RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

GIUSEPPE ZWIRNER

Su una proprietà di media relativa alle equazioni lineari alle derivate parziali di tipo ellittico del secondo ordine con un numero qualsiasi di variabili

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 12 (1941), p. 22-29

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1941__12__22_0>

SU UNA PROPRIETÀ DI MEDIA RELATIVA ALLE EQUAZIONI LINEARI ALLE DERIVATE PARZIALI DI TIPO ELLITTICO DEL SECONDO ORDINE CON UN NUMERO QUALSIASI DI VARIABILI.

Nota di GIUSEPPE ZWIRNER *a Padova.*

In una Nota (¹) sulle equazioni a derivate parziali di tipo ellittico del secondo ordine a due variabili, il CIMMINO ha dato, per le soluzioni di tali equazioni, una formula integrale che ha dimostrato poi essere caratteristica per quelle soluzioni.

Nella presente Nota mi propongo di far vedere come si possa facilmente estendere, servendosi delle funzioni di E. E. LEVI (²), tale formula integrale anche alle equazioni, dello stesso tipo, con un numero qualsiasi di variabili.

1. Sia data, in un dominio T dello spazio ad m $(m > 2)$ dimensioni $x_1, x_2, \ldots, x_m$, l'equazione a derivate parziali del secondo ordine di tipo ellittico:

$$(1) \quad L(u) \equiv \sum_{1}^{m}{}_{i} \sum_{1}^{m}{}_{k} a_{ik} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} + \sum_{1}^{m}{}_{i} b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + qu = f \qquad (a_{ik} = a_{ki}).$$

(¹) GIANFRANCO CIMMINO: *Su una proprietà di media relativa alle equazioni lineari alle derivate parziali di tipo ellittico del secondo ordine* [Rendiconti del Seminario Matematico della R. Università di Roma, serie IV, vol. 1 (1936 - 1937), pp. 304–309]; vedere anche G. CIMMINO: *Sulle equazioni lineari alle derivate parziali del secondo ordine di tipo ellittico sopra una superficie chiusa* [Annali della R. Scuola Normale Superiore di Pisa, serie II, vol. VII (1938), pp. 73–96], pp. 82–87.

(²) E. E. LEVI: *Sulle equazioni lineari totalmente ellittiche alle derivate parziali* [Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, t. XXIV (2⁰ semestre 1907), pp. 275–317], pp. 312–313.

Supporremo le a_{ik} derivabili con derivate parziali prime e seconde continue, le b_i con derivate parziali prime continue e la q semplicemente continua in T.

Essendo la forma

$$\Sigma_{ik}\, a_{ik}\, \lambda_i \lambda_k \tag{2}$$

definita positiva in T, indicato con A_{ik} il complemento algebrico di a_{ik} nel determinante delle a_{ik}, anche la forma

$$\Sigma_{ik}\, A_{ik}\, \lambda_i \lambda_k\,, \tag{3}$$

sarà pure definita positiva.

Detto $P_0(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_m^0)$ un punto interno a T e

$$D = \begin{vmatrix} a_{11}^0 & a_{12}^0 & \ldots\ldots & a_{1m}^0 \\ a_{21}^0 & a_{22}^0 & \ldots\ldots & a_{2m}^0 \\ \cdot & \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot \\ a_{m1}^0 & a_{m2}^0 & \ldots\ldots & a_{mm}^0 \end{vmatrix}\,,$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} A_{11}^0 & A_{12}^0 & \ldots\ldots & A_{1m}^0 \\ A_{21}^0 & A_{22}^0 & \ldots\ldots & A_{2m}^0 \\ \cdot & \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot \\ A_{m1}^0 & A_{m2}^0 & \ldots\ldots & A_{mm}^0 \end{vmatrix}\,,$$

rispettivamente i discriminanti delle forme (2) e (3) calcolati in P_0, poniamo

$$\sum_{1}^{m}{}_{ik}\, A_{ik}^0\, (x_i - x_i^0)\, (x_k - x_k^0) = \rho^2. \tag{4}$$

