RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

GUIDO ZAPPA

Sui gruppi di Hirsch supersolubili. Nota II

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 12 (1941), p. 62-80

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1941__12__62_0>

SUI GRUPPI DI HIRSCH SUPERSOLUBILI

Nota II di Guido Zappa *a Roma*

Questa Nota si riconnette con la Nota I avente lo stesso titolo e pubblicata in questo stesso volume (1); ci riferiremo pertanto in seguito alle definizioni colà introdotte.

Notiamo inoltre che chiameremo *catena* di un gruppo di Hirsch una successione finita di sottogruppi del gruppo (non necessariamente invarianti), ciascuno dei quali sia contenuto nel precedente. A meno che non si dica esplicitamente il contrario, il primo termine di una catena è il gruppo dato, e l'ultimo termine è l'identità. I concetti di *catena di composizione* e di *catena principale* sono stati introdotti nella Nota I.

Come abbiamo osservato alla fine della Nota I, dopo aver dimostrato che i fattoriali di due catene principali di lunghezza minima sono, a meno dell'ordine, isomorfi, rimaneva aperta la questione se una proprietà analoga valesse anche pei fattoriali di due catene di composizione di lunghezza minima. Nel cap. I della presente Nota, si risponde in modo affermativo a questa domanda.

Inoltre, nella Nota I si è visto che gli elementi d'ordine finito dispari di un gruppo di Hirsch supersolubile formano un sottogruppo caratteristico, avente evidentemente ordine finito. Da ciò segue che il teorema di Sylow sussiste in pieno pei sottogruppi d'ordine potenza di un numero primo dispari di un gruppo di Hirsch supersolubile. Nella presente Nota, nel cap. II, vengono studiati i sottogruppi il cui ordine è una potenza di 2.

(1) Questa Nota sarà indicata nel seguito, per brevità, come Nota I.

E precisamente, si dimostra, mediante esempi, che due sottogruppi di SYLOW relativi al numero primo 2 non sono necessariamente coniugati, e nemmeno necessariamente del medesimo ordine (quindi neanche necessariamente isomorfi) (²). Nel medesimo capitolo vengono esaminate le relazioni tra la distribuzione degli elementi il cui ordine è potenza di 2 nei successivi sottogruppi di una catena principale, e l'ordine massimo dei sottogruppi di SYLOW relativi al numero primo 2.

Il capitolo III infine è dedicato ad estendere ai gruppi di HIRSCH supersolubili una proprietà caratteristica dei gruppi finiti supersolubili, dovuta ad O. ORE (³). Si dimostra precisamente che affinchè un gruppo di HIRSCH sia supersolubile è necessario e sufficiente che ogni sua catena si possa raffinare in modo che, presi due sottogruppi consecutivi, H e K, della catena raffinata, H è esaurito dagli elementi dei laterali del tipo Ka^c, ove a è un elemento conveniente di H non contenuto in K, e x varia da $-\infty$ a $+\infty$, oppure da 1 a p (p primo).

Probabilmente, in analogia a quanto accade nei gruppi finiti, una simile proprietà caratterizza i gruppi di HIRSCH supersolubili non soltanto tra i gruppi di HIRSCH, ma anche tra i gruppi generabili mediante un numero finito di elementi.

Non ci siamo però indugiati ad esaminare la cosa, perchè una simile proprietà meglio andrebbe inquadrata in uno studio, che prima o dopo si dovrà fare, delle proprietà delle catene di sottogruppi di tutti i gruppi generabili mediante un numero finito di elementi, il quale studio generalizzerà quello anzi citato di ORE sopra le catene dei gruppi finiti.

L'interesse della nostra ricerca, oltre che in sè, è riposto

(²) Cfr. la Memoria di A. P. DIETZMANN, A. KUROSCH, A. I. UZKOW, dal titolo *Sylowsche Untergruppen von unendlichen Gruppen*, (Recueil mathématique de Moscou, N. S., T. 3 (1938), pp. 179-184).

In questa Memoria vien dimostrato tra l'altro che, se il numero dei sottogruppi di SYLOW relativi ad un numero primo è infinito, i sottogruppi di SYLOW non sono necessariamente coniugati, nè necessariamente isomorfi. È quanto noi ritroviamo pei gruppi di HIRSCH supersolubili.

(³) O. ORE, *Contributions to the theory of groups of finite order*, Duke Mathematical Journal, 5, pp. 431-460 (1939).

nel fatto che essa potrà illuminare circa le proprietà di tutti gruppi di HIRSCH, e forse anche su quelle dei gruppi generabili mediante un numero finito di elementi.

CAP. I. - Isomorfismo delle catene di composizione di lunghezza minima.

1. - Sia G un gruppo di HIRSCH supersolubile, e sia D il sottogruppo caratteristico costituito da tutti gli elementi di G aventi ordine dispari (cfr. Nota I, n. 6). Dimostreremo, nei prossimi nn. il seguente

TEOREMA I. *Se* Σ *è una catena di composizione di* G, *di lunghezza* k, *è possibile costruire una catena* Σ', *di lunghezza* $k' \leq k$, *tale che fra i suoi termini compaia* D, *che nessuno dei fattoriali formati dai sottogruppi che precedono* D *abbia ordine primo dispari, e che i suoi fattoriali siano, a meno dell'ordine, isomorfi a* k' *dei* k *fattoriali di* Σ.

Dal teorema I segue che i fattoriali di una catena di composizione di lunghezza minima sono, a meno dell'ordine, isomorfi oloedricamente a quelli di una catena di composizione del tipo di Σ' (di una catena, cioè, tale che fra i suoi termini compaia D, e che i fattoriali formati dai sottogruppi che precedono D non siano nessuno di ordine primo dispari). Prese poi due catene di composizione del tipo di Σ' di lunghezza minima, costruite a partire da due qualunque catene di composizione di lunghezza minima, Σ_1 e Σ_2, si ha che i fattoriali di ordine primo dispari di Σ_1' e Σ_2' non sono altro che i fattoriali di due diverse catene di composizione del gruppo finito D, e quindi, a meno dell'ordine, isomorfi oloedricamente; i fattoriali d'ordine infinito di Σ_1' e Σ_2', in base ad un teorema di HIRSCH (indicato nella prefazione della Nota I come Teorema V) sono nello stesso numero, e quindi, a meno dell'ordine, oloedricamente isomorfi; i rimanenti fattoriali sono nello stesso numero in Σ_1' e Σ_2', perchè queste due catene hanno egual lunghezza, ed, essendo tutti di ordine 2, sono, a meno dell'ordine, oloedricamente isomorfi. Si deduce allora il seguente

