Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova

Santuzza Ghezzo

Sulla teoria delle traiettorie di una traslazione piana generalizzata

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 16 (1947), p. 73-85

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1947__16__73_0>

SULLA TEORIA DELLE TRAIETTORIE DI UNA TRASLAZIONE PIANA GENERALIZZATA

Nota (*) *di* SANTUZZA GHEZZO *(a Venezia).*

La teoria delle traiettorie di una *traslazione piana generalizzata t*, (cioè di un autoomeomorfismo del piano reale euclideo in se stesso, privo di punti uniti e conservante il senso delle rotazioni), secondo lo sviluppo datole dal BROUWER (1), che l'ha costruita, parte dal fatto che:

Le traiettorie di t non hanno punti doppi (2)

e culmina nel seguente *teorema fondamentale:*

Una curva c e la propria immagine, t(c), nella t si tagliano, se gli estremi di c sono estremi di un arco di traiettoria, il quale contenga nel proprio interno un arco di traslazione e formi con c una curva semplice e chiusa (3).

(*) Pervenuta in Redazione il 22 Novembre 1946.

(1) L. E. J. BROUWER, *Beweis des ebenen Translationssatzes* [« Mathematische Annalen », vol. 72 (1912), pagg. 37-54], § 1.

Per la terminologia si veda il n. 1 della Nota presente.

(2) L. E. J. BROUWER, loc. cit. in nota (1), pag. 38, teor. 1. Si vegga anche: B. v. KERÉKJÀRTÓ, *The plane translation theorem of Brouwer and the last geometric theorem of Poincaré* [« Acta Litterarum ac Scientiarum Regiae Universitatis Hungaricae Francisco-Josephinae », tomo IV (1928), pagg. 86-102], § 1, n. 2; E. SPERNER, *Ueber die Fixpunktfreien Abbildungen der Ebene* [« Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Hamburgischen Universität », Vol. 10 (1934), pagg. 1-47], § 2, teor. 4; G. SCORZA DRAGONI, *Criteri per l'esistenza dei punti uniti nelle trasformazioni topologiche del cerchio e loro applicazione* [in corso di stampa negli « Annali di matematica pura ed applicata »], § 5.

(3) L. E. J. BROUWER, loc. cit. in (1), pag. 44, teor. 6.

Orbene questo teorema è oggi suscettibile di dimostrazioni dirette dello stesso ordine di difficoltà di quelle che permettono di affermare che una traiettoria non ha punti doppi (4).

Epperò mi sono proposta di costruire la parte essenziale della teoria delle traiettorie di t sul fondamento dei due teoremi ricordati.

In questa Nota dimostro appunto che da essi si possono dedurre sistematicamente quasi tutte le altre proposizioni fondamentali indicate da Brouwer nel passo citato in (1).

Non mi occupo ora della possibilità o meno di dedurre analogamente il teor. 5 di quel passo, teorema che, peraltro, come mi è stato verbalmente comunicato da G. Scorza Dragoni, non è essenziale per lo studio di una traslazione piana generalizzata. Non mi occupo quindi neanche dei lemmi 2 – 6, che da Brouwer sono adoperati solo per dimostrare il teor. 5.

I ragionamenti di cui mi valgo in questa Nota sono in parte già conosciuti. Per facilitare la comprensione sono ripresi anche questi, in modo da porre in luce il carattere elementare di tutta la teoria.

Faccio osservare che di alcuni dei teoremi qui riesposti erano state già date dimostrazioni elementari anche da v. Kerékjártó (5), da Terasaka (6) e da Sperner (7).

(4) G. Scorza Dragoni, loc. cit. in (2), § 6; ved. anche v. Kerékjártó, loc. cit. in (2), pag. 92, teor. II'.

(5) B. v. Kerékjártó, loc. cit. (2); e *Ueber die fixpunktfreien Abbildungen der Ebene* [« Acta Litterarum ac Scientiarum », tomo VI (1934), pagg. 226-234], pagg. 230-231.

(6) H. Terasaka, *Ein Beweis des Brouwerschen ebenen Translationssatzes:* [« Japanese Journal of Mathematics », Tokyo, vol. VII, (1930), pagg. 61 - 69].

(7) E. Sperner, loc. cit. in (2).

§ 1.

