

RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

GIUSEPPE ZWIRNER

Sull'equazione $y' = \lambda f(x, y)$

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 15 (1946), p. 33-39

[<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1946__15__33_0>](http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1946__15__33_0)

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1946, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*
<http://www.numdam.org/>

SULL' EQUAZIONE $y' = \lambda f(x, y)$

Nota di GIUSEPPE ZWIRNER (a Padova)

È stato dimostrato che il problema

$$\begin{aligned} \text{I)} \quad & y'(x) = \lambda f(x, y(x)), \\ & y(a) = \alpha, \quad y(b) = \beta, \end{aligned}$$

nelle incognite λ (numero reale) e $y(x)$ (funzione reale della variabile reale x), ammette una ed una sola soluzione $[\lambda_0, y_0(x)]$ se

1) $f(x, y)$ è continua, mai nulla e lipschitziana rispetto a y nel rettangolo

$$R: a \leq x \leq b, \quad c \leq y \leq d \quad (a < b, \quad c < d)$$

e se

2) risulta

$$|\alpha - \beta| \leq (d - c) m M^{-1}, \quad |\alpha - \beta| N (1 + M m^{-1}) (2 m)^{-1} < 1,$$

dove m , M ed N indicano rispettivamente il minimo, il massimo e la costante di LIPSCHITZ della funzione $|f(x, y)|$ in R ⁽¹⁾.

Mi sono allora proposto di far vedere come il problema considerato sia risolubile, anche quando si sopprimano le condizioni 2) e ci si metta per la funzione $f(x, y)$ nelle ipotesi dei classici teoremi di esistenza di CARATHÉODORY ⁽²⁾.

⁽¹⁾ K. ZAWISCHA: *Über die Differentialgleichung $y' = k f(x, y)$ deren Lösungskurve durch zwei gegebene Punkte hindurchgehen soll* [Monatsh. für Math. und Phys., 37 (1930), pp. 103-124]; vedi anche G. SANSONE: *Equazioni differenziali nel campo reale* [Zanichelli, Bologna (1941)], Parte II, cap. VIII, § 4.

⁽²⁾ C. CARATHÉODORY, *Vorlesungen über reelle Funktionen* [Teubner, Lipsia, 1^a ed. (1918)], §§ 576-582.

Nella presente Nota espongo i risultati a cui sono pervenuto. Nel numero 1 indico delle condizioni sufficienti perchè il problema I) ammetta almeno una soluzione $[\lambda_0, y_0(x)]$. Nel numero 2 indico un criterio perchè il problema I) sia risolubile per uno ed un sol valore λ_0 di λ . Naturalmente, se sono soddisfatte le ipotesi di quest'ultimo criterio, il problema I) ammetterà una ed una sola soluzione $[\lambda_0, y_0(x)]$, se sono univocamente determinate le soluzioni della

$$y(x) = \alpha + \lambda_0 \int_{\alpha}^x f(t, y(t)) dt, \quad (a \leq x \leq b)$$

oppure della

$$y(x) = \beta + \lambda_0 \int_b^x f(t, y(t)) dt, \quad (a \leq x \leq b).$$

1. - TEOREMA I. - *Sia $f(x, y)$ una funzione ovunque finita e non negativa ⁽³⁾ nel rettangolo:*

$$R: a \leq x \leq b, \quad c \leq y \leq d,$$

ivi misurabile rispetto a x e continua rispetto a y .

Supponiamo inoltre che esistano due funzioni non negative $p(x)$ e $q(x)$ [$p(x) \leq q(x)$] sommabili in $a \leq x \leq b$ con

$$\int_a^b p(x) dx > 0,$$

tali che in tutto R sia

$$(1) \quad p(x) \leq f(x, y) \leq q(x).$$

Allora detti α e β due punti dell'intervallo $c \leq y \leq d$, esiste almeno un valore λ_0 del parametro λ , per il quale il problema

⁽³⁾ Anche nella introduzione avremmo potuto supporre $f(x, y)$ sempre positiva, previo il cambiamento di λ in $-\lambda$.

$$(2) \quad y'(x) = \lambda f(x, y(x)), \quad y(a) = \alpha, \quad y(b) = \beta$$

ammette almeno una soluzione, $y_0(x)$, assolutamente continua in $i: a \leq x \leq b$.

