RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

EMMA MARCHENTE

Teoremi di confronto per problemi al contorno relativi a sistemi di due equazioni differenziali del primo ordine

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 12 (1941), p. 81-88

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1941__12__81_0>

TEOREMI DI CONFRONTO PER PROBLEMI AL CONTORNO RELATIVI A SISTEMI DI DUE EQUAZIONI DIFFERENZIALI DEL PRIMO ORDINE

Nota di EMMA MARCHENTE *(a Bassano del Grappa).*

In questo volume TREVISAN [1] e SCORZA DRAGONI [2] hanno dato dei teoremi di unicità per gli integrali dei sistemi di due equazioni differenziali del primo ordine. Per chiarezza sarà utile ricordare esplicitamente i seguenti:

Se $f(x, y, z)$, $g(x, y, z)$ *sono funzioni continue nello strato*

$$S: a \leq x \leq b, \; -\infty < y < +\infty, \; -\infty < z < +\infty \tag{1}$$

e inoltre:

a) $f(x, y, z)$ *è crescente rispetto a* z *e lipschitziana in* y*;*

b) $g(x, y, z)$ *è crescente rispetto a* y*;*

allora il sistema:

$$\begin{aligned} y' &= f(x, y, z), \\ z' &= g(x, y, z) \end{aligned} \tag{2}$$

ammette, nell' intervallo

$$I: a \leq x \leq b, \tag{3}$$

[1] G. TREVISAN, *Teoremi di unicità e confronto per problemi relativi a sistemi di due equazioni differenziali ordinarie del primo ordine* [questo volume, pagg. 12-21].

[2] G. SCORZA DRAGONI, *Teoremi di unicità relativi a un problema al contorno per un sistema di due equazioni differenziali, ordinarie, del primo ordine* [questo volume, pagg. 30-50].

al più una coppia di integrali verificanti le condizioni:

$$(4)\qquad y(a) = \alpha\,,\quad y(b) = \beta \text{ [3]};$$

e:

Se $f(x, y, z)$, $g(x, y, z)$ sono funzioni continue nello strato S e

a) $f(x, y, z)$ è non decrescente (non crescente) rispetto a z e lipschitziana in y;

b) $g(x, y, z)$ è non decrescente (non crescente) rispetto a y e lipschitziana in z,

il sistema (2) *ammette, in I, al più una coppia di integrali soddisfacenti alle* (4) [4].

Inoltre TREVISAN ha dato anche dei teoremi di confronto per le soluzioni di due sistemi. Precisamente egli ha dimostrato che:

Se i secondi membri del sistema

$$(5)\qquad y' = f_i(x, y, z),\qquad z' = g_i(x, y, z)\qquad (i = 1, 2)$$

sono continui nello strato S e

$$y_i(x),\quad z_i(x)$$

verificano le (5) *in tutto I; se inoltre f_1 è crescente in z, g_1 decrescente in y e lipschitziana in z, g_2 crescente in y e lipschitziana in z, mentre $f_1 \leq f_2$, $g_1 \leq g_2$, da*

$$z_1(a) < z_2(a)\,,\quad y_1(b) > y_2(b)$$

segue

$$z_1(x) < z_2(x)\,,\quad y_1(x) > y_2(x)\qquad (a \leq x \leq b).$$

TREVISAN considera anche il caso che dalle

$$y_1(a) < y_2(a)\,,\quad z_1(b) < z_2(b)$$

(3) loc. cit. (1), n. 1.

(4) loc. cit. (2), § 3. Veramente SCORZA DRAGONI suppone f e g misurabili rispetto ad x e continue rispetto ad (y, z); introduco, in questo lavoro, l'ipotesi della continuità di $f(x, y, z)$ e $g(x, y, z)$ [rispetto a (x, y, z)] solo per motivi di semplicità.