1. - Sia t una *traslazione piana generalizzata.*

Se A e $t(A)$ sono due punti corrispondenti nella t, una curva semplice e aperta λ, di estremi A e $t(A)$, la quale non contenga nell'interno il corrispondente di nessuno dei suoi punti interni, è un *arco di traslazione;* e traiettoria è la curva $\sigma = \sum_{n}{}_{-\infty}^{\infty} t^{n}(\lambda)$, generata cioè mediante applicazione a λ di t e delle sue potenze.

Come già abbiamo ricordato, una traiettoria σ non può avere punti doppi. Due punti qualunque R e S di σ determinano dunque su di essa una curva semplice e aperta.

Questa, in quanto tale, si può sempre pensare come sottoarco in una curva semplice e chiusa; mentre ogni curva siffatta si può mutare in una circonferenza mediante una trasformazione biunivoca e bicontinua del piano in se stesso ([8]).

Di guisa che esiste sempre un autoomeomorfismo del piano che muta una curva semplice e aperta prefissata in un arco di cerchio e quindi in un segmento.

Inoltre, se P è un punto di σ, l'arco di σ individuato dai punti P e $t(P)$ è un arco di traslazione che indicheremo con $\lambda(P;\sigma)$; posto $P^{-1} = t^{-1}(P)$, riesce $\lambda(P;\sigma) = t(\lambda(P^{-1};\sigma))$.

Risulta allora facilmente che:

Se α è un sottoarco di σ e Q un punto interno ad α (cioè un punto di α diverso dagli estremi di α), *esiste un intorno K di Q, delimitato da una curva semplice e chiusa k, la quale incontra α soltanto in due punti, interni ad α e separati su α da Q.*

Basta trasformare, mediante un autoomeomorfismo π del piano, l'arco α in un segmento α_1, che conterrà il corrispondente $Q_1 = \pi(Q)$ di Q nel suo interno.

Un intorno circolare H di Q_1, sufficientemente piccolo, incontra α_1 in un segmento $A_1 B_1$, interno ad α_1, ed è mutato da π^{-1} in

([8]) B. v. Kerékjártó, *Vorlesungen über Topologie* [Springer - Berlino (1923)], Cap. II, § 1, teor. IX, e § 2, pag. 69 e segg.

un intorno $K = \pi^{-1}(H)$ di Q, il contorno k del quale avrà in comune con α solo i punti $A = \pi^{-1}(A_1)$ e $B = \pi^{-1}(B_1)$.

Se il raggio di H tende a zero, tende a zero anche il diametro di K (cioè il massimo della distanza di due punti di K), epperò, attesa la $Q \neq t(Q)$, *è lecito supporre K e $t(K)$ privi di punti comuni.*

2. – Ciò posto, ricordiamo di nuovo che per le traiettorie vale il *teorema fondamentale*, già detto nella prefazione, e che si può anche, più generalmente, enunciare nella forma [9]:

La curva c taglia $t(c)$, se esistono un arco di traslazione λ e tre numeri relativi p, q, r, tali che sia

$$p < q < r\ ,\quad t^p(\lambda)\cdot c \neq 0\ ,\quad t^r(\lambda)\cdot c \neq 0\ ,\quad t^q(\lambda)\cdot c = 0\ .$$

3. – Dimostriamo ora che:

Una traiettoria σ non può mai avvicinarsi indefinitamente, in qualunque verso sia percorsa, ad un punto per cui sia già passata una volta,
teorema posto in rilievo da Brouwer [10] come gli altri che seguono.

Dimostriamo precisamente che:

Se P è un punto di σ, ed s un sottoarco (finito) di σ che contenga P nell'interno, P ha da $\sigma - s$ una distanza positiva.

Infatti, fissato il punto P di σ ed un arco s di σ il quale lo contenga nell'interno, si consideri (n. 1) un intorno K di P, il quale K non abbia punti comuni con la sua immagine mentre il suo contorno k incontri $\lambda(P^{-1};\sigma)\cdot s$ in un solo punto A (interno a $\lambda(P^{-1};\sigma)$) e $\lambda(P;\sigma)\cdot s$ in un solo punto B (interno a $\lambda(P;\sigma)$).

(9) Cfr. G. Scorza Dragoni, *Estensione alle quasi-traiettorie di un teorema di Brouwer sulle traiettorie di un autoomeomorfismo del piano.* [« Accademia Nazionale dei Lincei », Rendiconti della classe di scienze fisiche, matematiche e naturali, serie VIII, vol. I, (1946), pagg. 156 - 161] prefazione e anche num. 9.