Naturalmente la prima delle (2) sarà soddisfatta quasi ovunque in i ; mentre $\lambda_0 = \frac{\beta - \alpha}{\int_a^b f(t, y_0(t)) dt}$; sicchè le (2) si potranno

compendiare nell'unica relazione funzionale

$$y(x) = \alpha + (\beta - \alpha) \frac{\int_a^x f(t, y(t)) dt}{\int_a^b f(t, y(t)) dt}.$$

Indichiamo con Σ lo spazio metrico costituito dalle funzioni $y(x)$ continue in tutto i e soddisfacenti ivi alle $c \leq y(x) \leq d$, quando si assuma come distanza di due funzioni siffatte il massimo, in i , del modulo della loro differenza.

Allora il problema si trasforma in quello di determinare un elemento unito nella trasformazione funzionale

$$x(x) = \alpha + (\beta - \alpha) \frac{\int_a^x f(t, y(t)) dt}{\int_a^b f(t, y(t)) dt}.$$

A tale scopo basterà procedere in modo analogo a quanto ho fatto in un lavoro recente ⁽⁴⁾.

Indichiamo con Σ' l'insieme degli elementi $g(x)$ di Σ , che

⁽⁴⁾ G. ZWIRNER: *Su un problema di valori al contorno per equazioni differenziali ordinarie di ordine n*. [Rendiconti del Seminario Matematico della R. Università di Padova, vol. XII (1941), pp. 114-122].

risultino assolutamente continui in i e verifichino la $g(a) = \alpha$ e, quasi ovunque in i , la

$$|g'(x)| \leq \frac{|\beta - \alpha|}{\int_a^b p(x) dx} q(x).$$

Le $g(x)$ risultano evidentemente equicontinue ed equilimate in i e perciò Σ' è compatto rispetto a Σ .

Fissato il numero naturale p , dividiamo l'intervallo $a \leq x \leq b$ in 2^p parti eguali mediante i punti

$$\xi_1 = a < \xi_2 < \dots < \xi_{2^p} < \xi_{2^p+1} = b$$

e poi consideriamo l'insieme delle funzioni $\varphi_p[g(x)|x]$ soddisfacenti alle condizioni:

1) la funzione $\varphi_p[g(x)|x]$ è continua in i e lineare in ognuno degli intervalli della suddivisione considerata;

2) risulta $\varphi_p[g(x)|\xi_j] = g(\xi_j)$ per $j = 1, 2, \dots, 2^p + 1$; di guisa che $\varphi_p[g(x)|a] = \sigma$, $c \leq \varphi_p[g(x)|x] \leq d$.

Giunti a questo punto, non si incontra nessuna difficoltà a riprendere il ragionamento svolto nel n. 2 del mio lavoro citato in (*).

2. - TEOREMA II. - Sia $f(x, y)$ una funzione misurabile rispetto a x ed uniformemente continua rispetto a y in $R: a \leq x \leq b, c \leq y \leq d$.

Supponiamo inoltre che esista un numero positivo σ e una funzione $q(x)$ (positiva e) sommabile in i tale che in R sia

$$(3) \quad \sigma \leq f(x, y) \leq q(x).$$

Esiste allora uno ed un solo valore λ_0 del parametro λ , in corrispondenza del quale il problema (2) ammette almeno una soluzione assolutamente continua in i .

L'esistenza di almeno un valore λ_0 segue dal n. 1.

Quindi per dimostrare il nostro teorema basta evidente-

mente dimostrare che se i numeri reali l e L e le funzioni $\bar{g}(x)$ e $\bar{Y}(x)$ verificano in tutto $\bar{i}: a \leq x \leq \bar{b}$ ($a < \bar{b} \leq b$) le relazioni

$$(4) \quad \begin{cases} \bar{g}(x) = \alpha + l \int_a^x f(t, \bar{g}(t)) dt, \\ \bar{Y}(x) = \alpha + L \int_a^x f(t, \bar{Y}(t)) dt, \end{cases}$$

nel che è implicito $c \leq \bar{g}(x) \leq d$, $c \leq \bar{Y}(x) \leq d$ in $a \leq x \leq \bar{b}$, allora dà $l < L$ segue