Sieno inoltre

$$M(v) \equiv \sum_1^m{}_{\mu} \sum_1^m{}_{\nu}\, a_{\mu\nu} \frac{\partial^2 v}{\partial x_\mu\, \partial x_\nu} + 2 \sum_1^m{}_{\mu} \left(\sum_1^m{}_{\nu} \frac{\partial a_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} - \frac{1}{2}\, b_\mu \right) \frac{\partial v}{\partial x_\mu} +$$
$$+ v \left(\sum_1^m{}_{\mu} \sum_1^m{}_{\nu} \frac{\partial^2 a_{\mu\nu}}{\partial x_\mu\, \partial x_\nu} - \sum_1^m{}_{\mu} \frac{\partial b_\mu}{\partial x_\mu} + q \right),$$

l'espressione aggiunta della $L(u)$, $v(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ una funzione, con derivate parziali prime e seconde continue in T, soluzione della $M(v) = g$, r un numero positivo tale che l'ellissoide E_r definito da $0 \leq \rho \leq r$ riesca tutto interno al dominio T, δ un numero positivo arbitrario minore di r, e applichiamo la nota formula di reciprocità assumendo come dominio d'integrazione la corona ellissoidica $E_r - E_\delta$ e ponendo

$$u = \rho^{2-m} - r^{2-m}, \tag{5}$$

essendo ρ^2 la quantità definita dalla (4).

Si ha:

$$\int_{E_r - E_\delta} \left[v\, L(\rho^{2-m} - r^{2-m}) - g\,(\rho^{2-m} - r^{2-m}) \, dx_1\, dx_2 \ldots dx_m = \right.$$

$$= \left[-\int_{FE_\rho} v \sum_1^m{}_i \sum_1^m{}_k a_{ik} \frac{\partial u}{\partial x_k} dx_1\, dx_2 \ldots dx_{i-1}\, dx_{i+1} \ldots dx_m\right]_{\rho=\delta}^{\rho=r} + \tag{6}$$

$$+ \int_{FE_\rho} (\rho^{2-m} - r^{2-m})\,(P(v) + v R)\, dS,$$

dove si è posto

$$P(v) = \sum_1^m{}_i \sum_1^m{}_k a_{ik} \cos(n x_k) \frac{\partial v}{\partial x_i},$$

$$R = \sum_1^m{}_i \left(\sum_1^m{}_h \frac{\partial a_{ih}}{\partial x_h} - b_i\right) \cos(n x_i)$$

e si è indicato con FE_ρ la frontiera di E_ρ [3].

Vogliamo ora passare al limite nella (6) per $\delta \to 0$. A tale scopo facciamo il seguente cambiamento di variabili

[3] A. G. Webster - G. Szegö *Partielle Differentialgleichungen der mathematischen Physik* [B. G. Teubner, Leipzig (1930)], pag. 310.

$$
(7)\qquad
\begin{array}{ll}
x_i = x_i^0 + \rho\,(\lambda_1 \alpha_{i1} \operatorname{sen}\theta_1 \operatorname{sen}\theta_2 + \ldots + \operatorname{sen}\theta_{m-1} + & 0 \leq \rho \leq r \\
\quad + \lambda_2 \alpha_{i2} \operatorname{sen}\theta_1 \operatorname{sen}\theta_2 + \ldots + \operatorname{sen}\theta_{m-2} \cos\theta_{m-1} + & 0 \leq \theta_1 \leq \pi \\
\quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \vdots \qquad (i=1,2,\ldots,m) \\
\quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \vdots \\
\quad + \lambda_{m-1} \alpha_{im-1} \operatorname{sen}\theta_1 \cos\theta_2 \qquad\qquad + & 0 \leq \theta_{m-2} \leq \pi \\
\quad + \lambda_m \alpha_{im} \cos\theta_1) & 0 \leq \theta_{m-1} \leq 2\pi
\end{array}
$$