(10) Brouwer, loc. cit. in (1), pag. 39 teor. 2.

Dico che $\sigma \cdot K$ si riduce all'arco l di σ di estremi A e B. Infatti, in caso contrario, sia Q un punto di $K \cdot \sigma$ esterno all'arco l e quindi a $\lambda(P^{-1}; \sigma) \dot{+} \lambda(P; \sigma)$.

Dei due insiemi determinati entro K da l, uno contiene Q come punto interno. Sia questo Γ.

Il contorno di Γ è una curva semplice e chiusa, a cui appartiene il punto P. È dunque possibile congiungere Q con P mediante una curva semplice e aperta c tutta interna (a meno dell'estremo P) al campo Γ (11).

Sia c_0 la parte di σ di estremi P e Q; dunque o $t(P)$ o $t^{-1}(P)$ è interno a c_0.

Supponiamo per es. che sia soddisfatta la prima alternativa. Se R è un punto interno a c_0 e abbastanza prossimo a P, $\lambda(R; \sigma)$ non ha punti comuni con c, atteso il fatto che c ha soltanto l'estremo P su $\lambda(P; \sigma)$. Invece c ha un estremo sull'immagine di $\lambda(R; \sigma)$ in una conveniente potenza di t ad esponente negativo, mentre ha l'altro estremo sull'immagine di $\lambda(R; \sigma)$ in una conveniente potenza di t ad esponente positivo. Allora $\lambda(R; \sigma)$ e c sono nelle condizioni di applicabilità del teorema fondamentale (n. 2), quindi c taglia $t(c)$; ma questo è assurdo, perchè $K \cdot t(K) = 0$ mentre $K \cdot c = c$; donde la conclusione. In maniera analoga si procede se $t^{-1}(P)$ è interno a c_0.

Nel ragionamento svolto è implicito che:

Se un insieme quale K, delimitato da una curva di Jordan e privo di punti comuni con la propria immagine, contiene un punto P interno ad un arco di traslazione λ, e non contiene nessun punto interno a $t(\lambda)$, K non può contenere nessun punto di $t^n(\lambda)$, qualunque sia $n \geq 2$;

e più generalmente che:

Se un insieme quale K, contiene un punto di $t^n(\lambda)$ e un altro di $t^m(\lambda)$, $m \geq n$, contiene punti di $t^{n+1}(\lambda), \ldots, t^{m-1}(\lambda)$.

(11) v. Kerékjártó, loc. cit. in (3), pag. 65, § 1, teor. IV.

4. - Ricordiamo che:

Per ogni punto Q del piano si può far passare un arco di traslazione [12].

Infatti da $Q \neq t(Q)$ segue che un intorno circolare di Q non incontra la propria immagine, se è di raggio abbastanza piccolo, la incontra se contiene $t(Q)$. Per continuità, esiste un intorno circolare H di Q tale che $H \cdot t(H)$ sia non nulla e non contenga punti interni ad $H \dotplus t(H)$.

Sia A uno dei punti dell'intersezione $H \cdot t(H)$. Allora $t^{-1}(A)$ apparterrà anch'esso al contorno di H.

La spezzata $\mu = A^{-1} Q A$ è (a norma della definizione data nel n. 1) un arco di traslazione di tipo voluto.

Di qui e dalla semplicità di una traiettoria segue, come è è noto, che $Q \neq t^n(Q)$ se $n \neq 0$.

5. - Ciò premesso dimostriamo che:

Se P è un punto del piano, la successione P, $t(P)$, $t^{-1}(P)$,.... diverge [13].

Infatti sia Q un (eventuale) punto di accumulazione al finito per le immagini di P, e K un intorno circolare di Q tale che $K \cdot t(K)$ sia diversa da zero e non contenga punti interni a $K \dotplus t(K)$ (cfr. n. 4).

