RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

GIUSEPPE MIGNOSI

Sulle caratteristiche delle matrici

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 13 (1942), p. 26-29

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1942__13__26_0>

SULLE CARATTERISTICHE DELLE MATRICI

(*Nota di* Giuseppe Mignosi *a Palermo*)

Sunto – *L'autore estende un suo teorema di sufficienza affinchè le radici caratteristiche di una matrice reale abbiano le parti reali concordi, al caso di una matrice complessa.*

In una precedente Nota (¹) sono pervenuto, indipendentemente dal classico criterio di Hurwitz, a talune semplici condizioni sufficienti affinchè le radici caratteristiche di una matrice reale abbiano tutte le parti reali concordi.

In seguito ad incitamento dol prof. Cherubino della R. Università di Pisa, al quale rendo grazie, ho notato che dette condizioni ed il relativo procedimento dimostrativo possono essere estesi al caso più generale di una matrice ad elementi complessi.

Di più ho rilevato che anche nel caso generale la dimostrazione può, con grande vantaggio, essere esposta servendosi del simbolismo del calcolo delle matrici (²), il quale conferisce alla trattazione la massima concisione congiunta a grande eleganza.

(¹) Giuseppe Mignosi: *Su di una questione algebrica che si presenta in problemi di stabilità* [Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, t. XIX, pp. 1-7].

(²) Per la terminologia e le notazioni adottate nel calcolo delle matrici cfr. M. Cipolla: *Analisi Algebrica e introduzione al calcolo infinitesimale*, 2ª edizione, Palermo, Capozzi 1921; G. Scorza: *Corpi numerici ed Algebre*, Principato, Messina 1921, nonchè i numerosi scritti di S. Cherubino e segnatamente la *Geometria Analitica*, p. II, cap. I, n. 122.

1. - Sia a:

$$a = \left\| \begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{array} \right\| \qquad [1]$$

una matrice quadrata dell'ordine n nel corpo complesso e ρ una qualunque delle sue n radici caratteristiche, cioè un numero complesso ρ, tale che si abbia:

$$|a - \rho j| = 0,$$

dove j denota la matrice unità dell'ordine n.

Essendo $a - \rho j$ una matrice degenere dell'ordine n, esistono nel corpo complesso quanti si vogliano n-complessi verticali x non nulli e soddisfacenti all'equazione:

$$(a - \rho j) x = 0,$$

dove 0 denota l'n-complesso verticale nullo.

Se x è uno di essi, in virtù della proprietà distributiva del prodotto di matrici, ne segue l'eguaglianza:

$$a x = \rho x$$

dalla quale, moltiplicando a sinistra i due membri per la matrice $\overline{x}_{-1}$ coniugata della trasposta di x, si ricava:

$$\overline{x}_{-1} a x = \rho \overline{x}_{-1} x \qquad [2]$$

perchè ρ è un fattore scalare e quindi commutabile coi fattori matrici.

I due membri dell'eguaglianza [2] essendo matrici di tipo (1, 1) rappresentano due numeri complessi ordinarî, i cui coniugati saranno pure eguali, cioè si avrà

$$x_{-1} \overline{a} \overline{x} = \overline{\rho} x_{-1} \overline{x}.$$

Prendendo qui le matrici trasposte dei due membri e tenendo presente che la trasposta di un prodotto di matrici è uguale al prodotto delle trasposte dei fattori nell'ordine inverso, si ottiene:

$$\bar{x}_{-1}\,\bar{a}_{-1}\,x = \bar{\rho}\,\bar{x}_{-1}\,x\,. \qquad [3]$$

Allora sommando membro a membro [2] e [3], si ricava successivamente:

$$\bar{x}_{-1}\,a\,x + \bar{x}_{-1}\,\bar{a}_{-1}\,x = \rho\,\bar{x}_{-1}\,x + \bar{\rho}\,\bar{x}_{-1}\,x\,,$$

$$\bar{x}_{-1}\,(a + \bar{a}_{-1})\,x = (\rho + \bar{\rho})\,\bar{x}_{-1}\,x$$

cioè:

$$\bar{x}_{-1}\,\frac{1}{2}\,(a + \bar{a}_{-1})\,x = \mathcal{R}(\rho)\,\bar{x}_{-1}\,x \qquad [4]$$

avendo indicato, come di consueto, con $\mathcal{R}(\rho)$ la parte reale del numero complesso ρ.

Poichè si ha:

$$\overline{(a + \bar{a}_{-1})}_{-1} = a + \bar{a}_{-1}\,,$$

la matrice $\frac{1}{2}\,(a + \bar{a}_{-1})$ coincide con la coniugata della propria trasposta: essa è, perciò, una matrice antisimmetrica ed il primo membro [4] è un forma bilineare reale:

$$\bar{x}_{-1}\,\frac{1}{2}\,(a + \bar{a}_{-1})\,x = \sum_{r,\,s}^{1,\,n} \frac{1}{2}\,(a_{rs} + \bar{a}_{sr})\,\bar{x}_r\,x_s\,,$$

ossia è una forma hermitiana di prima specie rispetto ai due n-complessi coniugati x, $\bar{x}$.

Inoltre, non essendo nullo l'n-complesso x, il prodotto:

$$\bar{x}_{-1}\,x = \sum_{r}^{1,\,n} (\mathrm{mod}\,x_r)^2$$

è un numero positivo.

Se ne deduce, in base alla [4], che basterà che la detta hermitiana sia definita positiva o definita negativa perchè il numero reale $\mathcal{R}(\rho)$ risulti positivo o negativo rispettivamente, qualunque sia la radice caratteristica ρ considerata della matrice a.

2. – D'altra parte le condizioni affinchè una forma hermitiana sia definita non differiscono ([3]) da quelle note relative alle forme quadratiche ordinarie a coefficienti reali, per cui si può enunciare il seguente criterio di sufficienza affinchè le radici caratteristiche di una matrice complessa abbiano tutte le parti reali concordi:

Se a è una matrice complessa [1] *d'ordine n e si fanno le n posizioni:*

$$\alpha_r = \begin{vmatrix} \frac{1}{2}(a_{11}+\bar{a}_{11}) & \frac{1}{2}(a_{12}+\bar{a}_{21}) & \dots & \frac{1}{2}(a_{1r}+\bar{a}_{r1}) \\ \frac{1}{2}(a_{21}+\bar{a}_{12}) & \frac{1}{2}(a_{22}+\bar{a}_{22}) & \dots & \frac{1}{2}(a_{2r}+\bar{a}_{r2}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{1}{2}(a_{r1}+\bar{a}_{1r}) & \frac{1}{2}(a_{r2}+\bar{a}_{2r}) & \dots & \frac{1}{2}(a_{rr}+\bar{a}_{rr}) \end{vmatrix},$$

$$(r = 1, 2, \dots, n)$$

allora, secondo che siano verificate le condizioni:

$$\alpha_1 > 0, \quad \alpha_2 > 0, \dots, \quad \alpha_n > 0,$$

oppure le condizioni:

$$\alpha_1 < 0, \quad \alpha_2 > 0, \dots, \quad (-1)^n \alpha_n > 0,$$

le radici caratteristiche della matrice a avranno tutte la parte reale positiva o negativa rispettivamente.

3. – In particolare, quando si supponga che a sia reale si ricade nella proposizione che chiude la mia Nota citata.

([3]) S. Cherubino, l. c. nn. 119-120 – 300-303.

(Pervenuto in Redazione il 19 Aprile 1942–XX)