dove $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ indicano le lunghezze divise per ρ dell'ellissoide (4) ed $\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \ldots, \alpha_{im}$ i coseni direttori dell'asse x_i con gli assi dell'ellissoide opportunamente orientati. Le quantità λ_k e α_{ik} dipenderanno con continuità da $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_m^0)$ e saranno legate dalle relazioni

$$
(8)\qquad \frac{\alpha_{i1}\alpha_{k1}}{\lambda_1^2} + \frac{\alpha_{i2}\alpha_{k2}}{\lambda_2^2} + \ldots + \frac{\alpha_{im}\alpha_{km}}{\lambda_m^2} = A_{ik}^0 .
$$

Poniamo, per brevità di scrittura,

$$
(9)\qquad \sigma_i = \sum_1^m {}_s \frac{\alpha_{is}}{\lambda_s} \operatorname{sen}\theta_1 \operatorname{sen}\theta_2 \ldots \operatorname{sen}\theta_{m-s} \cos\theta_{m-s+1} \qquad (\cos\theta_m = 1),
$$

$$
(10)\qquad H(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_m^0;\ \rho,\ \theta_1,\ \theta_2, \ldots, \theta_{m-1}) = \Sigma_{st}\, a_{st}\, \sigma_s \sigma_t ,
$$

e dimostriamo che risulta

$$
(11)\qquad
\begin{aligned}
&\sum_1^m {}_i \sum_1^m {}_k\, a_{ik} \frac{\partial u}{\partial x_k} dx_1 \ldots dx_{i-1} dx_{i+1} \ldots dx_m = \\
&= -(m-2)\lambda_1 \ldots \lambda_m H \operatorname{sen}^{m-2}\theta_1 \operatorname{sen}^{m-3}\theta_2 \ldots \operatorname{sen}\theta_{m-2}\, d\theta_1\, d\theta_2 \ldots d\theta_{m-1} .
\end{aligned}
$$

Infatti, tenendo presente le (5), (7) e (8), si ha:

$$
\frac{\partial u}{\partial x_k} = -(m-2)\frac{1}{\rho^{m-1}}\sigma_k ,
$$

$$
\begin{aligned}
&dx_1 \ldots dx_{i-1}\, dx_{i+1} \ldots dx_m = \\
&= \rho^{m-1}\lambda_1 \ldots \lambda_m \sigma_i \operatorname{sen}^{m-2}\theta_1 \operatorname{sen}^{m-3}\theta_2 \ldots \operatorname{sen}\theta_{m-2}\, d\theta_1\, d\theta_2 \ldots d\theta_{m-1} ,
\end{aligned}
$$

da cui segue senz'altro la (11).

Si osservi che

$$dx_1\, dx_2 \ldots dx_m = \frac{1}{\sqrt{\Delta}}\, \rho^{m-1} \operatorname{sen}^{m-2}\theta_1 \ldots \operatorname{sen}\theta_{m-2}\, d\rho\, d\theta_1\, d\theta_2 \ldots d\theta_{m-1}$$

e che per $\rho = 0$, H si riduce a D come si vede facilmente tenendo presente le (8) e ricordando che un elemento del determinante D è uguale al complemento algebrico dell'elemento corrispondente del determinante Δ, diviso per $\sqrt[m-1]{(\Delta)^{m-2}}$.