TEOREMA II. *I fattoriali di due diverse catene di composizione di lunghezza minima di un gruppo di* HIRSCH *supersolubile sono, a meno dell'ordine, oloedricamente isomorfi.*

2. - Per poter dimostrare il Teorema I, occorre prima provare il seguente

LEMMA. *Sia G un gruppo di* HIRSCH *supersolubile, H un sottogruppo invariante di G, L un sottogruppo invariante di H. Sia poi G/H ciclico d'ordine primo dispari, G/L ciclico d'ordine 2 o ciclico infinito. Allora L è invariante in G.*

Sia R il massimo sottogruppo invariante di G contenuto in L. Bisogna dimostrare che R coincide con L. Procederemo per assurdo, supponendo che R sia un sottogruppo proprio di L.

Si noti anzitutto che L/R non può contenere alcun sottogruppo invariante Q/R di G/R, altrimenti Q conterrebbe R, sarebbe contenuto in L, e sarebbe invariante in G, contro la definizione di R. D'altra parte G/R, essendo, al pari di G, supersolubile (cfr. Nota I, n. 1), dovrà avere un sottogruppo invariante Q/R contenuto in H/R, ciclico.

Distinguiamo ora due casi:

a) Abbia H/L ordine 2. Il sottogruppo R dovrà contenere l'intersezione dei p sottogruppi coniugati ad L in G, aventi tutti indice 2 in H, e invarianti in esso; onde la loro intersezione avrà indice 2^p in H, ed R avrà in H indice 2^m, con $m \leq p$. Allora L/R avrà indice 2 in H/R; Q/R dovrà avere ordine 2, e non essendo contenuto in L/R, avrà a comune con esso la sola identità.

Dovrà inoltre esistere un sottogruppo del 4° ordine S/R contenuto in H/R, contenente Q/R, invariante in G/R; e ciò perchè G/R è supersolubile. Esso dovrà avere in comune con L/R un sottogruppo T/R, d'ordine 2, il quale per quanto si è visto poco fà non può essere invariante in G/R.

Detto g un elemento di G/R non appartenente ad H/R, si ha allora che $g, g^2, \ldots, g^p$ trasformano S/R in sè, Q/R in sè, e T/R in p sottogruppi d'ordine 2 di S/R, distinti tra loro e da Q/R. Ma ciò è assurdo, perchè S/R, avendo ordine 4, ha due soli sottogruppi, oltre Q/R, d'ordine 2, mentre p è

un numero primo dispari. Pertanto, nel caso che H/L abbia ordine 2, il lemma è dimostrato.

b) Abbia invece H/L ordine infinito. In questo caso Q/R dovrà essere ciclico infinito, perchè tra i suoi elementi ve ne sono di quelli contenuti in H/R, ma non in L/R, i quali hanno certamente ordine infinito, perchè ad essi corrispondono in H/L, nell'isomorfismo meriedrico tra H/R ed H/L, elementi d'ordine infinito.

Dovrà inoltre esistere un sottogruppo S/R, contenuto in H/R, contenente Q/R, invariante in G/R, e tale che S/Q sia ciclico d'ordine primo o ciclico infinito; e ciò perchè G/R è supersolubile. Il sottogruppo S/R avrà a comune con L/R un sottogruppo T/R, il quale non potrà essere invariante in G/R, ed inoltre, essendo isomorfo a S/Q, dovrà esser ciclico.

Sia ora a un elemento generatore di Q/R, e b un elemento generatore di T/R. Essendo Q/R invariante in S/R, sarà $b^{-1}ab = a$, oppure $b^{-1}ab = a^{-1}$.

Supponiamo, in primo luogo, $b^{-1}ab = a$. Preso un elemento g di G/R, non contenuto in H/R, dovrà necessariamente aversi $g^{-1}ag = a^{\pm 1}$, cioè $g^{-2}ag^2 = a$, e $g^{-2}bg^2 = b^x a^y$, con $y \neq 0$, altrimenti T/R sarebbe mutato in sè da g^2 (che non sta in H/R), ed essendo già invariante in H/R, lo sarebbe in G/R, il che non è. Ma da $g^{-2}bg^2 = b^x a^y$ segue, essendo $b^{-1}ab = a$ e $g^{-2}ag^2 = a$, anche $y^{-2p}bg^{2p} = b^{x^p} a^{y\frac{x^p-1}{x-1}}$, elemento che non è in T/R, perchè $y \neq 0$, $\dfrac{x^p-1}{x-1} = x^{p-1} + x^{p-2} + \ldots$ $\ldots + x + 1$, essendo p dispari, non è mai zero, per x intero non nullo, e a è d'ordine infinito. E ciò è assurdo, perchè g^{2p}, essendo in H/R, dovrebbe trasformare T/R in sè.

Sia invece $b^{-1}ab = a^{-1}$. Ciò è possibile solo se b ha ordine 2 o ordine infinito. Infatti, se b ha ordine primo dispari q, $b^q = 1$, e quindi $b^{-q}ab^q = a$, mentre da $b^{-1}ab = a^{-1}$ segue $b^{-q}ab^q = a^{-1}$.

Se b ha ordine infinito, b^2 trasforma a in sè, senza giacere in Q/R (perchè se b^2 fosse in Q/R, sarebbe $b^2 = a^t$, da cui $b^{-1}a^t b = a^t$, mentre è $b^{-1}a^t b = a^{-t}$). Pertanto, sostituendo ad S/R il sottogruppo generato da a e da b^2, si ricade nel caso precedente.

Se infine $b^2 = 1$, e $b^{-1} a b = a^{-1}$, dovrà essere $g^{-2} a g^2 = a$ e $g^{-2} b g^2 = b a^y$, con $y \neq 0$. Ma allora è $g^{-4} b g^4 = b a^{2y}, \ldots,$ $g^{-2p} b g^{2p} = b a^{py}$. Quindi $g^{-2p} b g^{2p}$ non è in T/R, da cui, ragionando come sopra, si giunge all'assurdo.

