ed  $f$  due funzioni definite in  $R$ , ivi integrabili- $L$ ; detto  $\bar{p}$  un numero non inferiore al limite superiore  $p''$  della  $p$  in  $R$  si ponga

$$J = \frac{1}{\bar{p}} \int_R p f d(x, y).$$

Seguendo un procedimento sviluppato da HOBSON <sup>(12)</sup> si può dimostrare che vale la seguente disuguaglianza

$$(B) \quad \lambda' \leq J \leq \lambda''$$

dove  $\lambda', \lambda''$  indicano il limite inferiore a quello superiore dei numeri

$$\int_I f d(x, y)$$

al variare di  $I$  nella famiglia degli insiemi di  $R$  definiti da

$$I: \quad p(x, y) > \mu, \quad \mu \leq p''$$

Allora se  $p$  è una funzione non crescente rispetto a ciascuna variabile ogni  $I$  è uno degli  $I = I(\mu)$  del lemma IV; ne segue, ricordando il significato di  $\delta', \delta''$  (n. 2) che  $\delta' \leq \lambda', \lambda'' \leq \delta''$  e quindi, per la (B)

$$\delta' \leq J \leq \delta''$$

e da questa, in virtù del lemma II resta provato il nostro teorema.

<sup>(12)</sup> E. W. HOBSON, loc. cit. in. (4), p. 623-624.