In K cadrà almeno un punto $t^n(P)$. Sia A un punto di $K \cdot t(K)$. Una spezzata semplice di estremi $t^{-1}(A)$ ed A, che passi per $t^n(P)$ e Q è un arco di traslazione della t, esso genera una traiettoria contenente Q e P (e quindi anche $t(P)$, $t^{-1}(P)$, $t^2(P)$, $t^{-2}(P), \ldots$) ed avvicinantesi indefinitamente a Q, (perchè Q è di accumulazione per l'insieme $\sum_r^{+\infty} {}_{-\infty} t^r(P)$), anche dopo essere passata per esso, il che è escluso dal teorema n. 3. (Il ragionamento è di BROUWER; un'altra dimostrazione è data da v. KERÉKJÀRTÓ nel secondo dei passi citati in (2)).

(12) BROUWER, loc. cit. in (1), pag. 45, teor. 7; E. SPERNER, loc. cit. in (2), § 2, teor. 3, pag. 8. La dimostrazione che riproduciamo nel testo è di TERASAKA, loc. cit. (6) pag. 62.

(13) BROUWER, loc. cit. in (1) pag. 45, teor. 8; E. SPERNER, loc. cit. in (2). § 2, teor. 9, pag. 14.

Segue che:

Se λ è un arco di traslazione, ciascuna delle due semilinee

$$\sigma_i(\lambda) = \ldots \dot{+}\, t^{-2}(\lambda) \,\dot{+}\, t^{-1}(\lambda)$$

e

$$\sigma_f(\lambda) = t(\lambda) \,\dot{+}\, t^2(\lambda) \,\dot{+} \ldots$$

non può mantenersi al finito (14).

6. – Da quanto sopra risulta facilmente che:

Se c è una curva semplice e aperta del piano, quando $c \cdot t(c) = 0$, è anche $c \cdot t^n(c) = 0$ (qualunque sia $n \neq 0$) (15).

Infatti siano A e B gli estremi della curva semplice e aperta c di cui nell'enunciato. E sia Ω un autoomeomorfismo del piano che muti c nel segmento $c^* = A^* B^*$, portando A in A^* e B in B^*. Sia ora $\gamma(\rho)$ un rettangolo che contenga c^* nell'interno e tale che le distanze dei suoi punti da c^* abbiano come massimo ρ. Inoltre c^* passi per il centro di $\gamma(\rho)$ e sia parallelo a due lati opposti di $\gamma(\rho)$; di guisa che $\gamma(\rho)$ invade il piano se $\rho \to +\infty$. Si supponga inoltre che $\gamma(\rho)$ sia una funzione monotona crescente di ρ (16).

Denoti $J(\rho)$ l'immagine di $\gamma(\rho)$ in Ω^{-1}, allora $J(\rho)$ è un intorno di c. Se ρ è abbastanza piccolo, riesce $J(\rho) \cdot t(J(\rho)) = 0$ mentre $J(\rho)$ invade il piano se $\rho \to +\infty$. Col ragionamento del n. 4 (17) si vede che esiste un numero $\rho_1 > 0$ tale che $J(\rho_1) \cdot t(J(\rho_1))$ sia diversa da zero e contenga soltanto punti delle frontiere di $J(\rho_1)$ e $t(J(\rho_1))$. E sia G uno di questi punti; allora $D = t^{-1}(G)$ appartiene anch'esso al contorno di $J(\rho_1)$.

Siano G^* e D^* le rispettive immagini di G e D in Ω. Allora G^* e D^* sono due punti del contorno di $\gamma(\rho_1)$; ed è evidente

(14) Brouwer, loc. cit. in (1), teor. 3; E. Sperner, loc. cit. in (2), § 2, teor. 10.

(15) Il procedimento seguito nel testo è di Terasaka.

(16) Cfr., per questa espressione, il cui significato è peraltro intuitivo, G. Scorza Dragoni: *Intorno ad alcuni teoremi sulle traslazioni piane* [« Memorie dell'Accademia d'Italia ». Memorie della classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali, vol. IV (1933), pagg. 159-212], § 1. n. 2, pagg. 162-163.

(17) Cfr. del resto G. Scorza Dragoni, loc. cit. in (15), § 7, n. 23.

che esiste una spezzata l^* di estremi G^* e D^*, i cui punti interni siano tutti interni a $\gamma(\rho_1)$ e che contenga c^* [18]. Se l è l'immagine di l^* in Ω^{-1}, gli estremi di l sono $D = t^{-1}(G)$ e G, l'interno di l è interno ad $J(\rho_1)$, l contiene nell'interno c. È in definitiva l è, a norma della def. del n. 1, un arco di traslazione che genera una traiettoria a cui appartengono tutte le $t^n(c)$.