$$\bar{g}(x) < \bar{Y}(x) \quad (a < x \leq \bar{b}).$$

Ragionando per assurdo, supponiamo intanto che ξ sia un punto di $\bar{i}$ in cui risulti $\bar{g}(\xi) > \bar{Y}(\xi)$ e che $a_1 \leq x \leq b_1$ sia il massimo intervallo, contenente ξ e contenuto in $\bar{i}$, nel cui interno risulti sempre

$$(5) \quad \bar{g}(x) - \bar{Y}(x) > 0.$$

Riesce allora

$$(6) \quad \bar{g}(a_1) = \bar{Y}(a_1), \quad \bar{g}(b_1) > \bar{Y}(b_1).$$

Per la continuità uniforme della funzione $f(x, y)$ rispetto a y e per la prima delle (6), fissato un numero positivo $\epsilon < (L - l) \sigma$, si può determinare in corrispondenza un intorno destro, $a_1 \leq x \leq a_1 + \delta$, del punto a_1 , in modo che ivi risulti:

$$|f(x, \bar{Y}(x)) - f(x, \bar{g}(x))| < \epsilon \cdot |l^{-1}|.$$

Di qui e dalle (3) segue

$$\begin{aligned} & L f(x, \bar{Y}(x)) - l f(x, \bar{g}(x)) \geq \\ & \geq L f(x, \bar{Y}(x)) - l f(x, \bar{Y}(x)) - \epsilon \geq \\ & \geq (L - l) \sigma - \epsilon > 0, \quad (a_1 \leq x \leq a_1 + \delta). \end{aligned}$$

Donde, per la prima delle (6),

$$\begin{aligned}\bar{Y}(x) - \bar{y}(x) &= \int_{a_1}^x [L f(t, \bar{Y}(t)) - l f(t, \bar{y}(t))] dt \geq \\ &\geq [(L - l) \sigma - \epsilon] (x - a_1) > 0, \quad (a_1 < x \leq a_1 + \delta),\end{aligned}$$

il che contraddice la (5).

Sicchè abbiamo intanto che in $\bar{x}$ è sempre $\bar{y}(x) \leq \bar{Y}(x)$.

Per completare la dimostrazione del teorema bisognerà far vedere ora che nell'intervallo semi-aperto a sinistra $a < x \leq b$ le funzioni $\bar{y}(x)$ e $\bar{Y}(x)$ non possono mai essere eguali.

Infatti, se per un dato $\bar{x}$ ($a < \bar{x} \leq b$) fosse

$$(7) \quad \bar{y}(\bar{x}) = \bar{Y}(\bar{x}),$$

ripetendo il ragionamento fatto si potrebbe determinare un intorno sinistro del punto $\bar{x}$, tale da aversi ivi

$$\bar{y}(x) - \bar{Y}(x) \leq 0$$

e

$$L f(x, \bar{Y}(x)) - l f(x, \bar{y}(x)) > 0,$$

relazioni contraddittorie in virtù della (7) e delle (4).

3. - OSSERVAZIONE 1. - Il teorema II dà anche un criterio di confronto in funzione di λ per le soluzioni del problema (2).

OSSERVAZIONE 2. - Il problema (2) ammette una ed una sola soluzione $[\lambda_0, y_0(x)]$, se sono soddisfatte le ipotesi del teorema II e se $f(x, y)$ è non crescente o non decrescente rispetto a y . Ciò segue da noti teoremi di unicità per il problema dei

valori iniziali, relativo all'equazione differenziale $y' = f(x, y)$ ⁽⁵⁾, da quanto si è detto alla fine dell'introduzione.

(⁵) L. TONELLI: *Sull'unicità di una soluzione di una equazione differenziale ordinaria* [Rend. Accademia Nazionale dei Lincei, serie VI, vol. 1, (1925), pp. 272-277], n. 1 e 2.

Un'ampia bibliografia sui criteri di unicità per il problema dei valori iniziali relativo all'equazione differenziale ordinaria di forma normale e del primo ordine trovasi in G. SANSONE loc. cit. (¹), parte seconda, Cap. VIII, § 9. Ogni criterio siffatto permette di enunciare un altro relativo al problema (²) tutte le volte che sono verificate anche le ipotesi del teorema II, in conformità di quanto è stato già detto alla fine della introduzione.

(Pervenuto in Redazione il 12 ottobre 1945)