RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

G. AYMERICH

Trasformazione non esattamente adiabatica ed integrazione approssimata di un particolare sistema canonico ad n gradi di libertà

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 12 (1941), p. 51-61

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1941__12__51_0>

TRASFORMAZIONE NON ESATTAMENTE ADIABATICA ED INTEGRAZIONE APPROSSIMATA DI UN PARTICOLARE SISTEMA CANONICO AD n GRADI DI LIBERTÀ

Nota di G. AYMERICH *(Cagliari).*

1. – Le trasformazioni adiabatiche di un sistema sono definite, come è noto (¹), dal variare in modo infinitamente lento e graduale (*adiabatico*) di certi parametri (lunghezze, masse, etc.) che intervengano nelle equazioni del moto del sistema.

In pratica non è però sempre possibile realizzare con esattezza un tale processo di trasformazione, onde si presenta di qualche interesse la valutazione dell'ordine di approssimazione con cui le condizioni per l'*adiabaticità* dei detti parametri sono soddisfatte. Su questo ordine di idee GRAFFI (²) ha stabilito per una estesa classe di sistemi ad un grado di libertà un limite superiore per l'errore che si commette nel sopporre adiabatici certi parametri, variabili col tempo, che compaiono nelle equazioni del moto.

Nel presente lavoro mi sono proposto di stabilire un risultato analogo per quei sistemi conservativi a quanti si vogliono gradi di libertà, dipendenti da un parametro a, variabile col tempo, la cui funzione caratteristica si possa esprimere, per una

(¹) LEVI-CIVITA – *Drei Vorlesungen über adiabatische Invarianten*, Abh. aus dem Math. Seminar der Hamburgischen Universität, Bd. VI, 1928, pp. 323-366.

(²) D. GRAFFI – Rend. Acc. dei Lincei, 1932, p. 657; Atti R. Acc. delle Scienze di Torino 12-2-1933; Annali di Matematica 1936.

conveniente scelta del sistema di riferimento, nella forma

$$(1)\quad H=\frac{1}{2}\sum_1^n{}_i(p_i^2+\omega_i^2(a)\,q_i^2)-\dot{a}\sum_1^n{}_{ij}(b_{ij}(a)\,p_i q_j-\dot{a}\,c_{ij}(a)\,q_i q_j).$$

Il procedimento, analogo a quello già adottato per un particolare sistema a due gradi di libertà ([3]), è una estensione di quello applicato dal GRAFFI ed è stato riassunto al n. 4.

Abbiamo escluso dalla presente trattazione il caso *degenere*, ossia il caso in cui due o più delle *frequenze* $\left(\text{a meno del fattore } \frac{1}{2\pi}\right)$ ω che compaiono nella (1) sono uguali tra loro, caso che contiamo di trattare prossimamente.

2. Sia S un sistema conservativo ad un numero qualunque n di gradi di libertà, la cui funzione caratteristica sia data dalla (1), ove le p sono i momenti cinetici, le q le coordinate lagrangiane, le ω, b, c funzioni derivabili del parametro a.

Escluso il caso degenere, come si è detto ora, formuliamo le seguenti ipotesi:

1ª) il parametro a sia una funzione nota del tempo, derivabile fino al secondo ordine almeno;

2ª) nell'istante iniziale tutte le ω siano diverse da zero e sia $(0, T)$ un intervallo di tempo in cui non si annullano mai;

3ª) nell'istante iniziale non siano entrambe nulle la p_i e la q_i e ciò per ogni intero i tra 1 ed n.

Indipendentemente da queste ipotesi, si noti che alla forma (1) si può ridurre la funzione caratteristica di un sistema conservativo, la cui forza viva sia data, per un certo sistema di coordinate lagrangiane $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$, da

$$T=T_2+\dot{a}\,T_1+\dot{a}^2\,T_0,$$

([3]) G. AYMERICH – Rend. Seminario della Facoltà di Scienze della R. Univ. di Cagliari, vol. VIII, 1938, fasc. 3.

ove

$$T = \frac{1}{2}\sum_{ih}^{n}\nolimits_1 \alpha_{ih}\,\dot\xi_i\dot\xi_h\,,\quad T_1 = \sum_{ih}^{n}\nolimits_1 \beta_{ih}\,\dot\xi_i\xi_h\,,\quad T_0 = \sum_{ih}^{n}\nolimits_1 \gamma_{ih}\,\xi_i\xi_h\,,$$

essendo i coefficienti α, β, γ indipendenti dalle ξ, ed il cui potenziale U sia una forma quadratica negativa

$$U = -\frac{1}{2}\sum_{ih}^{n}\nolimits_1 u_{ih}\,\xi_i\,\xi_h$$

con le u, insieme alle α, β, γ dipendenti generalmente dal parametro a.