Pertanto il lemma resta dimostrato in ogni caso.

3. – *Dimostrazione del Teorema I.* Procederemo per induzione, ammettendo che il teorema valga per le catene di composizione di lunghezza minore di k, di qualsiasi gruppo. Ciò è legittimo, perchè per le catene di lunghezza 1 il teorema è banale.

Sia ora data la catena di composizione Σ, di lungezza k,

$$G = M_0, \ M_1, \ldots, \ M_k = 1 .$$

Considerata la catena $M_1, \ M_2, \ldots, \ M_k = 1$, di M_1, di lunghezza $k-1$, ed applicato ad essa il teorema (che per essa vale a causa dell'ipotesi a base del processo di induzione), potremo costruire una catena $M_1, \ \overline{M}_2, \ldots, \ \overline{D} = \overline{M}_l, \ldots, \ \overline{M}_{\bar{k}} = 1$, di lunghezza $\bar{k} - 1 \leq k - 1$, i cui fattoriali siano olóedricamente isomorfi a $\bar{k} - 1$ dei $k - 1$ fattoriali della catena $M_1, \ M_2, \ldots$ $\ldots, \ M_k = 1$, tale inoltre che contenga tra i suoi termini il sottogruppo $\overline{D}$ costituito dagli elementi di M_1 di ordine dispari, e che i fattoriali $M_1 / \overline{M}_2, \ \overline{M}_2 / \overline{M}_3, \ldots, \ \overline{M}_{l-1} / \overline{M}_l$ siano tutti ciclici infiniti.

Allora la catena $\overline{\Sigma}$

$$G = M_0, \ M_1, \ \overline{M}_2, \ldots, \ \overline{M}_{\bar{k}} = 1$$

è una catena che soddisfa alle condizioni volute per Σ', quando M_0 / M_1 non ha ordine dispari. Infatti in tale caso $\overline{D}$ coincide con D, e i fattoriali $M_0 / M_1, \ M_1 / M_2, \ldots, \ \overline{M}_{l-1} / \overline{M}_l$ sono tutti ciclici d'ordine 2 o ciclici infiniti.

Supponiamo invece che M_0 / M_1 abbia ordine primo dispari p. Se anche $M_1 / \overline{M}_2$ ha ordine dispari, vuol dire che $\overline{D}$ coincide con M_1, e allora G viene ad avere ordine finito dispari, e

il teorema è banale. Abbia pertanto $M_1/\overline{M}_2$ ordine 2 o ordine infinito.

Allora, per il lemma dimostrato al n. 2, $\overline{M}_2$ è invariante in G. Consideriamo il gruppo fattoriale $G/\overline{M}_2$. Se questo non ha elementi d'ordine dispari, $\overline{D}$ coincide con D, e la catena di composizione

$$G,\ \overline{M}_2, \overline{M}_3, \ldots,\ \overline{M}_t, \ldots,\ \overline{M}_{\bar{k}} = 1$$

di lunghezza $\bar{k} - 1$, gode delle proprietà volute per la catena Σ', risultando $G/\overline{M}_2$ isomorfo a $\overline{M}_1/\overline{M}_2$, perchè ambedue ciclici infiniti (Nota I, n. 4). Se invece G/M_2 ha elementi d'ordine dispari (necessariamente eguale a p) questi formano un sottogruppo invariante $N_1/\overline{M}_2$, d'ordine p, (Nota I, n. 4) e il fattoriale G/N_1 viene ad avere ordine 2, se tale è l'ordine di $M_1/\overline{M}_2$, ordine infinito, se anche $M_1/\overline{M}_2$ ha ordine infinito. Allora consideriamo la catena di composizione $\overline{\Sigma}$

$$G,\ N_1,\ \overline{M}_2, \ldots,\ \overline{M}_k = 1\,.$$

Tenendo presente che la catena $N_1, \overline{M}_2, \ldots, \overline{M}_{\bar{k}}$ ha dimensione $\bar{k} - 1 < k$, potremo costruire una catena $N_1, N_2, \ldots, N_j \equiv D, N_{j+1}, \ldots, N_{k'} = 1$, tale che tra i suoi termini compaia il sottogruppo costituito dagli elementi d'ordine dispari di N_1 (che coincide con D, perchè ogni elemento d'ordine dispari di G è in N_1), di lunghezza $k' - 1 \leq \bar{k} - 1$, tale che i suoi fattoriali siano oloedricamente isomorfi a $k' - 1$ dei $\bar{k} - 1$ fattoriali della catena $N_1, \overline{M}_2, \ldots, \overline{M}_k$, e che i fattoriali N_1/N_2, $N_2/N_3, \ldots, N_{j-1}/N_j$ siano tutti ciclici infiniti, o ciclici del 2° ordine.

Allora la catena di composizione

$$G = N_0,\ N_1, \ldots,\ N_j = D,\ N_{j+1}, \ldots,\ N_{k'} = 1$$

è la catena Σ' voluta dal teorema, che risulta pertanto dimostrato.

Cap. II. - Sottogruppi di Sylow d'ordine 2^m di un gruppo di Hirsch supersolubile.

4. - Diciamo sottogruppo di Sylow, relativo ad un dato numero primo p, di un gruppo G, un sottogruppo in cui ogni elemento ha per ordine una potenza di p, e che non sia contenuto in un sottogruppo più ampio che goda della stessa proprietà.

A. Kurosch ha dimostrato [4] che se si esegue il prodotto libero di due p-gruppi P_1 e P_2, si ottiene un gruppo G pel quale P_1 e P_2 sono sottogruppi di Sylow relativi al numero primo p, e da ciò ha dedotto che in un gruppo infinito in generale i sottogruppi di Sylow relativi ad un dato numero primo non solo non sono coniugati, ma nemmeno isomorfi.

Se in particolare P_1 e P_2 sono due gruppi del secondo ordine, generati rispettivamente da x_1 e x_2, G è costituito dagli elementi della forma $(x_1 x_2)^\alpha$ e da quelli della forma $x_1 (x_1 x_2)^\alpha$, con α intero positivo, nullo o negativo.

