Rendiconti
del
Seminario Matematico
della
Università di Padova

Mario Dolcher

Due teoremi sull' esistenza di punti uniti nelle trasformazioni piane continue

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 17 (1948), p. 97-101
<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1948__17__97_0>

DUE TEOREMI SULL'ESISTENZA DI PUNTI UNITI NELLE TRASFORMAZIONI PIANE CONTINUE

Nota (*) *di* MARIO DOLCHER (*a Trieste*).

Dimostro in questa Nota due teoremi sull'esistenza di punti uniti nelle trasformazioni continue di una regione piana semplice in un insieme dello stesso piano; e precisamente, nell'ipotesi che la trasformazione porti il contorno all'esterno della regione data (teor. I) o soltanto non all'interno (teor. II), sempreché l'imagine del contorno circuiti effettivamente la regione stessa.

Osservo infine, provandolo con un esempio, che i casi da me trattati non rientrano in una particolare classe di trasformazioni precedentemente considerata, in analogia con alcune trasformazioni funzionali, da SCORZA DRAGONI [1] che dà per essa un altro teorema d'esistenza di punti uniti.

Le proposizioni contenute in questa Nota sono tutte estendibili, con sole modifiche di espressione, al caso di uno spazio euclideo qualunque.

1. - Notazioni e premesse. - Detto I un insieme, indicherò con $\bar{I}$ la sua chiusura, con I^* la sua frontiera. Se C^* è una curva semplice chiusa, C sarà l'insieme dei punti separati dall'infinito per mezzo di C^*; si ha $\bar{C} = C + C^*$.

(*) Pervenuto in Redazione il 2 Dicembre 1947.

(1) G. SCORZA DRAGONI, « *Un teorema d'esistenza per gli elementi uniti di una trasformazione funzionale* » [Rendiconti del Seminario mat. di Padova, vol. XV (1946), pagg. 25-32].

Detta Φ una trasformazione, $\Phi(I)$ indica il trasformato dell'insieme I, $\Phi(C^*)$ la trasformata della curva C^*, pensata *come curva.*

Indico con $\|C_1^*, C_2^*\|$ la distanza, nel senso di FRÉCHET, delle due curve chiuse C_1^* e C_2^*, e precisamente: per ogni rappresentazione parametrica simultanea delle due curve esisterà una coppia di punti corrispondenti di massima distanza; si dirà distanza delle due curve l'estremo inferiore di queste massime distanze, relativo all'insieme di tutte le possibili rappresentazioni parametriche simultanee delle due curve.

Sia C^* una curva chiusa, e sia P_0 un punto del suo piano; indico con $O(P_0, C^*)$ l'indice topologico della C^* rispetto a P_0 (2).

Ricordo alcune ben note proposizioni al riguardo:

a) Se il punto P_0 non appartiene alla curva C^*, se si ha $O(P_0, C^*) = n \neq 0$, esiste un intorno Γ di P_0 in ogni punto P del quale è ancora $O(P, C^*) = n$; inoltre è possibile deformare con continuità la curva C^* in una circonferenza (semplice o multipla) arbitraria intorno a P_0 senza attraversare Γ.

b) Siano C_1^* e C_2^* due curve chiuse, e sia P un punto alla distanza ρ_1 da C_1^*; se è $\|C_1^*, C_2^*\| < \rho_1$, si ha $O(P, C_1^*) = O(P, C_2^*)$ (3).

c) Sia Φ una trasformazione della regione semplice $\overline{C}$, limitata dalla curva semplice chiusa C^*, in un insieme dello stesso piano o di un altro piano. Se P' è un punto del secondo piano non appartenente a $\Phi(C^*)$ e tale che si abbia $O(P', \Phi(C^*)) \neq 0$, esiste almeno un punto P portato dalla Φ in P' (4).