È questo il caso, p. es., delle piccole oscillazioni di un sistema olonomo nell'intorno di una configurazione d'equilibrio stabile.

Infatti, se a fosse costante, si potrebbe, come è noto, mediante una sostituzione lineare permutante le ξ nelle q, ridurre la T_2 e la U a forme quadratiche pure rispettivamente nelle $\dot q$ e nelle q; la variabilità di a fa sì che nella trasformata della T_2 compaiono oltre i quadrati anche una forma bilineare nelle q e $\dot q$ ed una forma quadratica nelle q, la prima avente a fattor $\dot a$ e la seconda $\dot a^2$.

Applicando poi la stessa sostituzione alle T_1 e T_0, questa rimane una forma quadratica, mentre T_1 si scinde in due forme, l'una bilineare nelle q e $\dot q$ e l'altra quadratica nelle q e contenente a fattore $\dot a$.

In definitiva si ha

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i}^{n}\nolimits_1 \dot q_i^2 + \dot a\sum_{ih}^{n}\nolimits_1 (b_{ih}\,\dot q_i\,q_h + \dot a\,g_{ih}\,q_i\,q_h)$$

ed

$$U = -\frac{1}{2}\sum_{i}^{n}\nolimits_1 \omega_i^2 q_i^2\,.$$

Tenendo presente che

$$H = (\mathcal{T}_2) - \dot a^2 \sum_1^n g_{ih}\,q_i\,q_h - U,$$

ove $(\mathfrak{T}_2)$ è la trasformata di $\mathfrak{T}_2 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \dot{q}_i^2$, mediante la $p_i = \frac{\partial T}{\partial q_i}$, si ottiene precisamente la (1).

Si osservi che sotto ipotesi particolari è possibile fare in modo che nella H un certo numero $m\,(\leq n)$ di coordinate, insieme ai corrispondenti momenti cinetici, siano separabili, cosichè il sistema dato si possa considerare come composto da un sistema ad $n-m$ gradi di libertà, a variabili non separabili, e da m sistemi ad un sol grado, indipendenti tra loro e dal primo ([4]). In tal modo a ciascuno degli m sistemi ad un grado di libertà possono applicarsi senza altro i risultati del Graffi, onde il nostro problema si riduce allo studio del sistema rimanente.

Il sistema canonico

$$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad \frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \tag{2}$$

si sa integrare soltanto in casi particolari ad esempio quando il parametro a è adiabatico. Sotto questa ipotesi diventano infatti trascurabili nella (1) i termini proporzionali ad $\dot{a}$ ed $\dot{a}^2$, ed è quindi possibile dimostrare l'invarianza adiabatica degli n integrali ciclici di Sommerfeld

$$J_i = \frac{1}{\pi}\int p_i\,dq_i, \tag{3}$$

([4]) Per es. sia $T = \alpha(\dot{\xi}_1^2 + \dot{\xi}_2^2) + \beta\dot{\xi}_1\dot{\xi}_2 + \gamma(\dot{\xi}_1 + \dot{\xi}_2)\dot{\xi}_3 + \delta\dot{\xi}_3^2$, $U = \alpha'(\xi_1 + \xi_2^2) + \beta'\xi_1\xi_2 + \gamma'(\xi_1 + \xi_2)\xi_3 + \delta'\xi_3^2$; ponendo $\xi_1 = q_1 + x_2$, $\xi_2 = q_1 - x_2$, $\xi_3 = x_3$ si trova

$$T = A\dot{q}_1^2 + f(\dot{x}_2, \dot{x}_3), \quad U = Bq_1^2 + g(x_2, x_3),$$

ove f e g sono delle forme quadratiche nella $\dot{x}_2$, $\dot{x}_3$ e x_2, x_3 ordinatamente. Operando poi su queste come si è indicato sopra si ottiene

$$H = \frac{1}{4A}p_1^2 + Bq_1^2 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2} p_i^2 + \omega_i^2 q_i^2 - \dot{a}\sum_{i,j=1}^{2}(b_{ij}p_i q_j - \dot{a}\,c_{ij}q_i q_j).$$