L'elemento $x_1 x_2$ genera un sottogruppo ciclico infinito, che si vede essere invariante in G, avendosi $x_1^{-1} (x_1 x_2) x_1 = x_2 x_1 = (x_1 x_2)^{-1}$; $x_2^{-1} (x_1 x_2) x_2 = x_2 x_1 = (x_1 x_2)^{-1}$, ed avere indice 2 in G. Posto $x_1 x_2 = a$, $x_1 = b$, G viene ad essere il gruppo generato da a e b, i quali son legati dalle relazioni $b^2 = 1$, $b^{-1} a b = a^{-1}$. In particolare l'elemento x_2 è dato da ba.

Determiniamo i sottogruppi di Sylow, relativi al numero 2, di G. Detto A il sottogruppo invariante generato da a, si ha che A non contiene alcun elemento del secondo ordine, e pertanto ogni sottogruppo di Sylow, relativo al numero 2, di G, è non solo isomorfo, ma oloedricamente isomorfo, a G/A, e quindi ha ordine 2. Orbene, gli elementi del secondo ordine di G sono tutti e soli quelli del tipo $b a^x$, con x intero relativo, e ciascuno di questi elementi genera un sottogruppo di Sylow.

Si ha inoltre $(b a^y)^{-1} b (b a^y) = a^{-y} b a^y = b \cdot b^{-1} a^{-y} b \cdot a^y = b a^{2y}$; quindi b è coniugato agli elementi del tipo $b a^x$ con x pari, e non è coniugato a quelli con x dispari. Si deduce pertanto:

[4] Op. cit. in [1].

Nel gruppo G, generato dagli elementi a, e b, legati dalle relazioni

$$b^2 = 1, \quad b^{-1} a b = a^{-1}$$

i sottogruppi di Sylow, *tutti d'ordine* 2, *si distribuiscono in due sistemi di sottogruppi coniugati, uno dei quali è costituito dai sottogruppi generati dagli elementi della forma $b a^{2h}$ (h intero relativo) mentre l'altro è costituito dagli elementi della forma $b a^{2h+1}$ (h intero relativo).*

5. - Diamo ora un esempio di un gruppo di Hisrch supersolubile, in cui i sottogruppi di Sylow sono non solo non coniugati, ma nemmeno del medesimo ordine (quindi non isomorfi).

Si parta dal gruppo G, di cui al n. precedente, generato da due elementi a e b legati dalle relazioni $b^2 = 1$, $b^{-1} a b = a^{-1}$. Evidentemente G ammette un automorfismo, d'ordine infinito, che muta a in sè e b in ba. In base alla teoria dell'ampliamento dei gruppi ([5]) si può affermare che esiste un gruppo G_1, generato dagli elementi a, b, c, legati dalle relazioni

$$b^2 = 1, \; b^{-1} a b = a^{-1}, \; c^{-1} a c = a, \; c^{-1} b c = ba.$$

Ora consideriamo l'automorfismo del gruppo libero generato da a, b, c, che muta a e b in sè, e c in $c^{-1}a$. Si vede subito che questo automorfismo muta in sè il sistema delle relazioni che definiscono G_1, e pertanto dà luogo ad un automorfismo di G_1, del secondo ordine. Sempre in base alla teoria dell'ampliamento, si può allora affermare che esiste un gruppo G_2 generato dagli elementi a, b, c, d legati dalle relazioni

$$b^2 = 1, \; d^2 = 1, \; b^{-1} a b = a^{-1}, \; c^{-1} a c = a, \; c^{-1} b c = ba, \; d^{-1} a d = a,$$
$$d^{-1} b d = b, \; d^{-1} c d = c^{-1} a.$$

([5]) O. Schreier, *Über die Erweiterung von Gruppen*, Teil I: Monatshefte für Math. und Phys., 34 (1926), pp. 165-180.

Cfr. Zassenhauss, *Lehrbuch der Gruppentheorie*, Leipzig, 1937, pp. 93-95.

Il gruppo G_2 ha una catena principale costituita dai sottogruppi G_1 (generato da a, b, c); G (generato da a, b); A (generato da a), e quindi è supersolubile. Poichè dei quattro fattoriali di questa catena, due (cioè G_2/G_1 e G/A) hanno ordine 2, mentre gli altri due hanno ordine infinito, e poichè in un gruppo ciclico infinito non vi sono elementi del secondo ordine, segue che un sottogruppo di SYLOW di G_2 deve avere tutti i suoi elementi non identici tra gli elementi di G_2 non contenuti in G_1, o tra gli elementi di G non contenuti in A. Si deduce allora facilmente che il suo ordine non supera 4.

Un semplice calcolo mostra che tutti e soli gli elementi di G_2 del secondo ordine sono quelli dei seguenti tipi: ba^t, $dc^{-2t}a^t$, $dc^y ba^t$ (con t ed y interi relativi). Non vi sono elementi del quarto ordine.

Un sottogruppo del quarto ordine di G_2 deve avere qualche elemento non identico a comune con G, quindi deve contenere qualche elemento del tipo ba^t, il quale sarà in esso invariante, perchè i gruppi del quarto ordine sono tutti abeliani. Viceversa, un elemento del secondo ordine permutabile con un elemento del tipo ba^t genera insieme ad esso un sottogruppo del quarto ordine. Pertanto gli elementi non identici di G_2 che appartengono a qualche sottogruppo del quarto ordine sono tutti e soli gli elementi del secondo ordine permutabili con qualche elemento del tipo ba^t. Ora, un facile computo prova che ogni elemento del tipo $dc^{-2u}a^u$ è permutabile con ogni elemento del tipo ba^t; e che ogni elemento del tipo $dc^y ba^t$ è permutabile, quando y è pari, coll'elemento $ba^{t-\frac{1}{2}y}$, mentre quando y è dispari non è permutabile con nessun elemento del tipo ba^u.

Pertanto gli elementi del tipo $dc^{-2u}a^u$, del pari che quelli del tipo $dc^{2u}ba^t$, appartengono ciascuno a qualche sottogruppo di SYLOW del 4° ordine, mentre gli elementi del tipo $dc^{2u+1}ba^t$ generano ciascuno un sottogruppo di SYLOW del 2° ordine.

