RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

GIUSEPPE SCORZA DRAGONI

Un' osservazione sulle radici di un sistema di equazioni non lineari

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 15 (1946), p. 135-138

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1946__15__135_0>

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1946, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (http://rendiconti.math.unipd.it/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

UN' OSSERVAZIONE SULLE RADICI DI UN SISTEMA DI EQUAZIONI NON LINEARI

Nota di GIUSEPPE SCORZA DRAGONI (*a Padova*)

In queste righe dò una dimostrazione del seguente noto

TEOREMA *A*) - *Il sistema*

$$f_i(x_1, \ldots, x_n) = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{1}$$

ammette soluzioni, se le funzioni reali $f_i(x_1, \ldots, x_n)$ *sono continue nell' ipercubo*

$$C: -1 \leq x_1 \leq 1, \ldots, -1 \leq x_n \leq 1,$$

dello spazio reale euclideo $S_n \equiv [x_1, \ldots, x_n]$, *e soddisfanno alle*

$$\begin{aligned} &f_i(x_1, \ldots, x_{i-1}, -1, x_{i+1}, \ldots, x_n) \leq 0, \\ &f_i(x_1, \ldots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \ldots, x_n) \geq 0 \end{aligned} \tag{2}$$

sulle facce [*proprie, cioè* $(n-1)$ - *dimensionali*] *di* C (1).

La dimostrazione si basa su un teorema di KRONECKER e su un altro di POINCARÉ-BOHL; essa quindi coincide nella sua sostanza con quella data, pel teorema *A*), da ZWIRNER nella Nota *Sulle radici dei sistemi di equazioni non lineari* (2).

Questa e quella non sono poi essenzialmente distinte da un' altra dimostrazione del teorema *A*), implicitamente data da

(1) Per le indicazioni bibliografiche rimando alle note (27) e (30) ed al n. 23 della mia Memoria *A proposito di alcuni teoremi sulle equazioni differenziali ordinarie* [questi «Rendiconti», questo volume].

(2) Questi «Rendiconti», questo volume.

BROUWER nella Nota *Beweis der Invarianz der Dimensionenzahl* [3]; il che sarà chiarito meglio in seguito.

DIMOSTRAZIONE. - Se le $f_i(x_1, \ldots, x_n)$ si annullano simultaneamente in un punto della frontiera c di C, non v'è bisogno d'altro.

Nel caso contrario, tenuto conto delle (2), si riconosce che il segmento avente un estremo nel punto corrente $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ di c e l'altro nel punto $(f_1(\xi_1, \ldots, \xi_n), \ldots, f_n(\xi_1, \ldots, \xi_n))$ di S_n, non contiene mai l'origine O delle coordinate. Epperò, su un ciclo $(n-1)$ - dimensionale σ, avente c per sostegno [4], il sistema di funzioni $\{f_1, \ldots, f_n\}$ ha [5] la stessa caratteristica [6], o indice di KRONECKER, del sistema di funzioni $\{x_1, \ldots, x_n\}$. Ma per quest'ultimo quella caratteristica vale 1; quindi [7] il sistema (1) ammette soluzioni.

[3] «Mathematische Annalen», vol. 70 (1911), pagg. 161-165; § 1.

[4] Un ciclo quale σ si può ottenere, per esempio, considerando un simplesso orientato n — dimensionale X, contenente nell'interno l'origine O di S_n, e riportando su c, mediante proiezione da O, la decomposizione della frontiera di X in simplessi $(n-1)$ - dimensionali orientati coerentemente; cfr. P. ALEXANDROFF e H. HOPF, *Topologie* [Springer, Berlino (1935)], vol. I, cap. XII, § 1, n. 3, pag. 461; un altro modo per ottenere σ è indicato implicitamente nell'Oss. I (in entrambi i casi σ è *berandungsfähig* anche se $n = 1$; cfr. la *Topologie* ora citata, cap. IV, § 4, n. 7, pagg. 179-180). In sostanza, per dirla con altre parole, si tratta di orientare c.

[5] Pel teorema di POINCARÉ-BOHL. Cfr. loc. cit. [4], cap. XII, § 1, n. 2, pag. 459; si veda anche: POINCARÉ, *Sur le courbes definies par les équations differentielles* [«Journal de Mathématique», serie 4, tomo 2 (1886)], p. 177; BOHL, «Journal für die reine und angewandte Mathematik», t. 127 (1904).

[6] Per questa nozione, cfr. loc. cit. [4], cap. XII, § 2, n. 3, pag. 469.