Ne segue in particolare l'asserto di partenza.

Inoltre:

Sia C un insieme chiuso e limitato, delimitato da una curva semplice e chiusa. Se $C \cdot t(C) = 0$, è anche, per qualunque $n \neq 0$, $C \cdot t^n(C) = 0$ [19].

Infatti, se C contenesse l'immagine $t^n(P)$ $(n \neq 0)$ di un suo punto P, una qualunque curva c, semplice e aperta di estremi P e $t^n(P)$, tutta interna a C, a meno eventualmente degli estremi, contraddirebbe il teorema precedente. E ancora:

Se $C \cdot t(C)$ è costituita al più da punti di contorno di C, l'affermazione $C \cdot t^n(C) = 0$ vale per $|n| \geq 2$.

Infatti, in base all'osservazione finale del n. 4, $t^r(P) \neq t^s(P)$ per ogni $r \neq s$. Dunque, nella nostra ipotesi, se C contenesse l'immagine $t^n(P)$ $(|n| \geq 2)$ di un suo punto P, congiungendo P con $t^n(P)$ mediante una curva semplice e aperta c, tutta interna a C, a meno eventualmente degli estremi, risulterebbe anche qua $c \cdot t(c) = 0$. Donde, con ragionamento analogo al precedente, la conclusione voluta.

7. - Previa una leggera modificazione del ragionamento seguito per dimostrare il primo teor. del n. 6 si riconosce che:

Se c è una curva semplice e aperta di estremi M ed N interni ad una curva semplice e aperta d, e se ρ è un numero positivo, esiste un insieme chiuso e limitato $J(\rho)$, delimitato da una curva semplice e chiusa $j(\rho)$, tale che gli estremi di c appartengano a $j(\rho)$, che l'interno di c sia interno a $J(\rho)$, che ogni punto di $d - c$ sia esterno a

(18) v. Kerékjártó, loc. cit. in (8), § 2, pagg. 69 e segg.

(19) H. Terasaka, loc. cit. in (6); E. Sperner, loc. cit. in (2), § 2, teor. 6. – Sperner deduce da questo teorema il precedente.

$J(\rho)$ e infine che ogni punto di $J(\rho)$ abbia da c una distanza non superiore a ρ.

Supponiamo ora che d appartenga ad una traiettoria σ, allora c non è di accumulazione per $\sigma - d$ (e ciò segue dal teorema del n. 3 in uno con quello di PINCHERLE–BOREL); quindi nelle ipotesi attuali alla tesi dell'enunciato precedente si può anche aggiungere la condizione che $J(\rho)$ non contenga nessun punto di $\sigma - c$.

§ 2.

8. - Indichiamo con $I_i\,[I_f]$ l'insieme degli eventuali punti di accumulazione (al finito) della semitraiettoria $\sigma^i = \ldots t^{-2}(\lambda) \dotplus t^{-1}(\lambda)$ $[\sigma_f = \lambda \dotplus t(\lambda) \dotplus \ldots]$ che non appartengano ad essa. Risulta $I_i \cdot \sigma = I_f \cdot \sigma = 0$.

L'insieme $I_i \cdot I_f$ è vuoto [20].

Infatti, supposto che esista un punto A di $I_i \cdot I_f$, consideriamo un intorno H di A privo di punti comuni con la propria immagine e con l'arco di traslazione λ. Allora per il penultimo enunciato del n. 3, se $H \cdot \sigma_i \neq 0$, deve essere $H \cdot \sigma_f = 0$, e viceversa. Ora ciò mostra che l'ipotesi $I_i \cdot I_f \neq 0$ è impossibile.

Le proprietà di I_i che seguono si trasportano subito ad I_f, se si osserva che questi ha il ruolo di I_i nella traslazione piana generalizzata t^{-1}.

Dimostriamo intanto che :

1°) *Se I_i non è vuoto, non è nemmeno limitato* [21].

Supponiamo che I_i non sia vuoto e sia limitato.

Sia C un cerchio che contenga I_i, cioè tutti i punti di accumulazione della semitraiettoria σ_i che non appartengono ad essa. Sia Q uno di questi.

Come afferma il teorema del n. 5 la successione Q, $t^{-1}(Q)$, $t^{-2}(Q), \ldots$ non è limitata; esiste allora un punto $t^{-r}(Q)$ di quella successione esterno a C.