si vogliano dedurre le

$$y_1(x) < y_2(x), \quad z_1(x) < z_2(x) \text{ [5]}.$$

In questa Nota mi propongo di dare dei teoremi di confronto in cui le ipotesi fatte si avvicinino di più come tipo a quelle del secondo dei teoremi di unicità sopra ricordati. Applicherò poi i risultati ottenuti per indicare un teorema d'esistenza, relativo alle soluzioni delle (2) soddisfacenti alle (4), quando le funzioni $f(x, y, z)$ e $g(x, y, z)$ si suppongano continue in un insieme della forma

$$\Gamma: a \leq x \leq b, \quad \sigma_1(x) \leq y \leq \sigma_2(x), \quad \tau_1(x) \leq z \leq \tau_2(x).$$

1. – Avrò spesso bisogno nel seguito di un lemma che, per comodità, riporto qui esplicitamente:

Le funzioni $\Gamma(x, y)$ *e* $\Delta(x, y)$ *siano continue nella striscia*

$$\Sigma: a \leq x \leq b, \qquad -\infty < y < +\infty;$$

siano lipschitziane ivi rispetto alla y *e vi soddisfacciano alla*

$$\Gamma(x, y) \leq \Delta(x, y).$$

Allora, se

$$\gamma(x), \quad \delta(x)$$

sono rispettivamente integrali delle

$$y' = \Gamma(x, y), \quad y' = \Delta(x, y)$$

e se in un punto x_0 *di* $a \leq x \leq b$ *riesce*

$$\gamma(x_0) \leq \delta(x_0),$$

è anche

$$\gamma(x) \leq \delta(x) \quad \text{in} \quad x_0 \leq x \leq b;$$

se invece riesce

$$\gamma(x_0) \geq \delta(x_0),$$

[5] loc. cit. [1], nn. 4 e 5.

è anche

$$\gamma(x) \geq \delta(x) \quad in \quad a \leq x \leq x_0\ (^6).$$

2. – Dimostriamo ora il seguente teorema:

Le funzioni $f(x, y, z)$, $g(x, y, z)$, $\varphi(x, y, z)$ *e* $\psi(x, y, z)$ *siano continue nello strato* S *definito dalle* (1) *e* $y = p(x)$, $z = r(x)$ *siano soluzioni del sistema*

$$y' = f(x, y, z),$$
$$z' = g(x, y, z),$$

mentre $y = \pi(x)$, $z = \rho(x)$ *lo siano del sistema*

$$y' = \varphi(x, y, z),$$
$$z' = \psi(x, y, z);$$

e $p(x)$, $r(x)$, $\pi(x)$, $\rho(x)$ *si suppongano definite in tutto l'intervallo*

$$I:\ a \leq x \leq b.$$

Allora se:

I) $f(x, y, z)$, $\varphi(x, y, z)$ *sono lipschitziane in* y;

II) $g(x, y, z)$, $\psi(x, y, z)$ *sono lipschitziane in* z;

se, per ogni x *dell'intervallo* I *e per* y, y_1, y_2, z, z_1, z_2 *qualunque, è*

$$f(x, y, z_1) \leq \varphi(x, y, z_2), \tag{6}$$

$$g(x, y_1, z) \geq \psi(x, y_2, z) \tag{7}$$

e se inoltre risulta

$$p(a) \leq \pi(a), \quad r(b) \leq \rho(b),$$

in I *è sempre*

$$p(x) \leq \pi(x), \quad r(x) \leq \rho(x).$$

[6] Per un teorema un po' più generale cfr. loc. cit. [2], § 2. Per altri teoremi dello stesso tipo, validi per i sistemi, si veda M. Picone, *Teoremi di confronto per i sistemi di equazioni differenziali ordinarie e loro conseguenze* [Annali di Matematica pura ed applicata, serie IV, tomo XX (1941), pagg. 67–103], n. 1.

