

RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

GIUSEPPE ZWIRNER

A proposito di una interpretazione geometrica del lemma fondamentale del calcolo integrale

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 15 (1946), p. 139-143

[<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1946__15__139_0>](http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1946__15__139_0)

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1946, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*
<http://www.numdam.org/>

A PROPOSITO DI UNA INTERPRETAZIONE GEOMETRICA DEL LEMMA FONDAMENTALE DEL CALCOLO INTEGRALE

Nota di GIUSEPPE ZWIRNER (a Padova)

Il lemma fondamentale del calcolo integrale è stato esteso da CACCIOPPOLI e da PETROVSKY nel modo seguente: ⁽¹⁾

Se una funzione continua $\varphi(t)$ ha rispetto ad un'altra $\psi(t)$, definita nel medesimo intervallo, derivata sempre nulla, essa è costante in tutto l'intervallo.

Il risultato era già noto se $\psi(t)$ è a variazione limitata e, nel caso generale, è stato dedotto dal seguente fatto geometrico stabilito dal CACCIOPPOLI ⁽²⁾

Se una linea del piano xy , immagine continua di un segmento di retta, è a tangente sempre orizzontale, tutti i suoi punti hanno una medesima ordinata.

Se si guardano le cose da un punto di vista geometrico si scorgono subito delle estensioni.

Si è infatti condotti naturalmente a domandarsi se una curva continua C dello spazio, che abbia in ogni suo punto tutte le sue tangenti parallele al piano xy , giace su un piano parallelo a questo.

In questa Nota darò una risposta affermativa a questa

⁽¹⁾ R. CACCIOPPOLI: *Sul lemma fondamentale del calcolo integrale* [Atti e Memorie della R. Acc. di Scienze Lettere ed Arti di Padova, vol. 50 (1933-34), pp. 93-98]; J. PETROVSKY: *Sur l'unicité de la fonction primitive par rapport à une fonction continue arbitraire* [Rec. Math. Soc. Math. Moscou, 41, 48-58 (1934)]

⁽²⁾ Cfr. loc. cit per prima in ⁽¹⁾.

questione nell'ipotesi che la curva C_1 , proiezione ortogonale di C sul piano xy , sia rettificabile ⁽³⁾.

Arrivo a questo risultato utilizzando, del teorema di CACCIOFOLI e PETROVSKY, il risultato parziale relativo al caso che $\psi(t)$ sia a variazione limitata.

Le ipotesi di carattere infinitesimale relative alla curva C sono sempre soddisfatte, se si sa a priori che per la curva C passa una superficie a piano tangente variabile con continuità in ogni punto della superficie e orizzontale in quelli che cadono sulla C .

Quindi, se sono soddisfatte queste condizioni la curva C giace in un piano orizzontale se è rettificabile la sua proiezione ortogonale sul piano xy ⁽⁴⁾.

In questo secondo caso dò un'altra dimostrazione del teorema stesso che si basa sul teorema elementare della derivazione delle funzioni composte e su proprietà elementari delle funzioni a variazioni limitate.

1. - Indichiamo con

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \\ z = f(t) \end{cases} \quad (t_0 \leq t \leq t_1),$$

le equazioni parametriche della curva continua C ⁽⁵⁾.

⁽³⁾ Se $P = P(t)$ è il punto corrente della C , riferito a un parametro t , retta tangente alla C nel punto $P_0 = P(t_0)$ è ogni retta che possa pensarsi come limite di una successione di secanti passanti tutte per il punto $P(t_0)$ e per una successione di punti $P(t_1), P(t_2), \dots$, con $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = t_0$.

Sicchè l'ipotesi posta implica che $P(t)$ non può essere mai costante in nessun intervallo. Non sarebbe difficile formulare il risultato in modo da non dover far ricorso a questa ipotesi.

⁽⁴⁾ Mi è stato comunicato verbalmente che tale questione era stata proposta da E. SCHMIDT.

⁽⁵⁾ Per quanto abbiamo detto in ⁽³⁾, le funzioni $\varphi(t)$, $\psi(t)$ e $f(t)$ non risulteranno mai simultaneamente costanti in nessun intervallo e quindi, per l'ipotesi fatta sulle tangenti alla curva C , non risulteranno simultaneamente costanti in nessun intervallo nemmeno le funzioni $\varphi(t)$ e $\psi(t)$.