(v. Whittaker – Analytical Dynamics, IV ed. 1937, p. 190).

pervenendo così alla seguente soluzione del sistema (2):

$$p_i = \sqrt{J_i \omega_i} \cos \theta_i \quad q_i = \sqrt{\frac{J_i}{\omega_i}} \operatorname{sen} \theta_i, \tag{4}$$

ove si è posto

$$\vartheta_i = \vartheta_i^0 + \int_0^t \omega_i \, dt. \tag{5}$$

Se il parametro a non è esattamente adiabatico le (4) soddisfano le (2) soltanto nell' istante iniziale $t=0$. Nelle pagine che seguono stabiliremo una formula che consente di verificare se in un dato intervallo di tempo $(0, \tau)$ l' errore che si commette nell' assumere le (4) quali soluzioni delle (2), nell' ipotesi che *a non sia perfettamente adiabatico*, rimane minore di un numero prefissato.

3. - Innanzi tutto si osservi che è sempre possibile dare alle p e q le espressioni (4), quando queste si riguardino non come soluzioni delle (2), ma come una trasformazione delle p e q in certe nuove incognite J e ϑ (non dovendosi più intendere le J definite dalle (3) e le ϑ dalle (5)). Mostriamo poi che si tratta di una trasformazione canonica. Infatti posto

$$\omega_i J_i = p_i^2 + \omega_i^2 q_i^2, \tag{6}$$

sostituendo in questa $\dfrac{\partial V}{\partial q_i}$ al posto di p_i, ove con V si indichi una funzione incognita nelle q e nelle J, si ottiene un sistema di n equazioni a derivate parziali in V, di cui un integrale completo è dato da

$$V = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \left(J_i \operatorname{arc\,sen} q_i \sqrt{\frac{\omega_i}{J_i}} + q_i \sqrt{J_i \omega_i} \sqrt{1 - \frac{\omega_i}{J_i} q_i^2} \right).$$

Le relazioni

$$p_i = \frac{\partial V}{\partial q_i}, \quad \vartheta_i = 2 \frac{\partial V}{\partial J_i}, \tag{4'}$$

definiscono perciò una effettiva trasformazione canonica tra le p, q e le J, θ: sviluppando si riscontra la loro identità con le (4).

Queste mutano perciò il sistema (2) nell'equivalente:

$$\frac{dJ_i}{dt} = -2\frac{\partial}{\partial\vartheta_i}\left(H + \frac{\partial V}{\partial t}\right), \quad \frac{d\vartheta_i}{dt} = 2\frac{\partial}{\partial J_i}\left(H + \frac{\partial V}{\partial t}\right).$$

Espresse H e $\frac{\partial V}{\partial t}$ mediante le J e le ϑ, facendo uso delle (4), ed eseguite le derivazioni sopra indicate si perviene alle equazioni:

$$(8^a) \quad \frac{dJ_i}{dt} = -\dot{a}\, J_i \sum_{h=1}^{n} \sqrt{\frac{J_h}{J_i}} \left\{ \mu_{ih} \cos(\vartheta_i - \vartheta_h) - \nu_{ih} \cos(\vartheta_i + \vartheta_h) - \right.$$

$$\left. - \lambda_{ih}[\operatorname{sen}(\vartheta_i - \vartheta_h) - \operatorname{sen}(\vartheta_i + \vartheta_h)] \right\} + \dot{a}\, J_i \pi_i \cos 2\vartheta_i$$

$$(8^b) \quad \frac{d\vartheta_i}{dt} = \omega_i + \frac{1}{2}\dot{a} \sum_{h=1}^{n} \sqrt{\frac{J_h}{J_i}} \left\{ \mu_{ih} \operatorname{sen}(\vartheta_i - \vartheta_h) - \nu_{ih} \operatorname{sen}(\vartheta_i + \vartheta_h) + \right.$$

$$\left. + \lambda_{ih}[\cos(\vartheta_i - \vartheta_h) - \cos(\vartheta_i + \vartheta_h)] \right\} + \frac{1}{2}\dot{a}\, \pi_i \operatorname{sen} 2\vartheta_i$$

dove si è posto

$$\mu_{ih},\ \nu_{ih} = \frac{b_{ih}\omega_i \mp b_{hi}\omega_h}{\sqrt{\omega_i\omega_h}}, \quad \lambda_{ih} = \frac{2\dot{a}\, c_{ih}}{\sqrt{\omega_i\omega_h}} \quad \pi_i = \frac{d}{da}\log\omega_i .$$

Si noti che per le ipotesi 2a) e 3a) del n. 2 e per la (6) i valori iniziali delle J sono tutti maggiori di zero, onde queste si mantengono positive in un intorno dell'origine dei tempi. Detto σ un qualunque numero positivo, esiste quindi un istante $\tau_1 \leq T$ tale che per $0 \leq t \leq \tau_1$ si ha

$$(9) \qquad \left| \log \frac{J_h(t)}{J_h^0} \right| \leq \sigma$$

per ogni intero h tra 1 ed n, essendo J_h^0 il valore iniziale di J_h.