Dalla (6) segue infatti

$$f(x,\ y,\ r(x)) \leq \varphi(x,\ y,\ \rho(x))$$

e quindi per il lemma del n. 1, per la I) e la $p(a) \leq \pi(a)$ si ha appunto

$$p(x) \leq \pi(x) .$$

Dalla (7) segue poi

$$g(x,\ p(x),\ z) \geq \psi(x,\ \pi(x),\ z)$$

e, per il lemma precedente e per la II) e la $z(b) \leq \rho(b)$, si ha

$$r(x) \leq \rho(x) \text{ (}^7\text{)}.$$

3. – In modo analogo si dimostra che, *se è*

$$f(x,\ y,\ z_1) \leq \varphi(x,\ y,\ z_2)\,, \tag{8}$$

$$g(x,\ y_1,\ z) \leq \psi(x,\ y_2,\ z)\,, \tag{9}$$

se

I) $f(x,\ y,\ z)$ *e* $\varphi(x,\ y,\ z)$ *sono lipschitziane in* y,

II) $g(x,\ y,\ z)$ *e* $\psi(x,\ y,\ z)$ *sono lipschitziane in* z

e

$$p(a) \leq \pi(a) \quad r(b) \geq \rho(b)\,,$$

è sempre in I

$$p(x) \leq \pi(x)\,, \quad r(x) \geq \rho(x)\,.$$

4. – Osservazione. A chiarimento dei risultati precedenti dimostriamo ora che, se le funzioni $f(x,\ y,\ z)$, $g(x,\ y,\ z)$, $\varphi(x,\ y,\ z)$, $\psi(x,\ y,\ z)$ soddisfanno alle condizioni seguenti:

(7) Se nel teorema dimostrato si suppone $f = \varphi$ e $g = \psi$, la (6) porta che f non dipende da z, mentre dalla (7) segue che g non dipende da y. Il sistema (2) si spezza in due equazioni differenziali distinte. E le affermazioni del testo sono conseguenze del fatto che, nelle nostre ipotesi, gli integrali di queste sono univocamente determinati dai valori iniziali.

α) $f(x, y, z)$ è non decrescente in z,

β) $g(x, y, z)$ è non decrescente in y,

γ) $\varphi(x, y, z)$ è non crescente in z,

δ) $\psi(x, y, z)$ è non crescente in y,

$$f(x, y, z) \leq \varphi(x, y, z), \tag{10}$$

$$g(x, y, z) \geq \psi(x, y, z), \tag{11}$$

esse soddisfanno pure alle (6) e (7).

Supponiamo infatti $z_1 \leq z_2$; da questa ipotesi, dalla (10) e dalla α) segue:

$$f(x, y, z_1) \leq f(x, y, z_2) \leq \varphi(x, y, z_2).$$

Supponiamo invece $z_1 > z_2$; da questa ipotesi, dalla (10) e dalla γ) segue:

$$f(x, y, z_1) \leq \varphi(x, y, z_1) \leq \varphi(x, y, z_2).$$

Cioè la (6) è sempre verificata.

Dalle β), δ) e dalla (11) segue invece la (7).

In modo analogo si dimostra che, se le funzioni $f(x, y, z)$, $g(x, y, z)$, $\varphi(x, y, z)$, $\psi(x, y, z)$ soddisfanno alle α), β), γ), δ) ed alle:

$$f(x, y, z) \leq \varphi(x, y, z),$$

$$g(x, y, z) \leq \psi(x, y, z),$$

esse soddisfanno pure alle (8) e (9).

5. - *Nell' insieme*

$$\Gamma: a \leq x \leq b, \quad \sigma_1(x) \leq y \leq \sigma_2(x), \quad \tau_1(x) \leq z \leq \tau_2(x),$$

ove $\sigma_i(x)$ *e* $\tau_i(x)$ $(i = 1, 2)$ *sono continue e derivabili in*

$$I: a \leq x \leq b,$$

siano date due funzioni continue $f(x, y, z)$ *e* $g(x, y, z)$, *con*

$$\begin{array}{l} \sigma_1'(x) \leq f(x, y, z) \leq \sigma_2'(x), \\ \tau_1'(x) \geq g(x, y, z) \geq \tau_2'(x), \end{array} \tag{12}$$

e sia $f(x, y, z)$ lipschitziana in y e $g(x, y, z)$ lipschitziana in z; allora, dati due numeri α e β verificanti le

$$\sigma_1(a) \leq \alpha \leq \sigma_2(a) ,$$
$$\tau_1(b) \leq \beta \leq \tau_2(b) ,$$