Premesso ciò, passiamo ora al limite nella (6) per $\delta \rightarrow 0$ ed osserviamo innanzi tutto che la funzione integranda al primo membro della (6) ha un infinito d'ordine $m-1$ per $\rho \rightarrow 0$ e quindi quel primo membro, per $\delta \rightarrow 0$, tende all' $\int\limits_{E_r}$ della medesima funzione, mentre nel secondo membro il secondo integrale tende manifestamente a zero per $\delta \rightarrow 0$. Sicchè, posto, per ogni funzione, $\varphi(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_{m-1})$ sommabile nel dominio $0 \leq \theta_1 \leq \pi, \ldots$ $\ldots 0 \leq \theta_{m-2} \leq \pi$, $0 \leq \theta_{m-1} \leq 2\pi$,

$$\int\limits_{\omega} \varphi\, d\omega = \left(\int\limits_0^{\pi}\right)^{m-2} \int\limits_0^{2\pi} \varphi \operatorname{sen}^{m-2}\theta_1 \operatorname{sen}^{m-3}\theta_2 \ldots \operatorname{sen}\theta_{m-2}\, d\theta_1 \ldots d\theta_{m-1},$$

$$\omega = \int\limits_{\omega} d\omega = \frac{2^{\left[\frac{m+1}{2}\right]} \cdot \pi^{\left[\frac{m}{2}\right]}}{(m-2)\,!},$$

l'indicato passaggio al limite nella (6) conduce, tenendo presente la (11) e quanto fu osservato su H, alla formula

$$\tag{12} \begin{aligned} & v(x_1^0, x_2^0, \ldots x_m^0) = \\ & = \frac{1}{(m-2)\,\omega D}\left[\int\limits_0^r \int\limits_{\omega} \left\{ v \cdot L(\rho^{2-m} - r^{2-m}) - g(\rho^{2-m} - r^{2-m}) \right\} \rho^{m-1}\, d\rho\, d\omega \, + \right. \\ & \left. \qquad + (m-2) \int\limits_{\omega} [vH]_{\rho=r}\, d\omega \right], \end{aligned}$$

che è la proprietà di media cercata per le soluzioni dell'equazione $M(v) = g$.

2. Supponiamo ora che la funzione v, dotata di derivate prime e seconde continue in T, verifichi la proprietà di media (12) per tutti i valori di r sufficentemente prossimi a zero e proviamo che la v è una soluzione dell'equazione $M(v)=g$.

Infatti, derivando la (12) rispetto ad r, tenendo presente che

$$L(\rho^{2-m}-r^{2-m})=(m-2)\frac{m\,H-\Sigma_{ik}\,a_{ik}\,A_{ik}^0}{\rho^m}-$$
$$-(m-2)\frac{\Sigma_i\,b_i\,\sigma_i}{\rho^{m-1}}+q\,(\rho^{2-m}-r^{2-m}),$$

si ottiene:

$$\int_\omega\left[v\left\{(m-2)\frac{m\,H-\Sigma_{ik}\,a_{ik}\,A_{ik}^0}{\rho}-(m-2)\,\Sigma_i\,b_i\,\sigma_i\right\}\right]_{\rho=r}d\omega+$$
$$+\frac{1}{r^{m-1}}\int_0^r\int_\omega(m-2)\,(qv-g)\,\rho^{m-1}\,d\rho\,d\omega+(m-2)\int_\omega[(vH)_\rho]_{\rho=r}d\omega=0\ .$$

Dividendo ora tale espressione per r e passando poi al limite per r tendente a zero, applicando la regola dell'Hospital e ricordando le (7) in base alle quali si devono calcolare le derivate rispetto a ρ, otteniamo

$$\int_\omega\left[\frac{m+2}{2}\,(Hv)_{\rho\rho}-\frac{1}{2}\,\Sigma_{ik}\,(a_{ik}\,v)_{\rho\rho}\,A_{ik}^0-\Sigma_i\,(b_i v)_\rho\,\sigma_i+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{m}\,(qv-g)\right]_{\rho=0}d\omega=0\ ,$$

da cui si deduce, tenendo presente le (8), (9), (10), che il primo membro di tale relazione non è altro che $\dfrac{2^{\left[\frac{m+1}{2}\right]}\cdot\pi^{\left[\frac{m}{2}\right]}}{m\,(m-2)\,!}\,[M(v)-g]$ calcolata nel punto $P_0(x_1^0,\,x_2^0,\,\ldots,\,x_m^0)$.