Detti P e Q due punti della curva C , corrispondenti rispettivamente ai valori $t, t + \Delta t$ del parametrio, si ha :

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\sqrt{\Delta \varphi^2 + \Delta \psi^2 + \Delta f^2}} = 0,$$

ossia :

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\frac{\Delta f}{\sqrt{\Delta \varphi^2 + \Delta \psi^2}}}{\sqrt{1 + \frac{\Delta f^2}{\Delta \varphi^2 + \Delta \psi^2}}} = 0,$$

da cui

$$(1) \quad \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\sqrt{\Delta \varphi^2 + \Delta \psi^2}} = 0.$$

Indicata con $s(t)$ la lunghezza dell'arco di C_1 corrispondente ai valori t_0 e t del parametrio, dalla (1) e da $\left| \frac{\Delta s}{\sqrt{\Delta \varphi^2 + \Delta \psi^2}} \right| \geq 1$, segue

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta s} = 0,$$

per ogni valore di t dell'intervallo $t_0 \leq t \leq t_1$.

Cioè la derivata di $f(t)$ rispetto alla funzione $s(t)$ è nulla, epperò la $f(t)$ è costante, come volevamo dimostrare.

2. - Dimostriamo ora che:

Se $F(x, y)$ è continua insieme colle derivate parziali prime nell'insieme aperto D , se $\varphi(t), \psi(t)$ sono continue e a variazione limitata e se la curva γ di equazioni $x = \varphi(t), y = \psi(t)$ è contenuta in D e se $F'_x(\varphi(t), \psi(t)) = F'_y(\varphi(t), \psi(t)) = 0$, allora la funzione $F(\varphi(t), \psi(t))$ è costante in tutto $t_0 \leq t \leq t_1$.

A tale scopo approssimiamo (uniformemente) la curva γ mediante una successione di poligoni

$$\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n, \dots$$

inscritte nella curva e diciamo

$$x = \lambda_n(t), y = \mu_n(t) \quad (t_0 \leq t \leq t_1)$$

le equazioni di γ_n , scegliendo $\lambda_n(t)$ e $\mu_n(t)$ in modo da aversi, uniformemente, $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n(t) = \varphi(t)$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n(t) = \psi(t)$.

Poichè γ è interna a D , essa ha una distanza positiva 2ρ dalla frontiera di D ; quindi $F'_x(x, y)$ e $F'_y(x, y)$ sono equicontinue nell'insieme D_1 dei punti di D aventi da γ una distanza non superiore a ρ . Pertanto, dato $\varepsilon > 0$ ad arbitrio, si può determinare un numero intero e positivo m in modo che per ogni $n > m$ si abbia, in tutto $t_0 \leq t \leq t_1$,

$$|F'_x(\lambda_n(t), \mu_n(t))| = |F'_x(\lambda_n(t), \mu_n(t)) - F'_x(\varphi(t), \psi(t))| < \varepsilon,$$

$$|F'_y(\lambda_n(t), \mu_n(t))| = |F'_y(\lambda_n(t), \mu_n(t)) - F'_y(\varphi(t), \psi(t))| < \varepsilon.$$

Esclusi un numero finito di punti dell'intervallo $t_0 \leq t \leq t_1$ la funzione $F(\lambda_n(t), \mu_n(t))$ risulta derivabile con derivata ivi continua; quindi è

$$\begin{aligned} |F(\lambda_n(t), \mu_n(t)) - F(\lambda_n(t_0), \mu_n(t_0))| &= \left| \int_{t_0}^t F'(\lambda_n(t), \mu_n(t)) dt \right| \leq \\ &\leq \int_{t_0}^t |F'(\lambda_n(t), \mu_n(t))| dt = \int_{t_0}^t |F'_x(\lambda_n(t), \mu_n(t)) \lambda'_n(t) + \\ &+ F'_y(\lambda_n(t), \mu_n(t)) \mu'_n(t)| dt \leq \varepsilon \left(\int_{t_0}^t (|\lambda'_n(t)| + |\mu'_n(t)|) dt \right) \leq 2\varepsilon \times \\ &\times \text{lunghezza di } \gamma_n \leq 2\varepsilon \times \text{lunghezza di } \gamma \quad (^6). \end{aligned}$$

(⁶) Cfr. L. TONELLI: *Calcolo delle variazioni* [Bologna, Zanichelli, vol. 1, pag. 44 e pag. 171].

Da qui, data l'arbitrarietà del numero ε e dato che

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} [F(\lambda_n(t), \mu_n(t)) - F(\lambda_n(t_0), \mu_n(t_0))] = \\ = F(\varphi(t), \phi(t)) - F(\varphi(t_0), \phi(t_0)), \end{aligned}$$

segue che la funzione $F(\varphi(t), \phi(t))$ è costante in tutto $t_0 \leq t \leq t_1$, come volevamo dimostrare.

(Pervenuto in Redazione il 5 aprile 1946)