Rendiconti
del
Seminario Matematico
della
Università di Padova

Giorgio Trevisan

Una osservazione sul problema dei quattro colori

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 19 (1950), p. 103-107

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1950__19__103_0>

UNA OSSERVAZIONE SUL PROBLEMA DEI QUATTRO COLORI

Nota (*) *di* GIORGIO TREVISAN (*a Padova*)

In questa Nota si fa vedere come il problema di colorare con quattro colori un reticolo piano si riconduca a trovare due soluzioni, tra loro in opportuna relazione, di un particolare sistema di congruenze lineari (mod. 2) (1).

1. - Sia dato sul piano euclideo un numero finito $n \geq 3$ di punti P_i e di archi semplici di JORDAN γ_j per modo che:

a) gli estremi di ogni γ_j siano punti P_i,
b) ogni punto P_i sia estremo di almeno due archi γ_j,
c) due archi γ_j abbiano in comune al più un estremo,
d) l'insieme degli archi γ_j sia connesso.

La figura così definita e tutte quelle ad essa omeomorfe, si considerano come modelli di uno stesso ente che si chiama reticolo piano (2).

(*) Pervenuta in Redazione il 24 Ottobre 1949.

(1) È noto che HEAWOOD ha ricondotto il problema dei quattro colori alla ricerca di una soluzione, verificante particolari condizioni, di un sistema di congruenze lineari (mod 3).

Si può trovare questo risultato ad esempio in ERRERA A.: *Exposé historique du problème des quatre couleurs*, [Periodico di matematiche, Serie IV, Vol. VII, 1927, Bologna, pagg. 20-41].

Per lo studio del problema dei quattro colori a mezzo di una congruenza, non lineare (mod 5), si può vedere DE BACKER S. M., *Contribution au problème des quatre couleurs. Emploi des congruences module 5*, [Académie royale de Belgique, 5 Serie, Tomo XXXII, 1946, pagg. 441-453].

(2) La definizione di modello di reticolo piano, completo qui data, è equivalente a quella di reticolo piano, connesso, completo, privo di singolarità, che si trova in SAINTE-LAGUË A., *Les réseaux* (*ou graphes*), [Mémorial des sciences mathématiques, Gauthier - Villars, 1926, Paris].

Nel seguito, come è consueto, si chiamerà senz'altro reticolo piano ogni suo modello, i punti P_i ne sono i *vertici*, gli archi γ_j i *lati.*

Un reticolo piano R si dice completo, se non esiste un altro reticolo piano R', diverso da R, che abbia gli stessi vertici di R e che contenga tutti i lati di R.

Ne segue che R individua sul piano degli insiemi limitati, che non contengono nel loro interno altri punti di R; tali insiemi si chiameranno le *facce* di R.

R individua inoltre sul piano un insieme illimitato, l'esterno di R, di cui sono punti di accumulazione i tre lati del *contorno* di R.

Si ha che ogni lato di R, esclusi i tre del suo contorno, appartiene a due facce e due soltanto di R.

Se R è un reticolo piano completo di n vertici esso possiede $l = 3n - 6$ lati ed $f = 2n - 5$ facce.

Infatti contando i tre lati di ognuna delle f facce si vengono a contare due volte ciascuno degli l lati di R, eccettuati i tre lati del contorno, che vengono invece contati una volta sola; si ha quindi la relazione:

$$3f = 2l - 3 ,$$

ma il teorema di Eulero - Poincaré per la superficie di genere zero orientabili dà, tenuto conto che si deve considerare come una faccia anche l'esterno di R,

$$l = n + (f + 1) - 2 = n + f - 1$$

e le due relazioni così stabilite permettono di ricavare i valori sopra detti per f ed l in funzione di n.

Dato ora un reticolo piano R, completo, si associ ad ognuno dei suoi lati una variabile, definita nel campo dei numeri interi relativi, e se ai tre lati di una faccia restano associate le variabili x_u, x_v, x_w ($u, v, w = 1, 2, \ldots 3u - 6$; $u \neq v$, $v \neq w$, $u \neq w$) si consideri la congruenza:

$$(1) \qquad x_u + x_v + x_w \equiv 1 \pmod 2$$

operando in tal modo per ogni faccia si ottiene un sistema S di $2n - 5$ congruenze lineari in $3n - 6$ incognite.

S si chiamerà sistema associato al reticolo R.