6. – Si potrebbe pensare che, se N_i/N_{i+1} è un fattoriale d'ordine 2 di una catena principale di lunghezza minima, e P è un sottogruppo di SYLOW d'ordine massimo, relativo al numero primo 2, di un gruppo di HIRSCH supersolubile, esistano neces-

sariamente elementi di P contenuti in N_i, fuori di N_{i+1}. In tal caso, detto s il numero dei fattoriali d' ordine 2 di una catena principale di lunghezza minima, si avrebbe che l' ordine massimo dei sottogruppi di SYLOW relativi al numero primo 2 (massimo effettivamente raggiunto) sarebbe 2^s.

Un semplice esempio ci mostrerà che questa previsione è errata.

Si consideri il gruppo G generato dagli elementi a, b, c, legati dalle relazioni

$$(1) \qquad b^{-1}cb = ca^4, \quad a^{-1}ba = b^{-1}, \quad a^{-1}ca = c^{-1}.$$

Per vedere che un simile gruppo esiste effettivamente, si parta dal gruppo abeliano G_2 generato da a^2 e c. Esso ammette un automorfismo, d' ordine infinito, che muta a^2 in sè, e c in ca^4, e pertanto, secondo la teoria dell' ampliamento, esiste il gruppo G_1 generato da a^2, c, b. Questo inoltre ammette un automorfismo del secondo ordine che muta a^2 in sè, c in c^{-1}, b in b^{-1}, perchè di conseguenza le relazioni che legano a^2, c, b vengono mutate, da una tale sostituzione su a^2, c, b, in relazioni ad esse equivalenti. E allora, sempre in base alla teoria dell' ampliamento, si può esser certi che il gruppo G esiste.

Osserviamo anzitutto che, detto G_3 il sottogruppo generato da a^2, una catena principale di G è costituita dai sottogruppi G, G_1, G_2, G_3, 1, ove G/G_1 è ciclico del second' ordine, mentre gli altri fattoriali sono ciclici infiniti. Pertanto G è un gruppo di HIRSCH supersolubile.

Per mostrare che la nostra previsione è infondata, basterà far vedere che

α) G non ha elementi del 2° ordine (quindi non ha elementi il cui ordine sia potenza di 2).

β) La catena principale G, G_1, G_2, G_3, 1 è di lunghezza minima.

La α) è subito provata. Ed infatti, G_1 non può contenere elementi del secondo ordine, perchè una sua catena principale, G_1, G_2, G_3, 1 non ha fattoriali finiti (6). Un eventuale elemento

(6) Se infatti h è, ad es., un elemento di G_1 non contenuto in G_2, ad esso corrisponde in G_1/G_2 per isomorfismo meriedrico un elemento d' ordine infinito. Onde anche h ha ordine infinito.

del secondo ordine di G sarebbe pertanto fuori di G_1, e allora esso può mettersi sotto la forma $a^x b^y c^z$ con x dispari.

Se ora fosse $(a^x b^y c^z)^2 = 1$, sarebbe, posto $x = 2h + 1$, e tenuto conto del fatto che a^2 è nel centrale di G, $a^{4h} \cdot a b^y c^z \cdot \cdot a b^y c^z = 1$, da cui, tenuto conto delle ultime due delle (1), $a^{4h+2} \cdot b^{-y} c^{-z} b^y c^z = 1$, e, tenendo conto della prima delle (1), $a^{4h+2} \cdot a^{-4yz} = 1$, $a^{2(2h-2yz+1)} = 1$, il che è assurdo, perchè a ha ordine infinito, e $2h - 2yz + 1$, essendo dispari, non può mai esser zero.

Passiamo ora a provare la β). Se esistesse una catena principale Σ' di lunghezza minore di quella della catena G, G_1, G_2, G_3, 1 (che diremo Σ), Σ' sarebbe costituita da tre sottogruppi G, Γ_1, Γ_2, 1, e i suoi fattoriali sarebbero tutti ciclici infiniti; e ciò in base al teorema di Hirsch indicato nella prefazione alla Nota I come Teorema V.

Mostriamo anzitutto che Γ_2 deve coincidere con G_3 o con un suo sottogruppo.

Sia l un generatore di Γ_2. Poichè Γ_2 è invariante in G, l deve essere trasformato da ciascuno degli elementi a, b, c in sè o nel suo inverso. Sia $l = a^x b^y c^z$. Avremo allora $a^{-1} \cdot a^x b^y c^z \cdot a = = a^x b^{-y} c^{-z}$. Ora, se è $a^{-1} l a = l$, deve essere $y = z = 0$, cioè $l = a^x$, vale a dire Γ_2 è generato da una potenza di a. Se invece è $a^{-1} l a = l^{-1}$ deve essere $a^x b^{-y} c^{-z} = c^{-z} b^{-y} a^{-x}$, ossia, in base alle (1), $a^x b^{-y} c^{-z} = a^{4yz} b^{-y} c^{-z} a^{-x}$, $a^x b^{-y} c^{-z} = a^{4yz-x} b^{-(-1)^x y} c^{-(-1)^x z}$, cioè $x = 4yz - x$, onde $x = 2yz$. Viceversa, si controlla subito che, se $x = 2yz$ è $a^{-1} l a = l^{-1}$. Pertanto il generatore di Γ_2, da noi cercato, se non è del tipo a^x, è del tipo $a^{2yz} b^y c^z$.

Calcoliamo ora $b^{-1} l b$. Se $l = a^x$, affinchè sia $b^{-1} l b = l$, deve essere x pari, onde l è in G_3, come s'era affermato; mentre $b^{-1} l b = l^{-1}$ non può mai presentarsi. Se poi è $l = a^{2yz} b^y c^z$, si ha $b^{-1} a^{2yz} b^y c^z b = a^{2yz} b^{y-1} c^z b = a^{2yz+4z} b^y c^z$, il che è possibile solo se $z = 0$ e $l = b^y$, se è $b^{-1} l b = l$, mentre non è mai possibile se è $b^{-1} l b = l^{-1}$, perchè in tal caso sarebbe $c^{-z} b^{-y} a^{-2yz} = = a^{2yz+4z} b^y c^z$, ossia $c^{-z} b^{-y} a^{-2yz} = c^z b^y a^{4z-2yz}$, e di conseguenza $y = z = 0$, $l = 1$.

Pertanto, o è $l = a^{2t}$, oppure è $l = b^y$. Ma deve ancora essere $c^{-1} l c = l$, oppure $c^{-1} l c = l^{-1}$. Ora, ciò non può avvenire se $l = b^y$, e perciò deve essere $l = a^{2t}$, cioè Γ_2 è contenuto in G_3.