Mostriamo ora che:

« se τ è un valore di t tale che per $0 \leq t \leq \tau$ si verifica la (9), per ogni intero h compreso tra 1 ed n, si ha

$$\left|\log \frac{J_i(\tau)}{J_i^0}\right| \leq S_i(\tau) \tag{10}$$

ove

$$S_i(\tau) \equiv (A_i \Delta_i a + B_i \Delta'_i a)\, V(a, \tau) + B_i \Delta_i a \tag{11}$$

essendo:

α) A_i e B_i dei numeri reali finiti, dipendenti da σ e da τ, che è possibile conoscere quando sono noti i valori iniziali delle J; essi sono stati calcolati più avanti [v. (17) e (18)];

β) $V(a, \tau)$ la variazione totale del parametro a nell'intervallo $(0, \tau)$, cioè

$$V(a, \tau) = \int_0^\tau |\dot{a}|\, dt\,;$$

γ) $\Delta_i a$ la maggiore delle variazioni totali di a corrispondenti agli intervalli parziali in cui $(0, \tau)$ viene diviso da uno dei seguenti insiemi di valori di t:

$$t'_{h,r+1} = t'_{h,r} + \frac{2\pi}{|\omega_i(t'_{h,r}) - \omega_h(t'_{h,r})|}, \quad \text{per } r = 0, 1, \dots m_h - 1, \tag{12}$$

$$t''_{h,r+1} = t''_{h,r} + \frac{2\pi}{\omega_i(t''_{h,r}) + \omega_h(t''_{h,r})} \quad \text{per } r = 0, 1, \dots n_h - 1, \tag{13}$$

$$t_{r+1} = t_r + \frac{\pi}{\omega_i(t_r)} \qquad \text{per } r = 0, 1, \dots l, \tag{14}$$

assumendo h tutti i valori tra 1 ed n ed essendo $t'_{h,0} = t''_{h,0} = t_0 = 0$ e m_h, n_h, l dei numeri interi tali che $t'_{h,m_h} \leq \tau \leq t'_{h,m_h+1}$, $t''_{h,n_h} \leq \tau \leq t''_{h,n_h+1}$, $t_l \leq \tau \leq t_{l+1}$;

δ) $\Delta'_i a$ la maggiore delle espressioni

$$\frac{t_{s+1} - t_s}{\int_{t_s}^{t_{s+1}} |\dot{a}|\, dt} \int_{t_s}^{t_{s+1}} |\ddot{a}|\, dt$$

essendo (t_s, t_{s+1}) uno qualunque degli intervalli parziali sopra definiti ».

Per vedere ciò si divida la i^{ma} delle (8^a) per J_i e si integri membro a membro da 0 a τ. Si può scrivere allora

$$(15) \qquad \left|\log\frac{J_i(\tau)}{J_i^0}\right| \leq \Sigma_h \left\{ \left| \int_0^\tau \dot{a} \sqrt{\frac{J_h}{J_i}}\, \mu_{ih} \cos(\vartheta_i - \vartheta_h)\, dt \right| + \right.$$

$$+ \left| \int_0^\tau \dot{a} \sqrt{\frac{J_h}{J_i}}\, \nu_{ih} \cos(\vartheta_i + \vartheta_h)\, dt \right| + \left.\left| \int_0^\tau \dot{a} \sqrt{\frac{J_h}{J_i}}\, \lambda_{ih}\, 2\cos\theta_i \operatorname{sen}\vartheta_h\, dt \right| \right\} +$$

$$+ \left| \int_0^\tau \dot{a}\, \pi_i \cos 2\,\vartheta_i\, dt \right| .$$

Considerati gli istanti definiti dalla (12), si ha, per $h \neq i$:

$$16) \quad \left| \int_{t'_{h,r}}^{t'_{h,r+1}} \dot{a} \sqrt{\frac{J_h}{J_i}}\, \mu_{ih} \cos(\vartheta_i - \vartheta_h)\, dt \right| \leq \left| \int_{t'_{h,r}}^{t'_{h,r+1}} \dot{a} \left[\sqrt{\frac{J_h}{J_i}}\, \mu_{ih} \cos(\vartheta_i - \vartheta_h) - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \sqrt{\frac{J_h^*}{J_i^*}}\, \mu_{ih}^* \cos(\vartheta_i - \vartheta_h)^* \right] dt \right| + \left| \int_{t'_{h,r}}^{t'_{h,r+1}} \dot{a} \sqrt{\frac{J_h^*}{J_i^*}}\, \mu_{ih}^* \cos(\vartheta_i - \vartheta_h)^*\, dt \right| .$$

ove $J_k^* = J_k(t'_{h,r})$, $\mu_{ih}^* = \mu_{ih}(t'_{h,r})$ e

$$(\vartheta_i - \vartheta_h)^* = \vartheta_i(t'_{h,r}) - \vartheta_h(t'_{h,r}) + (t - t'_{h,r})[\omega_i(t'_{h,r}) - \omega_h(t'_{h,r})] .$$

Applicando il teorema del valore medio alla espressione che compare tra parentesi quadre nel primo integrale del 2° membro della (16) ed integrando per parti il secondo integrale, indicati con M_{ih}, N_{ih}, Δ_{ih} e Π_{ih}; M'_{ih}, N'_{ih}, Δ'_{ih} e Π'_i i massimi valori assunti da μ_{ih}, ν_{ih}, λ_{ih} e π_i e dalle loro derivate rispetto ad a, nell'intervallo $(0, \tau)$, con un procedimento perfettamente analogo a quello adottato nel lavoro già citato in ([3]), si trova che:

$$\left|\int_0^\tau \dot{a} \sqrt{\frac{J_h}{J_i}} \mu_{ih} \cos(\vartheta_i - \vartheta_h)\, dt\right| \leq e^\sigma \sqrt{\frac{J_h^0}{J_i^0}} \left\{ \left[M_{ih} \sum_{k=i,\,h} \left(\frac{1}{2}(e^{2\sigma}+1) B_k + \right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. + \frac{2\pi}{|\omega_i - \omega_h|_{min}} \left|\frac{d\omega_k}{da}\right|_{max} \right) + M'_{ih} \right] \Delta_i a + M_{ih} \Delta'_i a \right\} V(a, \tau) +$$

$$+ e^\sigma \sqrt{\frac{J_h^0}{J_i^0}} M_{ih} \Delta_i a ,$$

essendo

$$B_k \equiv e^\sigma \sum_{h=1}^{n} \sqrt{\frac{J_h^0}{J_k^0}} (M_{kh} + N_{kh} + 2\Delta_{kh}) + \Pi_k , \tag{17}$$

mentre il minimo ed il massimo indicati con i suffissi *min* e *max* si riferiscono all'intervallo $(0, \tau)$.

Operando in modo simile per tutti gli altri integrali che compaiono a secondo membro della (15), valendosi delle suddivisioni di $(0, \tau)$ definite dalle (12), (13) e (14) secondo che gli argomenti delle funzioni circolari che compaiono in essi sono $\vartheta_i - \vartheta_h$, $\vartheta_i + \vartheta_h$ e $2\vartheta_i$, ed infine sommando dopo aver fatto $h = 1, 2, \ldots, n$, si ottiene la (10) ove si intenda

$$\begin{aligned} A_i \equiv e^\sigma \sum_{h \neq i} \sqrt{\frac{J_h^0}{J_i^0}} \sum_{k=i,\,h} \Bigg\{ & \frac{e^{2\sigma}+1}{2} (M_{ih} + N_{ih} + 2\Lambda_{ih}) B_k + \\ & + 2\pi \left(\frac{M_{ih} + \Lambda_{ih}}{|\omega_i - \omega_h|_{min}} + \frac{N_{ih} + \Lambda_{ih}}{|\omega_i + \omega_h|_{min}} \right) \left|\frac{d\omega_k}{da}\right|_{max} \Bigg\} + (N_{ii} + \Lambda_{ii} + \\ + \Pi) \left(B_i + 2\pi \frac{\left|\frac{d\omega_i}{da}\right|_{max}}{\omega_{i\,min}} \right) & + e^\sigma \sum_{h=1}^{n} \sqrt{\frac{J_h^0}{J_i^0}} (M'_{ih} + N'_{ih} + 2\Lambda'_{ih}) + \Pi' . \end{aligned} \tag{18}$$