[7] Pel teorema di KRONECKER. Cfr. loc. cit. [4], cap. XII, § 2, n. 2, pag. 468 (oppure n. 3, pag. 470); si veda anche, oltre agli studi di KRONECKER nei «Monatsberichte der Akademie der Wissenschaft zu Berlin» (1869), il *Traité d'Analyse* di PICARD [Gauthier-Villars, Parigi (1901), tomo 1, 2ª ed., cap. IV, § 7], da cui è desunta la citazione precedente; la *Note sur quelques applications de l'indice de* KRONECKER, che HADAMARD ha pubblicato in appendice alla *Introduction à la théorie des fonctions* del TANNERY [Hermann, Parigi (1910), tomo II, 2ª ed., pagg. 436-477; se ne vedano specialmente le pag. 465-468; da questa Nota ho desunto le ultime due citazioni di [5]]; e, infine, loc. cit. [4], cap. XII, § 1, n. 7, pagg. 465-467.

OSSERVAZIONE I. - Supponiamo che le f_i non si annullino mai simultaneamente su c [in particolare, che le (2) siano soddisfatte in senso forte] e che il sistema (2) ammetta un numero finito di soluzioni. Consideriamo una decomposizione simpliciale Σ di C, tale che ogni soluzione delle (1) sia interna a un simplesso n-dimensionale di Σ. Orientiamo i simplessi di Σ in modo coerente. Otteniamo così da Σ un complesso orientato, la cui frontiera è un ciclo quale il ciclo σ considerato nella dimostrazione precedente. Epperò, in virtù di teoremi noti ([8]), la dimostrazione svolta ci dice pure che:

In queste ipotesi ulteriori, la somma delle molteplicità ([9]) *delle soluzioni del sistema* (1) *è dispari* ([10]).

OSSERVAZIONE II. - Per dimostrare il teorema A), si può anche procedere nel modo seguente ([11]):

1) supporre, al solito, che il sistema (1) non abbia soluzioni su c;

2) osservare che allora la trasformazione continua t, definita dalle formule $y_1 = f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, y_n = f_n(x_1, \ldots, x_n)$ e pensata come trasformazione di C in un insieme Γ dello stesso $S_n \equiv [x_1, \ldots, x_n]$, muta le facce di C appartenenti, rispettivamente, agli iperpiani $x_i = -1$ e $x_i = +1$ $(i = 1, \ldots, n)$ in insiemi (chiusi) contenuti, rispettivamente, nei semispazi $x_i \leq 0$ e $x_i \geq 0$ e non passanti per O (e aventi da O una distanza positiva);

3) dimostrare che l'origine O di S_n appartiene a Γ con lo stesso ragionamento, di cui BROUWER si serve nella Nota citata in ([3]) per riconoscere che *l'origine O sarebbe interna a* Γ, *se t*

([8]) Cfr. loc. cit. ([4]), cap. XII, § 2, n. 5, pag. 472.

([9]) Per questa nozione, cfr. loc. cit. ([4]), cap. XII, § 2, n. 4, pag. 470.

([10]) Un'osservazione analoga è stata fatta anche da L. BRUSOTTI, in *Dimostrazione di un lemma algebrico utile in questioni di analisi* [«Annali della R. Scuola Normale Superiore di Pisa», serie II, vol. XI (1942), pagg. 211-215; se ne veda specialmente la pag. 215], nel caso che le f_i siano polinomi, le (2) siano soddisfatte nel senso forte, le soluzioni del sistema (1) contenute in C siano in numero finito e semplici.

([11]) Cfr. la nota ([27]) della mia Memoria citata in ([1]).

nel deformare C spostasse ogni punto di C di una quantità minore di uno.

La dimostrazione già data e questa non sono essenzialmente diverse. A conti fatti, nel punto 3) si finisce collo stabilire quel tanto dei teoremi di POINCARÉ-BOHL e KRONECKER che bastano per dimostrare il teorema *A*).

Tant'è vero che il lemma di BROUWER ora ricordato è un corollario di un teorema di ROUCHÉ ([12]) (e quindi del teorema di POINCARÉ-BOHL) sull'indice di un punto rispetto ad un ciclo, cosa che ho avuto occasione di rilevare implicitamente anche altrove ([13]).

Ma si può anche osservare che le considerazioni svolte si possono invertire, nel senso che una volta dimostrato il teorema *A*) è facile dedurre che *O* è interno all'insieme Γ, se le (2) sono soddisfatte in senso forte ([14]).

([12]) Cfr. loc. ([4]), cap. XII, § 1, n. 2, pag. 459.

([13]) G. SCORZA DRAGONI, *Un teorema d'esistenza per gli elementi uniti di una trasformazione funzionale* [questi «Rendiconti», questo volume] n. 3.

([14]) Ma non è nemmeno difficile il dedurre, sempre dal teorema *A*), che il punto *O* è interno a Γ, se sono verificate le (2) e se le f_i non si annullano mai simultaneamente sul contorno di *C*.

(*Pervenuto in Redazione il 7 febbraio 1946*)