Possiamo supporre, senza ledere la generalità, che Γ_2 coincida con G_3, poichè, in caso contrario, la catena G, Δ_1, Δ_2, G_3, 1, ove $\Delta_i (i = 1, 2)$ è il congiungente di $\Gamma_i (i = 1, 2)$ con G_3, sarebbe dello stesso tipo della Σ'.

Il quadrato di a è in G_3; e pertanto, nell'isomorfismo meriedrico tra G e G/G_3, ad a corrisponde un elemento $\bar{a}$ del secondo ordine. Onde in Σ' vi deve essere un fattoriale d'ordine 2, contro la sua costituzione. Quindi Σ' non esiste, e Σ è una catena principale di lunghezza minima. Anche la β) è pertanto completamente dimostrata.

Cap. III. - **Una proprietà caratteristica delle catene di un gruppo di Hirsch supersolubile.**

7. – O. Ore ha dimostrato recentemente, tra altre proprietà delle catene dei gruppi finiti, che condizione necessaria e sufficiente affinchè un gruppo finito sia supersolubile, è che ogni sua catena si possa raffinare in modo da ottenere una catena in cui ogni sottogruppo abbia indice primo in quello che lo precede (7).

Daremo qui un'estensione di questo teorema ai gruppi di Hirsch supersolubili, limitandoci però a caratterizzare questi gruppi entro la classe dei gruppi di Hirsch, poichè una loro caratterizzazione tra tutti i gruppi troverebbe posto adeguato solo in uno studio generale delle catene dei gruppi non finiti, che per ora manca.

Introduciamo intanto, per comodità di linguaggio, la seguente definizione:

Se H è un sottogruppo di un gruppo G, si dirà che l'indice di H in G è ∞^1, se esiste un elemento a, non contenuto in H, tale che i laterali del tipo Ha^x (x intero relativo) son tutti distinti ed esauriscono G.

Notiamo inoltre che una catena Σ di sottogruppi si dirà ottenuta *raffinando* un'altra catena Σ', quando ogni sottogruppo che compare in Σ', compare anche in Σ.

(7) Op. cit. in (3).

Dimostriamo ora il seguente

TEOREMA III. *Condizione necessaria e sufficiente, affinchè un gruppo G di* HIRSCH *sia supersolubile, è che da ogni sua catena Σ' si possa ottenere, mediante raffinamento, una catena Σ in cui ogni sottogruppo abbia indice primo o indice ∞^1 in quello che lo precede.*

Mostriamo anzitutto che *la condizione è necessaria.*

Sia G un gruppo di HIRSCH supersolubile, e sia

$$G = N_0,\ N_1, \ldots,\ N_s = 1$$

una sua catena principale Ω. Sia poi

$$G = M_0,\ M_1, \ldots,\ M_t = 1$$

una catena qualunque Σ' di G. Vogliamo mostrare che si può raffinare la Σ' in modo da ottenere una catena Σ, in cui ogni sottogruppo sia di indice primo o di indice ∞^1 in quello che lo precede.

Siano M_{i-1}, M_i due sottogruppi consecutivi di Σ'. Consideriamo l'intersezione $\overline{K}_{i,j}$ di M_{i-1} col sottogruppo N_j della catena principale Ω. Evidentemente è $\overline{K}_{i,0} = M_{i-1}$, $\overline{K}_{i,s} = 1$, e $\overline{K}_{i,j+1}$ è invariante in $\overline{K}_{i,j}$. Inoltre, poichè N_j / N_{j+1} è isomorfo, oloedricamente o meriedricamente, a $\overline{K}_{i,j} / \overline{K}_{i,j+1}$, si ha che quest'ultimo è ciclico d'ordine finito (non necessariamente primo) o infinito. Inserendo opportuni sottogruppi tra $\overline{K}_{i,j}$ e $\overline{K}_{i,j+1}$, nel caso che $\overline{K}_{i,j} / \overline{K}_{i,j+1}$ sia ciclico d'ordine finito non primo, si otterrà una catena principale $K_{i,0}$, $K_{i,1}, \ldots, K_{i,r_i}$ di M_{i-1}.

Sia ora $\overline{H}_{i,j}$ il congiungente M_i con $K_{i,j}$. Allora, è $\overline{H}_{i,0} = M_{i-1}$, e $\overline{H}_{i,r_i} = M_i$. Essendo inoltre $K_{i,j-1}$ invariante in M_{i-1}, ogni elemento di $\overline{H}_{i,j-1}$ può porsi sotto la forma $m_i \cdot k_{ij} \cdot a^x$, ove m_i è un elemento di M_i convenientemente scelto, k_{ij} è un elemento di $K_{i,j}$ convenientemente scelto, e a è un qualunque elemento appartenente al laterale generatore di $K_{i,j-1} / K_{i,j}$ (che quindi può scegliersi il medesimo per tutti gli elementi di $\overline{H}_{i,j-1}$).

Per analoga ragione, ogni elemento di $\overline{H}_{i,j}$ può porsi sotto la forma $m_i \cdot k_{ij}$, e pertanto i laterali di $\overline{H}_{i,j}$ in $\overline{H}_{i,j-1}$ sono del tipo $\overline{H}_{i,j} \cdot a^x$, con a elemento fisso, non contenuto in $\overline{H}_{i,j}$. Segue che l'indice di $\overline{H}_{i,j}$ in $\overline{H}_{i,j-1}$ o è ∞^1, o è finito.

Nel caso che detto indice ν sia finito, ma non primo, i laterali del tipo $\overline{H}_{i,j} a^{px}$, ove p è un divisore primo di ν, sono costituiti da tutti e soli gli elementi di un sottogruppo d'indice p di $\overline{H}_{i,j-1}$, perchè se m_i, $\overline{m}_i$ sono elementi di M_i, $k_{i,j}$, $\overline{k}_{i,j}$ elementi di $K_{i,j}$, si ha $m_i k_{i,j} a^{px} \cdot \overline{m}_i \overline{k}_{i,j} a^{py} = m_i \overline{m}_i \overline{\overline{k}}_{i,j} a^{pz}$, ove $\overline{\overline{k}}_{i,j}$ è un elemento conveniente di $K_{i,j}$, come si vede osservando che gli elementi del tipo $k_{ij} a^{px}$, per k_{ij} qualunque in K_{ij} e x intero qualunque formano un sottogruppo caratteristico di $K_{i,j-1}$ e quindi invariante in M_{i-1}. Si comprende allora come si possa inserire tra $\overline{H}_{i,j-1}$ e $\overline{H}_{i,j}$, nell'ipotesi che l'ordine di $\overline{H}_{i,j-1} / \overline{H}_{i,j}$ sia un numero finito composto, una catena di sottogruppi ciascuno dei quali abbia nel precedente indice primo.