La (10), poichè $S_i(\tau)$ non decresce al crescere di τ, stabilisce un limite superiore del modulo del $\log \frac{J_i(t)}{J_i^0}$ per qualunque valore di t intorno a $(0, \tau)$, dal quale è poi facile ottenere un valore maggiorante dello scarto tra $J_i(t)$ e J_i^0. La validilà della (10) essendo però subordinata al verificarsi di tutte le (9), essa non fornisce, una volta assegnato σ, alcuna indicazione circa il valore da attribuire a τ. A ciò provvede il seguente

Teorema. Se si ha $S_h(\tau) < \sigma$ *per ogni intero h tra* 1 *ed* 1 *ed n, nell'intervallo* $(0, \tau)$ *risulta sempre*

$$\left|\log \frac{J_i(t)}{J_i^0}\right| \leq \sigma \tag{19}$$

per $i = 1, 2, \ldots, n$.

Infatti supposto $S_h(\tau) < \sigma$ per $h = 1, 2, \ldots n$, si noti che se non fossero verificate le (19), per $0 \leq t \leq \tau$, esisterebbero alcuni numeri interi compresi tra 1 ed n, diciamo $i_1, i_2, \ldots, i_k$, tali che per qualche valore di $t \leq \tau$ si avesse

$$\left|\log \frac{J_{i_s}}{J_{i_s}^0}\right| > \sigma. \qquad s = 1, 2, \ldots, k.$$

In questa eventualità, per la continuità delle J, sarebbe possibile trovare un valore τ' di t minore di τ, per cui fosse

$$\left|\log \frac{J_j(\tau')}{J_j^0}\right| = \sigma,$$

essendo j uno degli interi $i_1, i_2, \ldots, i_k$, mentre per $0 \leq t \leq \tau'$ e per $i = 1, 2, \ldots, n$ fossero verificate le (19). Allora ricordando che le S_i non decrescano al crescere di t, per la (10) si dovrebbe avere

$$S_j(\tau) \geq S_j(\tau') = \sigma$$

contro l'ipotesi che sia $S_j(\tau) < \sigma$.

4. Tenuto conto del procedimento ora seguito ed osservando le (8^b), si deduce subito che se è valida la (10), risulta pure

$$\left|\vartheta_i(\tau) - \vartheta_i^0 - \int_0^\tau \omega_i dt\right| \leq \frac{1}{2} S_i(\tau);$$

onde, riassumendo quando esposto ai due numeri precedenti possiamo così concludere:

Dato il sistema canonico:

$$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H_i}{\partial q_i}, \quad \frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \tag{2}$$

ove la funzione caratteristica H è data dalla (1), *le relazioni*

$$p_i = \sqrt{J_i \omega_i} \cos \vartheta_i, \quad q_i = \sqrt{\frac{J_i}{\omega_i}} \operatorname{sen} \vartheta_i$$

definiscono una trasformazione canonica che muta il sistema (2) *nel sistema* (8^a) *ed* (8^b).

Considerato un istante τ, appartenente all'intervallo in cui si suppongono verificate le ipotesi formulate al n. 2 *e scelto un numero $\sigma > 0$, se per ogni numero intero h tra* 1 *ed n si ha*

$$S_h(\tau) < \sigma,$$

dove $S_h(\tau)$ è definita dalla (11), *si ha pure entro* $(0, \tau)$

$$\left| \log \frac{J_i(t)}{J_i^0} \right| \leq \sigma \qquad \left| \vartheta_i(t) - \vartheta_i^0 - \int_0^t \omega_i \, dt \right| \leq \frac{1}{2} \sigma .$$

Perciò l'errore che si commette nell'assumere entro $(0, \tau)$ *le relazioni*

$$J_i(t) = J_i^0 \quad \vartheta_i(t) = \vartheta_i^0 + \int_0^t \omega_i \, dt,$$

che costituiscono la soluzione esatta del sistema (8^a) *ed* (8^b) *nell'ipotesi che il parametro a sia adiabatico, non può superare il maggiore dei numeri* $\frac{1}{2}\sigma$ *e* $J_i^0(e^\sigma - 1)$.

(*Pervenuto in Redazione il 26 Luglio 1941-XIX*)