Per la continuità di t^{-r}, prefissato un intorno K di $t^{-r}(Q)$,

([20]) BROUWER, loc. cit. in ([1]), pag. 43, teor. 4.
([21]) BROUWER, loc. cit. in ([1]), pag. 40, teor. 3.

è possibile trovare un intorno H di Q il cui trasformato mediante t^{-r} sia tutto contenuto in K. Ora, poichè in H cadono punti di σ_i, anche in K cadono punti di σ_i. Ma $t^{-r}(Q)$ non appartiene a σ al pari di Q. Dunque $t^{-r}(Q)$ appartiene a I_i; il che è assurdo.

Lo stesso scopo si può anche raggiungere osservando che, nelle ipotesi poste, detti C_1 e C_2 due cerchi distinti concentrici a C, che contengano C nel loro interno, l'intersezione di σ_i con la corona circolare J, individuata da C_1 e C_2, contiene certamente infiniti archi disgiunti $s_1, s_2, \ldots$ aventi ciascuno un estremo su C_1 ed uno su C_2 (e ciò perchè C racchiude I_i, mentre σ_i non è limitata). Una successione di punti $Q_1, Q_2, \ldots$ scelti rispettivamente interni ad $s_1, s_2, \ldots$ (e quindi distinti a due a due), ammette un punto di accumulazione P contenuto in J e quindi esterno a C e non appartenente a σ_i (in base al primo teorema del n. 3), donde la conclusione.

2°) *I_i è un insieme chiuso* [22].

Escluso il caso che I_i sia vuoto, un eventuale punto di accumulazione per I_i è di accumulazione per σ_i e non può appartenere a σ_i (appunto perchè di accumulazione di I_i e per il primo teorema del n. 3).

3°) *I_i è un insieme perfetto, se non è vuoto.*

Infatti, sia A un suo punto e K un intorno circolare prefissato ad arbitrio di A. Se K_1 e K_2 sono due altri cerchietti distinti concentrici a K e contenuti in esso, con ragionamento analogo a quello fatto alla fine della 1°) di questo n. 8 si deduce che nella corona circolare determinata da K_1 e K_2, cade almeno un punto Q di accumulazione per σ_i, non contenuto in σ_i, cioè un punto di I_i; donde la conclusione.

Dimostriamo infine che:

4°) *Se I_i non è vuoto è un continuo, nel senso che non si può spezzare nella somma di due insiemi chiusi, entrambi non vuoti, privi di punti comuni, e di cui uno (almeno) limitato.*

[22] Questa affermazione è implicitamente fatta da Brouwer nella dimostrazione del teor. ricordato nella nota prec. Si tratta di proprietà evidenti. Lo stesso dicasi delle successive 3°) e 4°).

Infatti, supponiamo che I_i si spezzi nella somma di due insiemi chiusi, non vuoti, I'_i e I''_i, privi di punti comuni. È escluso dal teor. 1°) di questo n. 8 che I'_i e I''_i possano essere entrambi limitati, nel qual caso lo sarebbe anche la loro somma $I_i = I'_i + I''_i$.

Vogliamo escludere anche l'ipotesi che uno solo dei due insiemi, per es. I'_i, possa esser limitato.

Infatti se così fosse la distanza ρ di I'_i da I''_i sarebbe positiva. Consideriamo due insiemi K_1 e K_2 costituiti rispettivamente da tutti i punti che hanno da I'_i una distanza $< \frac{1}{3}\rho$ e $\leq \frac{2}{3}\rho$. Col ragionamento della fine del teor. 1°) di questo n. 8, ripetuto relativamente all'insieme $K_2 - K_1$, si raggiunge facilmente la conclusione.

9. – Ciò premesso, consideriamo l'insieme $I = I_i + I_l$; esso è chiuso, epperò divide il piano in uno o più campi (campo = insieme aperto e connesso). Ad uno solo Φ di questi può appartenere σ, non potendo σ incontrare I, e ciò in virtù del primo teorema del n. 3.

Proviamo che Φ è diviso da σ in due altri campi, per ciascuno dei quali σ è linea di frontiera (23).