2. - Teoremi sull'esistenza di punti uniti. - Negli enunciati che seguono, sia sempre Φ una trasformazione continua fra il piano e se stesso, definita in tutti i punti di una regione $\overline{C}$,

(2) Per una definizione relativa al caso piano vedi per es. KERÉKJÀRTÓ, *Topologie* I [Springer, Berlino (1923)] p. 83; più in generale in: ALEXANDROFF-HOPF, *Topologie* I [Springer, Berlino (1935)] p. 458.

(3) KERÉKJÀRTÓ, op. cit., p. 84.

(4) ALEXANDROFF-HOPF, op. cit., p. 467.

limitata da una curva semplice e chiusa C^* che, per comodità di espressione, potremo evidentemente considerare una circonferenza.

Detto $P' = \Phi(P)$, potremmo anche sostituire alla considerazione della Φ quella del campo vettoriale associato $\boldsymbol{v}(P) = P' - P$; l'esistenza di un punto unito per la Φ equivale all'annullarsi del vettore nel punto corrispondente.

Teorema I. - *Se la curva $\Phi(C^*)$ è tutta esterna al cerchio $\overline{C}$, e se per i punti P del cerchio si ha $O(P, \Phi(C^*)) \mathrel{\dot{\div}} 0$,* la *$\Phi$ ammette almeno un punto unito.*

Dim. - Sia dunque C^* una circonferenza, di centro A e raggio ρ. Si consideri la trasformazione continua Φ_1 definita, ancora su $\overline{C}$, da:

$$\Phi_1(P) = \Phi(P) + (A - P).$$

La curva $\Phi_1(C^*)$ potrà pensarsi riferita con la $\Phi(C^*)$ ad uno stesso parametro (per es. all'anomalia $0 \leq \theta \leq 2\pi$ sulla C^*) e si avrà, per il modo stesso come la Φ_1 è stata definita, $\| \Phi(C^*), \Phi_1(C^*) \| \leq \rho$. Dato che la distanza di A da $\Phi(C^*)$ supera ρ, le due curve avranno (prop. *b*) del n. 1) lo stesso indice topologico relativamente al centro del cerchio.

Sia dunque $O(A, \Phi_1(C^*)) \mathrel{\dot{\div}} 0$, ma allora esisterà (prop. *c*) del n. 1) almeno un punto Q tale che sia $\Phi_1(Q) = A$. Ed essendo $\Phi(P) = \Phi_1(P) + (P - A)$ ne viene $\Phi(Q) = \Phi_1(Q) + (Q - A) = Q$; è dunque Q un punto unito per la Φ.

Teorema II. - *Se la curva $\Phi(C^*)$ non ha alcun punto interno al cerchio (eventualmente punti sul contorno) e se, per i punti interni al cerchio, si ha $O(P, \Phi(C^*)) \mathrel{\dot{\div}} 0$, la Φ ammette almeno un punto unito.*

Dim. - Sia dunque ancora C^* una circonferenza, di centro A e raggio ρ; preso ad arbitrio un numero positivo $\delta < \frac{1}{2}\rho$, diciamo C_n^* $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ una circonferenza concentrica a C^*, di raggio $\rho_n = \rho + \frac{1}{n}\delta$.

Estendiamo ora la Φ al campo $\overline{C}_1$ definendola, nei punti della corona circolare, al modo seguente: ogni segmento PQ

radiale della corona circolare venga trasformato nel segmento radiale $P'Q'$ (se $P' = \Phi(P)$), di lunghezza doppia di PQ e senza punti a comune con AP' salvo l'estremo P'.

Così la trasformazione estesa porta tutti i punti di C_n^* ($n = 1, 2, 3, \ldots$) a una distanza almeno doppia di $\frac{1}{n}\delta$ dalla C^*; ne segue che la nuova curva risulta tutta esterna a $\overline{C}_n$. Inoltre, pensando riferite le curve ad uno stesso parametro (per es. l'anomalia sulla C^*), si ha senz'altro, per ogni n, $\| \Phi(C^*), \Phi(C_n^*) \| \leq 2\delta < \rho$, da cui segue, per ogni n, $O(A, \Phi(C_n^*)) \neq 0$.