2. - Il problema dei quattro colori consiste nel dimostrare la proporzione seguente:

I) *I vertici di ogni reticolo piano R, completo, si possono distribuire in quattro classi, per modo che vertici di uno stesso lato di R, non appartengano alla stessa classe.*

Come è noto questa proposizione è equivalente [3] alla:

II) *I lati di ogni reticolo piano R, completo, si possono distribuire in tre classi, per modo che, lati di una stessa faccia R non appartengano alla stessa classe.*

Si dimostra ora la nuova proposizione:

III) *Condizione necessaria e sufficiente perchè per un reticolo piano R, completo, sia verificata la proposizione* II) *è che il sistema di congruenze S associato ad R ammetta due soluzioni x'_i, x''_i $(i = 1, 2, \ldots 3n - 6)$ verificanti le:*

$$(2) \qquad x'_i \cdot x''_i \equiv 0 \pmod{2} \quad (i = 1, 2, \ldots 3n - 6).$$

Si supponga vera la II) e siano α', β', γ' le tre classi in cui restano distribuiti i lati di R.

A tutte le x_i associate a lati di R che appartengono ad α' si attribuisca il valore $x'_i = 1$ ed a tutte le altre x_i si attribuisca il valore $x'_i = 0$.

Poichè uno ed un solo lato di ogni faccia appartiene alla classe α', la congruenza di S relativa a tale faccia è certamente verificata per i valori x'_i sopra stabiliti per le x_i.

Per le stesse ragioni si ottiene un'altra soluzione di S dando

(3) Si può trovare dimostrato questo risultato di Tait ad esempio nel lavoro citato in (1).

ad ogni x_i, associata ai lati di R appartenenti a β', il valore $x_i'' = 1$ ed a tutti gli altri x_i il valore $x_i'' = 0$.

Le due soluzioni x_i' ed x_i'' di S così ottenute verificano le (2), in quanto che, se x_i' non è nullo, x_i è variabile associata ad un lato di α', quindi $x_i'' = 0$.

Viceversa, se x_i' ed x_i'' sono due soluzioni di S verificanti la (2) si ponga il lato cui è associata x_i in α' o β' o γ' a seconda che si ha rispettivamente $x_i' \equiv 1$, $x_i'' \equiv 0$ o $x_i' = 0$, $x_i'' \equiv 1$ o $x_i' \equiv 0$, $x_i'' \equiv 0$. (mod 2)

I lati di ogni faccia di R vengono così a distribuirsi in una classe diversa, perchè se la (1) è la congruenza relativa a tale faccia segue che x_u', x_v', x_w' non possono essere tre numeri pari nè due numeri dispari ed uno pari; ma non possono neppure essere tre numeri dispari in quanto, anche uno dei tre numeri x_u'', x_v'', x_w'' per la (1) deve essere dispari e se lo fosse ad esempio x_u'' si avrebbe contro la (2)

$$x_u' \cdot x_u'' \equiv 1 \quad (\mathrm{mod}\ 2) .$$

Perciò dei numeri x_u', x_v', x_w' uno è dispari e gli altri due pari e così accade per i numeri x_u'', x_v'', x_w''.

Se per fissare le idee è dispari x_u' il lato relativo ad x_u viene posto in α' in quanto $x_u'' \equiv 0$ (mod 2) per (2); se è poi $x_v'' \equiv 1$ (mod 2) allora il lato relativo a x_v viene posto in β' e quello relativo a x_w in γ', se invece è $x_v'' \equiv 0$ (mod 2) il lato di x_v va in γ' e quello di x_w in β'. Così la proposizione III) resta dimostrata.

3. - Si noti che anche i tre lati del contorno di R vengono a distribuirsi ognuno in una classe diversa; infatti dette x_h, x_k, x_r le variabili ad essi relative, se x_i' è una soluzione di S, sommando membro a membro tutte le $2n - 5$ eguaglianze che si ricavano da S ponendo al posto delle x_i i valori x_i', tenuto conto che ogni variabile, eccettuate x_h, x_k, x_r che compaiono ciascuna in una sola equazione, compare in due e solo due equazioni si ricava

$$x'_h + x'_k + x'_r \equiv 2n - 5 \equiv 1 \qquad (\text{mod } 2)\,.$$

Analogamente per una soluzione x''_i, legata alla x'_i dalla (2)

$$x''_h + x''_k + x''_r \equiv 1 \qquad (\text{mod } 2)$$

e $x'_k \cdot x''_h \equiv x'_k{}''_k \equiv x'_r x''_r \equiv 0$ (mod 2), relazioni che per il ragionamento svolto nel n. 2 dimostrano l'asserto.