Infatti sia l una curva semplice e aperta contenuta in Φ, che tagli σ (24) in un solo punto R interno ad l (cioè diverso dagli estremi P e Q di l). Se σ non dividesse Φ *in almeno due campi,* sarebbe possibile congiungere Q con P mediante una curva semplice e aperta c, tutta interna a Φ, priva di punti comuni con σ e quindi non passante per R. Spostiamoci su l a partire da R verso P e sia P' il primo punto di $l \cdot c$ che così si incontra. Spostiamoci su l a partire da R verso Q e sia Q' il primo punto di $l \cdot c$ che così si incontra, riesce $P' \neq R$, $Q' \neq R$ e quindi R è interno al sottoarco l' di l di estremi P' e Q', e l' e σ si tagliano in R. Allora l' e il sottoarco c' di c

(23) Brouwer, loc. cit. in (1), pag. 46, terzo capoverso.

(24) Cfr. G. Scorza Dragoni, loc. cit. in (16), § 1, n. 3, pag. 163.

di estremi P' e Q' costituiscono una curva semplice e chiusa che ha in comune con σ soltanto il punto R e che taglia σ in questo punto. Quindi una delle due semilinee individuate su σ da R sarebbe separata dall'infinito mediante $c' \dotplus l'$; e ciò è assurdo (n. 5).

Verifichiamo ora che σ *divide* Φ *in due soli campi*. Infatti manteniamo le notazioni precedenti e sia inoltre S un punto esterno a σ, interno a Φ (dunque non di I); perciò S ha da σ una distanza positiva. Congiungiamo S con un punto A di σ, distinto da R, mediante una curva semplice e aperta s contenuta in Φ. Spostiamoci poi su s a partire da S fino al primo punto B di accumulazione per σ (contenuto in s) e quindi, attesa la $s \cdot I = 0$, fino al primo punto di $s \cdot \sigma$; sia s' l'arco di s di estremi S e B.

Supponiamo $B \ddagger R$, e delle due semitraiettorie di origine R, sia σ_i quella che contiene B.

Fissato un arco α di σ, contenente B ed R nel suo interno, esiste un insieme (n. 7) $J(\rho)$ del tipo considerato nel n. 7 al quale siano interni, eccetto gli estremi, tutti i punti di α; e si può sempre supporre che sia $J(\rho) \cdot (\sigma - \alpha) = 0$.

L'arco α divide $J(\rho)$ in due insiemi $J_1(\rho)$ e $J_2(\rho)$ delimitati da due curve semplici e chiuse. La curva l contiene sia punti interni a $J_1(\rho)$ che punti interni a $J_2(\rho)$, perchè l ed α si tagliano nel punto R, interno ad α. Invece s' ha un estremo ed un estremo soltanto, B, su σ e quindi su α. Di qui è facile dedurre che se ρ è abbastanza piccolo una delle due intersezioni $J_1(\rho) \cdot s'$, $J_2(\rho) \cdot s'$ si riduce al punto B. Supponiamo che sia per es., tanto per fissare le idee, $J_2(\rho) \cdot s' = B$, allora i punti di s' vicini a B e diversi da B sono interni a $J_1(\rho)$.

Atteso che due punti interni a $J_1(\rho)$ si possono sempre congiungere mediante una curva che non incontra σ, ne segue ovviamente la possibilità di congiungere S con un punto $T \ddagger R$ di $l \cdot J_1(\rho)$ mediante una curva semplice e aperta tutta contenuta in Φ, senza attraversare σ. E quindi atteso che P e Q appartengono a due campi distinti di Φ, e T sta su l rispetto ad R dalla stessa parte di P o dalla stessa parte di Q, segue che ogni punto S di Φ è raggiungibile o da P o da Q mediante una curva semplice e aperta, contenuta in Φ e priva di punti comuni con σ.

Un ragionamento analogo vale se $R = B$.

Dunque σ divide Φ in due soli campi Σ_1 e Σ_2; detti i *campi adiacenti a* σ.

Dopo di che, attesa l'arbitrarietà di R su σ, resta altresì dimostrato che:

Se R è un punto di σ ed S un punto interno ad uno Σ dei due campi adiacenti a σ, esiste sempre una curva semplice e aperta di estremi R e S, i cui punti diversi da R siano tutti interni a Σ (25).

(25) Questo teor. è implicito in quello del Brouwer loc. cit. (1), pag. 44, teor. 5.

Per i ragionamenti svolti in questo num. cfr. anche v. Kerékjártó, loc. cit. (8), pag. 106.