Detta allora Φ_n la trasformazione estesa al campo $\overline{C}_n$, essa dunque: 1) è continua, 2) subordina la Φ già esistente sopra $\overline{C}$, 3) si trova nelle condizioni di applicabilità del teor. I, in quanto trasforma C_n^* in una curva tutta esterna a $\overline{C}_n$. Ogni Φ_n avrà pertanto almeno un punto unito; un tale punto sarà unito anche per la Φ se apparterà a $\overline{C}$.

Siano $I_1, I_2, \ldots I_n, \ldots$ gli insiemi dei punti uniti delle $\Phi_1, \Phi_2, \ldots \Phi_n, \ldots$; si tratta evidentemente di insiemi chiusi e, per quanto detto, non vuoti, contenuti rispettivamente nei cerchi della successione considerata. Ognuno contiene i successivi, dato che per ogni coppia di interi m, n le Φ_m e Φ_n coincidono nel campo comune di esistenza. Essi hanno dunque almeno un punto P_0 a comune. È chiaro che P_0 non potrà essere esterno al cerchio $\overline{C}$, chè se fosse $\overline{AP_0} > \rho + \frac{1}{m}\delta$, non potrebbe P_0 essere contenuto in I_n per $n \geq m$. Dunque, appartenendo P_0 a $\overline{C}$ e subordinando le Φ_n su C la trasformazione inizialmente data Φ, ne segue che la Φ stessa ammette il punto unito P_0.

3. - Un'osservazione. - Nel n. 3 della Nota citata in (1), Scorza Dragoni considera la trasformazione Φ^* dell'intero piano il cui vettore v^* è rappresentabile come differenza di due vettori, dei quali il primo porti il piano in una sua regione limitata, il secondo rappresenti una trasformazione biunivoca del piano in sè.

Osservo che non tutte le trasformazioni da me considerate rientrano fra queste; e precisamente, si potrebbe dimostrare che, delle trasformazioni dell'intero piano in sè, non rientrano certamente nella classe considerata da Scorza Dragoni quelle che alterano l'indice topologico di una successione di curve « tendenti all'infinito intorno a un punto P_0 », cioè tali che ogni punto del piano sia contenuto, da una certa in poi, entro le curve della successione.

Mi limiterò a considerare la trasformazione definita, in coordinate polari, da $\begin{cases} \rho^* = \rho \\ \theta^* = 2\theta \end{cases}$; detto v^* il vettore ad essa associato, diciamo che non è possibile rappresentarlo nella forma $\boldsymbol{v}^* = \boldsymbol{v}' - \boldsymbol{v}''$ con $\boldsymbol{v}'$ portante il piano in un insieme limitato U, e $\boldsymbol{v}''$ trasformante biunivocamente il piano. Si avrebbe in tal caso $\boldsymbol{v}'' + \boldsymbol{v}^* = \boldsymbol{v}'$; ora per i punti del semiasse positivo x $(\theta = 0)$, si ha $\boldsymbol{v}^*(P) = 0$ e quindi $\boldsymbol{v}'(P) = \boldsymbol{v}''(P)$; allora la trasformazione biunivoca $\boldsymbol{v}''$ porterebbe ogni punto della semiretta, insieme illimitato, in U, insieme limitato, il che è assurdo data la biunivocità della $\boldsymbol{v}''$.

Inoltre è facile provare che non rientrano nella classe considerata da Scorza Dragoni quelle trasformazioni continue dell'intero piano in sè per le quali esiste almeno una successione divergente $P_1, P_2, \dots P_n, \dots$ di punti, tale che la successione delle distanze $|P_1, \Phi(P_1)|, |P_2, \Phi(P_2)|, \dots |P_n, \Phi(P_n)|, \dots$ abbia limite finito o, più in generale, non diverga.