esiste in I una coppia di soluzioni $\sigma(x)$ e $\tau(x)$ delle

$$y' = f(x, y, z) ,$$
$$z' = g(x, y, z)$$

verificanti le

$$\sigma(a) = \alpha \quad \tau(b) = \beta \text{ [8]} .$$

Poniamo

$$\bar{f}(x, y, z) = f(x, y, z) \qquad \text{in } \Gamma ,$$
$$\bar{f}(x, y, z) = f(x, \sigma_1(x), z) \text{ se } y < \sigma_1(x), \quad \tau_1(x) \leq z \leq \tau_2(x) ,$$
$$\bar{f}(x, y, z) = f(x, \sigma_2(x), z) \text{ se } y > \sigma_2(x), \quad \tau_1(x) \leq z \leq \tau_2(x) ,$$
$$\bar{f}(x, y, z) = f(x, y, \tau_2(x)) \text{ se } z > \tau_2(x) ,$$
$$\bar{f}(x, y, z) = f(x, y, \tau_1(x)) \text{ se } z < \tau_1(x) ,$$

e definiamo mediante uguaglianze analoghe la $\bar{g}(x, y, z)$ a partire da $g(x, y, z)$.

Poniamo inoltre:

$$\varphi_i(x, y, z) = \sigma_i'(x) \qquad (i = 1, 2) ,$$
$$\psi_i(x, y, z) = \tau_i'(x) .$$

Risulta allora per le (12)

$$\begin{aligned} &\varphi_1(x, y, z_1) \leq \bar{f}(x, y, z_2) \leq \varphi_2(x, y, z_3) , \\ &\psi_1(x, y_1, z) \geq \bar{g}(x, y_2, z) \geq \psi_2(x, y_3, z) \end{aligned} \tag{13}$$

ed inoltre $\sigma_i(x)$, $\tau_i(x)$ sono integrali del sistema

$$y' = \varphi_i(x, y, z) ,$$
$$z' = \psi_i(x, y, z) .$$

[8] Nei nn. 10 e 11 di loc. cit. [2] sono dimostrati dei teoremi analoghi in cui si suppone o $\sigma_1(a) = \sigma_2(a) = \alpha$ oppure $\tau_1(b) = \tau_2(b) = \beta$.

Chiamiamo $\bar{\sigma}(x)$, $\bar{\tau}(x)$ una coppia di integrali, certamente esistenti ([9]), del sistema

$$y' = \bar{f}(x, y, z),$$
$$z' = \bar{g}(x, y, z)$$

definiti in I e soddisfacenti alle condizioni

$$\bar{\sigma}(a) = \alpha, \quad \bar{\tau}(b) = \beta .$$

Allora, da $\sigma_1(a) \leq \bar{\sigma}(a)$ e $\tau_1(b) \leq \bar{\tau}(b)$ e dalle (13), per il teorema del n. 2, segue:

$$\sigma_1(x) \leq \bar{\sigma}(x), \quad \tau_1(x) \leq \bar{\tau}(x) \qquad (a \leq x \leq b).$$

Allo stesso modo, dalle (13) e dalle $\bar{\sigma}(a) \leq \sigma_2(a)$, $\bar{\tau}(b) \leq \leq \tau_2(b)$, segue:

$$\bar{\sigma}(x) \leq \sigma_2(x), \quad \bar{\tau}(x) \leq \tau_2(x)$$

e quindi $\bar{\sigma}(x)$ e $\bar{\tau}(x)$ verificano il sistema:

$$y' = f(x, y, z),$$
$$z' = g(x, y, z),$$

c. v. d.

Ricorrendo al risultato del n. 3, si trova un teorema analogo al precedente in cui però la $\tau_1(x) \leq \tau_2(x)$ è sostituita dalla $\tau_1(x) \geq \tau_2(x)$ e quindi Γ è l'insieme $a \leq x \leq b$, $\sigma_1(x) \leq y \leq \sigma_2(x)$, $\tau_2(x) \leq z \leq \tau_1(x)$

([9]) Per una dimostrazione elementare di questa circostanza cfr. A. Minzoni, *Su un problema ai limiti per un sistema di due equazioni differenziali del 1º ordine* [questi Rendiconti, vol. IX (1938), pagg. 142-149] nn. 1-2.

(Pervenuto in Redazione il 18 Ottobre 1941-XIX)