

RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

GIUSEPPE ZWIRNER

**Ancora sulla teoria delle matrici applicata ai
sistemi di equazioni differenziali lineari**

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 14 (1943), p. 37-42

http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1943__14__37_0

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1943, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

ANCORA SULLA TEORIA DELLE MATRICI APPLICATA AI SISTEMI DI EQUAZIONI DIFFERENZIALI LINEARI

Nota di GIUSEPPE ZWIRNER (Padova)

1. - In una Memoria, sulla teoria delle matrici applicata ai sistemi di equazioni differenziali, ho, fra l'altro, considerata l'equazione

$$(1) \quad D B = \frac{A}{z}$$

- dove A è una matrice i cui elementi sono funzioni olomorfe della variabile z , in un certo dominio del punto $z=0$ e DB indica la derivata destra di VOLTERRA della matrice B - ed ho fatto vedere che tale equazione ammette una matrice integrale regolare ⁽¹⁾.

Nella dimostrazione data sono però incorso in un errore che mi propongo di correggere in questa piccola Nota.

Separiamo nella matrice A la parte che contiene la z dalla parte costante, poniamo cioè:

$$A = A^{(0)} + \bar{A} z$$

e scriviamo la matrice $A^{(0)}$ sotto forma normale

⁽¹⁾ G. ZWIRNER: *La teoria delle matrici applicata ai sistemi di equazioni differenziali lineari* [Rendiconti del Seminario Matematico della R. Università di Padova, vol. VII (1936), pp. 55-109], pag. 101.

Rimando il lettore a tale lavoro per tutte le definizioni che avrò bisogno di richiamare in questa Nota ed anche per le notazioni adoperate.

$$(2) \quad A^{(0)} = C^{-1} [T_1^{(e_1)}, T_2^{(e_2)}, \dots, T_p^{(e_p)}] C,$$

dove

$$T_i^{(e_i)} = \left\| \begin{array}{cccccc} \lambda_i & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & \lambda_i & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \lambda_i \end{array} \right\|$$

e le λ sono le radici dell'equazione caratteristica

$$F(\lambda) = \left| \begin{array}{cccc} a_{1,1}^{(0)} - \lambda & a_{1,2}^{(0)} & \dots & a_{1,n}^{(0)} \\ a_{2,1}^{(0)} & a_{2,2}^{(0)} - \lambda & \dots & a_{2,n}^{(0)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1}^{(0)} & a_{n,2}^{(0)} & \dots & a_{n,n}^{(0)} - \lambda \end{array} \right| = 0,$$

dove $a_{i,k}^{(0)}$ sono gli elementi della matrice $A^{(0)}$.

L'equazione (1) si può allora porre sotto la forma :

$$(3) \quad \frac{dB}{dz} = B \frac{A^{(0)}}{z} + B\bar{A}.$$

Determiniamo ora una matrice H soddisfacente all'equazione ⁽²⁾

$$(4) \quad DH = \frac{A^{(0)}}{z}$$

e poniamo nella (3)

$$B = HB_1.$$

Si avrà :

$$H \frac{dB_1}{dz} + \frac{dH}{dz} B_1 = H B_1 \frac{A^{(0)}}{z} + H B_1 \bar{A},$$

ossia, tenendo presente la (4),

$$\frac{dB_1}{dz} + \frac{A^{(0)}}{z} B_1 - B_1 \frac{A^{(0)}}{z} = B_1 \bar{A}.$$

⁽²⁾ cfr. loc. cit. in ⁽⁴⁾, pag. 99.

Moltiplicando ora, a sinistra, per la matrice C , dove C è la matrice che compare nella (2), si ha:

$$C \frac{dB_1}{d\bar{z}} + C \frac{C^{-1} [T_1^{(e_1)}, T_2^{(e_2)}, \dots, T_p^{(e_p)}] C}{\bar{z}} B_1 - CB_1 \frac{A^{(0)}}{\bar{z}} = CB_1 \bar{A}.$$

Posto

$$\bar{B} = CB_1,$$

si ottiene:

$$(5) \quad \bar{z} \frac{d\bar{B}}{d\bar{z}} - \bar{B}A^{(0)} + [T_1^{(e_1)}, T_2^{(e_2)}, \dots, T_p^{(e_p)}] \bar{B} = \bar{B} \bar{A} \bar{z}.$$

Facciamo ora vedere che si può soddisfare all'equazione (5) con una matrice $\bar{B}$ olomorfa in un certo dominio del punto $\bar{z} = 0$, riducendosi per $\bar{z} = 0$ alla matrice C . A tale scopo, posto

$$\bar{A}\bar{z} = \sum_i^{\infty} A^{(i)} \bar{z}^i$$

e. formalmente,

$$(6) \quad \bar{B} = \sum_j^{\infty} \bar{B}^{(j)} \bar{z}^j, \quad (\bar{B}^{(0)} = C),$$

dalla (5) si ricavano le seguenti formule di ricorrenza:

$$(7) \quad K \bar{B}^{(k)} - \bar{B}^{(k)} A^{(0)} + [T_1^{(e_1)}, T_2^{(e_2)}, \dots, T_p^{(e_p)}] \bar{B}^{(k)} = \sum_1^k \bar{B}^{(k-h)} A^{(h)},$$

$$(k = 1, 2, \dots).$$

In corrispondenza al divisore elementare $(\lambda - \lambda_1)^{e_1}$ della matrice $A^{(0)}$, dalle (7) si deducono i seguenti e_1 sistemi:

$$(8) \quad a_{1,s}^{(0)} \bar{b}_{t,1}^{(k)} + a_{2,s}^{(0)} \bar{b}_{t,2}^{(k)} + \dots + (a_{s,s}^{(0)} - k - \lambda_1) \bar{b}_{t,s}^{(k)} + \dots +$$

$$+ a_{n,s}^{(0)} \bar{b}_{t,n}^{(k)} = P_{t,s} + \bar{b}_{t-1,s}^{(k)},$$

$$(t = 1, 2, \dots, e_1; s = 1, 2, \dots, n; \bar{b}_{0,s}^{(k)} = 0),$$

nelle funzioni incognite $\bar{b}_{t,s}^{(k)}$ e dove $P_{t,s}$ sono delle funzioni ra-

zionali intere degli elementi delle matrici $A^{(h)}$ e $\bar{B}^{(h-h)}$ ($h = 1, 2, \dots, k$).

Il determinante dei coefficienti di tali sistemi vale $F(k + \lambda_1)$ e se ammettiamo che le radici dell'equazione caratteristica non differiscano per interi positivi non nulli, si avrà

$$F(k + \lambda_1) \neq 0$$

e dai sistemi (8) si potranno determinare gli elementi delle prime e_1 righe della matrice $\bar{B}^{(k)}$. Ragionando in modo analogo sugli altri divisori elementari si verrà a determinare la matrice $\bar{B}^{(k)}$ e quindi lo sviluppo (6).

2. — Dimostriamo ora la convergenza dello sviluppo (6).

A tale scopo diciamo r il raggio di un cerchio, avente il centro nell'origine, in ogni punto del quale, compresa la circonferenza, la matrice Az converge e sia M il massimo modulo dei suoi elementi, in tale cerchio, e N il massimo modulo degli elementi delle matrici $\bar{B}^{(h-h)}r^{k-h}$ ($h = 1, 2, \dots, k-1$). Si ha allora, evidentemente,

$$(9) \quad |P_{t,s}r^h| \leq knMN, \quad (s = 1, 2, \dots, n; t = 1, 2, \dots, e_1).$$

Dalle (8) si ricava inoltre, per $t = 1$,

$$(10) \quad b_{1,s}^{(k)} F(k + \lambda_1) = P_{1,1} \Delta_{s,1} + P_{1,2} \Delta_{s,2} + \dots + P_{1,n} \Delta_{s,n},$$

dove $\Delta_{s,i}$ ($i = 1, 2, \dots, n$) indicano i complementi algebrici degli elementi della riga s -ma nel determinante $F(k + \lambda_1)$ ⁽³⁾.

Detto allora $\delta_{s,i}$ il modulo di $\Delta_{s,i}$ e δ il modulo di $F(k + \lambda_1)$, dalla (9) e (10) risulta:

$$(11) \quad |\bar{b}_{1,s}^{(k)} r^k| \leq nMN \left(\frac{k\delta_{s,1}}{\delta} + \frac{k\delta_{s,2}}{\delta} + \dots + \frac{k\delta_{s,n}}{\delta} \right),$$

($s = 1, 2, \dots, n$).

⁽³⁾ Per il ragionamento svolto in questo numero Cfr. L. SAUVAGE: *Sur les solutions régulières d'un système d'équations différentielles* [Annales de l'École Normale Supérieure, tomo III (1886), pp. 391-404], pag. 395.

Essendo inoltre

$$\frac{k\partial_{s,i}}{\partial} = \left| \frac{k\Delta_{s,i}}{F(k+\lambda_1)} \right|$$

e risultando $F(k+\lambda_1)$ di grado n rispetto a k e $k\Delta_{s,i}$ di grado $\leq n$ rispetto a k , esisterà e sarà finito il

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k\partial_{s,i}}{\partial}.$$

Si potrà quindi determinare un numero $l_1 > 0$ tale che per k sufficientemente grande si abbia, tenendo presente la (11)

$$|b_{1,s}^{(k)} \cdot r^k| \leq n M N l_1, \quad (s = 1, 2, \dots, n).$$

Determinato così un estremo superiore per $|\bar{b}_{1,s}^{(k)} r^k|$ si potrà ora con ragionamento analogo determinare un estremo superiore anche per gli elementi $|\bar{b}_{2,s}^{(k)} r^k|, \dots, |\bar{b}_{e_1,s}^{(k)}|$ ($s = 1, 2, \dots, n$) e per tutti gli altri elementi $|\bar{b}_e^{(k)} r^k|$ che corrispondono agli altri divisori elementari ⁽⁴⁾.

Si potrà quindi determinare un numero $L > 0$ tale che, per k sufficientemente grande, si abbia

$$|\bar{B}^{(k)} \cdot r^k| \leq n M N L.$$

Siccome coll'aumentare di k non aumenta il numero L e supponendo, come è sempre lecito purchè si prenda r sufficientemente piccolo,

$$n M L < 1,$$

si avrà:

$$|\bar{B}^{(k+q)} \cdot r^{k+q}| \leq N, \quad (q = 0, 1, \dots).$$

⁽⁴⁾ Per determinare un estremo superiore, per esempio, di $|\bar{b}_{2,s}^{(k)} r^k|$, basta osservare che risulta

$$|P_{2,s} + \bar{b}_{1,s}^{(k)} r^k| \leq k n M N + n M N l_1 < k n M N (1 + l_1)$$

e poi ragionare come nel caso precedente.