Si conclude quindi che la proprietà di media trovata è caratteristica per le soluzioni della equazione $M(v)=g$.

La formula (12) si può trasformare in modo che contenga soltanto integrali di volume. Infatti, moltiplicando ambo i membri della (12) per r^{m-1} ed integrando fra 0 ed r e dividendo poi per $\frac{r^m}{m}$, si ottiene

$$v(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_m^0) = \tag{13}$$

$$= \frac{1}{\omega \cdot D}\left[\int_0^r\int_\omega L\left(\frac{\rho^{2-m}-r^{2-m}}{m-2}+\frac{\rho^2-r^2}{2r^m}\right)v\rho^{m-1}d\rho\, d\omega -\right.$$

$$\left.-\int_0^r\int_\omega\left(\frac{\rho^{2-m}-r^{2-m}}{m-2}+\frac{\rho^2-r^2}{2r^m}\right)g\rho^{m-1}d\rho\, d\omega\right],$$

che si può anche scrivere, indicando con P_0 e Q i punti $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_m^0)$ e $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$,

$$v(P_0) = \int_{E_r} K(P_0, Q)\, v(Q)\, dQ + \int_{E_r} G(P_0, Q)\, g(Q)\, dQ,$$

dove si è posto

$$K(P_0, Q) = \frac{\sqrt{D^{m-3}}}{\omega}\left[\left(\frac{1}{\rho^m}-\frac{1}{r^m}\right)\Sigma_{ik}\, a_{ik} A_{ik}^0 -\right.$$

$$-\frac{m}{\rho^{m+2}}\Sigma_{ikts}\, a_{ik} A_{it}^0 A_{sk}^0 (x_t - x_t^0)(x_s - x_s^0) +$$

$$\left.\left(\frac{1}{\rho^m}-\frac{1}{r_m}\right)\Sigma_{it}\, b_i A_{it}^0 (x_t - x_t^0) + q\left(\frac{r^{2-m}-\rho^{2-m}}{m-2}+\frac{r^2-\rho^2}{2r^m}\right)\right],$$

$$G(P_0, Q) = \frac{\sqrt{D^{m-3}}}{\omega}\left(\frac{\rho^{2-m}-r^{2-m}}{m-2}+\frac{\rho^2-r^2}{2r^m}\right),$$

essendo ρ^2 l'espressione definita dalla (4).

3. Se ammettiamo che i coefficienti della $L(u)$ e quelli di $M(v)$ ed i secondi membri delle equazioni $L(u) = f$, $M(v) = g$, siano dotati di derivate parziali prime e seconde continue in T, allora si può dimostrare che ogni funzione $v(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ di

p-ma potenza sommabile con $p > m$, che verifichi, per ogni punto $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_m^0)$ di un certo campo e per valori di r sufficentemente prossimi a zero, la formula integrale (13), è una soluzione della equazione $M(v) = g$. Basta osservare che, nelle ipotesi fatte, la funzione $K(P_0, Q)$, definita per $P_0 \neq Q$, è dotata in T di derivate parziali prime e seconde continue e che, indicando con D e D^2 delle derivazioni rispettivamente del primo e secondo ordine (secondo una direzione qualsiasi, o coppia di direzioni), risultano soddisfatte delle limitazioni del tipo

$$|K(P_0, P_1)| < N \cdot \overline{P_0 P_1}^{-(m-1)},$$

$$|DK(P_0, P_1)| < N \cdot \overline{P_0 P_1}^{-m},$$

$$|D^2 K(P_0, P_1)| < N \cdot \overline{P_0 P_1}^{-(m+1)},$$

con N costante opportuna, e poi ragionare in modo analogo ha quanto ha fatto il CIMMINO nella Nota citata in ([1]).

Pervenuto in Redazione il 2 Aprile 1941–XIX