Ripetendo il procedimento per ogni valore di j, si viene ad ottenere una catena $M_{i-1}, H_{i,1}, H_{i,2}, \ldots, H_{i,n_i} = M_i$, in cui ciascun sottogruppo abbia nel precedente indice primo o ∞^1. Allora la catena

$$G = H_1,\ H_{1,1}, \ldots,\ H_{1,n_1},\ H_{2,1}, \ldots,\ H_{2,n_2},\ H_{3,1}, \ldots$$
$$\ldots,\ H_{3,n_3}, \ldots,\ H_{t,1}, \ldots,\ H_{t,n_t} = 1$$

è tale che ogni sottogruppo ha nel precedente indice primo o ∞^1. La necessità della condizione di cui nell'enunciato è pertanto dimostrata.

8. - Passiamo ora a dimostrare la sufficienza della condizione di cui all'enunciato del Teorema III.

Sia pertanto G un gruppo di HIRSCH, tale che ogni sua catena si possa raffinare in modo da ottenere altra catena in cui ciascun sottogruppo abbia nel precedente indice primo o indice ∞^1.

Sia

$$G = M_0,\ M_1, \ldots,\ M_k = 1$$

una catena principale di G. Dimostreremo il teorema per induzione, ammettendolo vero pei gruppi di HIRSCH con catene principali di lunghezza minore di k, e in particolare per ciascuno dei sottogruppi $M_i (i = 1, \ldots. k)$. A causa di ciò, essendo M_{k-1} invariante in M_1, dovrà esistere un sottogruppo Z di M_{k-1}, ciclico d'ordine primo o ciclico infinito, invariante in M_1. Il sottogruppo Z è coniugato in G ad un certo numero, finito od infinito, di sottogruppi $Z_1 = Z, Z_2, \ldots, Z_i, \ldots$, ciascuno dei quali è invariante in M_1, e che insieme generano M_{k-1}, il quale è un gruppo abeliano libero, o un gruppo abeliano d'ordine p^s (p primo) e tipo $(1, 1, \ldots, 1)$.

a) Notiamo ora che, *se a è un qualunque elemento di G, a deve essere permutabile con almeno un sottogruppo ciclico (non identico) di M_{k-1}.*

Se una potenza non identica a^x di a è in M_{k-1}, a^x genera un sottogruppo ciclico di M_{k-1}, permutabile con a.

Se invece a^x non è mai in M_{k-1} quando $a^x \neq 1$, si consideri il gruppo T che congiunge a con M_{k-1}. Detto A il sottogruppo generato da a, si ha che ogni sottogruppo di T più ampio di A ha a comune con M_{k-1} un sottogruppo non identico, perchè è $T = A \cdot M_{k-1}$.

D'altra parte, la catena G, T, A, 1 deve potersi raffinare in modo, che ogni sottogruppo abbia nel precedente indice primo o indice ∞^1. Sia B il sottogruppo che precede A nella catena così raffinata, e sia C l'intersezione di B con M_{k-1}. Evidentemente, C è invariante in B, e si ha $B = A \cdot C$. Se l'indice di A in B è un numero primo p, si ha che anche l'ordine di C è uguale a p, onde C è un sottogruppo ciclico di M_{k-1}, permutabile con a. Se poi A ha indice ∞^1 in B, vuol dire che B ha dimensione superiore di una unità a quella di A, onde C ha dimensione 1, ed essendo un sottogruppo di M_{k-1} che in tal caso è un gruppo abeliano libero, C è un gruppo ciclico infinito, permutabile con a. La proposizione *a*) è pertanto dimostrata.

b) Supponiamo ora che M_{k-1} sia abeliano libero. Vogliamo dimostrare che *in* M_{k-1} *c'è un sottogruppo ciclico invariante in* G, dal che seguirà che esso coincide con M_{k-1}, per definizione di catena principale.

M_{k-1} è generato da un numero finito di sottogruppi $Z_1 \equiv Z$, $Z_2, \ldots, Z_l$, invarianti in M_1, ciclici infiniti. Il centralizzante L_i di $Z_i (i = 1, \ldots, l)$ in M_1, coincide con M_1 o ha in esso indice 2, perchè M_1 / L_i deve essere oloedricamente isomorfo ad un sottogruppo del gruppo d'automorfismi di Z_i, e detto gruppo d'automorfismi ha ordine 2. L'intersezione L dei gruppi $L_1, L_2, \ldots, L_l$ ha in M_1 indice $2^j (j \leq l)$, è invariante in G, e coincide col centralizzante di M_{k-1} in M_1.

Sia ora a un elemento appartenente ad un laterale generatore di G / M_1. Per la proposizione *a*), l'elemento a deve esser permutabile con un sottogruppo ciclico C di M_{k-1}. D'altra parte C è invariante anche in L, e pertanto è invariante nel sottogruppo S che congiunge a con L, il quale interseca M_1 in L, e pertanto, come si vede facilmente, ha indice 2^j in G.

Per ipotesi, si devono potere introdurre tra G e S dei sottogruppi, $G_0 = G, G_1, G_2, \ldots, G_r = S$, ciascun dei quali abbia nel precedente indice 2. Esiste un sottogruppo ciclico di M_{k-1}, ed è C, invariante in G_r. Mostreremo ora che se $G_i (0 < i \leq r)$ ha un sottogruppo invariante P ciclico contenuto in M_{k-1}, G_{i-1} gode della medesima proprietà. Dopo di ciò la *b*) risulterà dimostrata.

Senza dubbio, G_i è invariante in G_{i-1}, avendo indice 2 in esso. Se P è invariante, oltre che in G_{i-1}, anche in G_i, quanto noi vogliamo resta dimostrato. Supponiamo che invece P sia trasformato, da un elemento g di G_{i-1} non contenuto in G_i, in un altro sottogruppo $\overline{P}$. Evidentemente, $g^{-2} P g^2 = P$, perchè g^2 è in G_i; ma $g^{-2} P g^2 = g^{-1} \overline{P} g$, quindi g trasforma $\overline{P}$ in P. Inoltre $\overline{P}$ è, al pari di P, invariante in G_i, e il congiungente H di P e $\overline{P}$ è invariante addirittura in G_{i-1}.

Sia π un elemento generatore di P, e $\overline{\pi}$ il trasformato di π mediante g. Essendo P e $\overline{P}$ invarianti in G_i, ogni elemento di G_i trasforma π in sè o in π^{-1}, e $\overline{\pi}$ in sè o in $\overline{\pi}^{-1}$. Se ora ogni elemento di G_i che trasforma π in sè, trasforma $\overline{\pi}$ in sè,

e ogni elemento che trasforma π in π^{-1}, trasforma $\overline{\pi}$ in $\overline{\pi}^{-1}$, si ha che un qualunque elemento $\pi^x \overline{\pi}^y$ di H è trasformato da un elemento ρ di G_i in sè o nel suo inverso, a seconda che π (e $\overline{\pi}$) è trasformato da ρ in sè o nel suo inverso. In tal caso, pertanto, ogni sottogruppo ciclico di H è invariante in G_i, e poichè, applicando la proposizione *a*) a G_{i-1}, anzichè a G, e notando che H appartiene a una catena principale di G_i, si ha che un sottogruppo Q ciclico di H deve essere permutabile con g, Q deve essere addirittura invariante in G_{i-1}, come si voleva.

Supponiamo invece che esista un elemento ρ di G_i che trasformi, per fissare le idee, π in sè e $\overline{\pi}$ in $\overline{\pi}^{-1}$. Sostituendo eventualmente g con $g\rho$, e tornando a chiamare g l'elemento $g\rho$, si può allora supporre che sia $g^{-1}\pi g = \overline{\pi}$, e $g^{-1}\overline{\pi} g = \pi^{-1}$. Allora l'elemento $\pi^x \overline{\pi}^y$ è trasformato da g nell'elemento $\pi^{-y} \overline{\pi}^x$ il quale non può coincidere con $\pi^x \overline{\pi}^y$, nè col suo inverso, se non quando sia $x = y$, e $x = -y$, cioè $x = y = 0$. Ne segue che nessun sottogruppo ciclico di H è trasformato in sè da g. Ma ciò è assurdo, perchè contrasta, come s'è visto, con la *a*) applicata a G_{i-1}. La *b*) è pertanto in ogni caso dimostrata.

c) Supponiamo ora invece che M_{k-1} sia un sottogruppo abeliano finito. Vogliamo mostrare che *se G è finito, esso ha un sottogruppo ciclico d'ordine primo invariante, mentre, se è infinito, ha un sottogruppo ciclico infinito invariante.*

La prima parte di questa proposizione ci dà una proprietà dei gruppi finiti, che risulta dal teorema citato di Ore. Basterà pertanto dimostrare la seconda parte.

Sia allora $M_i (i \geq 1)$ il primo sottogruppo finito della catena principale $M_1, M_2, \ldots, M_k$. Allora M_{i-1}/M_i è un sottogruppo abeliano libero, che costituisce il penultimo termine della catena principale G/M_i, $M_1/M_i, \ldots, M_i/M_i$, di G/M_i.

Poichè, come si vede subito, la proprietà imposta alle catene di G si conserva per isomorfismo meriedrico, per G/M_i sono soddisfatte le ipotesi del teorema, e quindi, per la *b*), G/M_i ha un sottogruppo Q/M_i ciclico infinito, e invariante.

Allora Q è invariante in G. Se t è un elemento di Q cui corrisponde in Q/M_i un generatore di quest'ultimo, τ, si ha che τ è trasformato dagli elementi di G/M_i in sè o nel suo inverso,

onde t è trasformato dagli elementi di G in elementi del tipo $t^{\pm 1} \cdot k$, con k appartenente ad M_i. E poichè gli elementi di M_i sono in numero finito, segue che sono in numero finito gli elementi coniugati a t in G. Se ora T_1 è il sottogruppo generato da t, e $T_2, \ldots, T_m$ sono i sottogruppi coniugati a T_1 in G, si ha che ciascuno dei sottogruppi T_j $(j = 1, 2, \ldots, m)$ ha in Q indice finito (eguale all'ordine di M_i). Essendo questi sottogruppi in numero finito, la loro intersezione I deve avere, del pari di ciascuno di essi, indice finito in Q, e quindi, quale sottogruppo di T_1, deve essere un sottogruppo ciclico infinito di Q. Esso poi, per la sua stessa definizione, è invariante in G, onde la c) è dimostrata.

Veniamo così ad ottenere, dai risultati della b) e della c), che esiste un sottogruppo I invariante in G, ciclico infinito, quando G è infinito, e ciclico d'ordine primo, quando G è finito. Poichè la proprietà imposta alle catene di G si conserva per isomorfismo meriedrico, si ottiene, allo stesso modo, che dovrà esistere un sottogruppo H/I invariante in G/I, ciclico infinito se G/I è infinito, ciclico d'ordine primo in caso contrario. Così proseguendo, si vede come si venga a costruire una catena $G, R_1, R_2, \ldots, R_d, 1$, di sottogruppi invarianti di G, in cui il fattoriale G/R_1 è finito, mentre gli altri sono ciclici infiniti, e d è la dimensione di G; e di conseguenza una catena $G, S_1, \ldots$ $\ldots S_k, R_1, \ldots\ldots, R_d, 1$, ove $R_1, \ldots, R_d$ hanno il significato ora indicato, mentre $S_1, \ldots, S_k$ sono sottogruppi invarianti di G, tali che $G/S_1, S_1/S_2, \ldots, S_k/R_1$ sono tutti ciclici d'ordine primo.

Pertanto la catena così ottenuta è una catena principale di G, in cui ogni fattoriale è ciclico d'ordine primo o ciclico infinito, onde G è un gruppo di Hirsch supersolubile, e il teorema III risulta completamente dimostrato.

(*Pervenuto in Redazione il 6 Agosto 1941–XIX*)