

RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

GUIDO ZAPPA

Sui gruppi di Hirsch supersolubili. Nota I

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 12 (1941), p. 1-11

[<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1941__12__1_0>](http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1941__12__1_0)

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1941, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*
<http://www.numdam.org/>

SUI GRUPPI DI HIRSCH SUPERSOLUBILI.

Nota I di GUIDO ZAPPA a Roma.

Come è noto, un gruppo G (finito o infinito) è detto *risolubile* quando la serie dei suoi successivi sottogruppi derivati ha un numero finito di termini e si chiude con l'identità.

K. A. HIRSCH ⁽¹⁾ ha recentemente studiato una particolare classe di gruppi infiniti risolubili, i gruppi cioè che egli chiama S -gruppi, e che noi, per distinguerli da altri S -gruppi introdotti da HALL ⁽²⁾, preferiamo chiamare *gruppi di HIRSCH*. Essi si definiscono come segue:

Un gruppo G vien detto gruppo di HIRSCH quando possiede almeno una serie di sottogruppi

$$G = G_0, G_1, \dots, G_l = 1$$

con un numero finito di termini, il primo dei quali è G stesso, e l'ultimo è l'identità, in modo che ogni sottogruppo sia invariante nel precedente, e che i fattoriali G_i / G_{i+1} ($i = 0, \dots, l-1$) siano tutti abeliani con un numero finito di generatori.

HIRSCH ha dato le più importanti proprietà dei suddetti gruppi. Tra queste ricordiamo le seguenti:

1) Ogni sottogruppo, e ogni gruppo fattoriale di un gruppo di HIRSCH, è ancora un gruppo di HIRSCH.

(1) K. A. HIRSCH, *On infinite soluble groups, I*, Proc. London Math. Soc., 2^a serie, vol. 44, pp. 53-60 (1938).

(2) P. HALL, *A note on soluble groups*, Journal London Math. Soc., 3, pp. 98-105 (1928).

II) *Condizione necessaria e sufficiente, affinché un gruppo infinito risolubile sia di HIRSCH, è che in esso ogni catena crescente di sottogruppi abbia un numero finito di termini differenti.*

III) *Condizione necessaria e sufficiente, affinché un gruppo infinito risolubile sia di HIRSCH, è che esso abbia un numero finito di generatori.*

Diremo *catena di composizione* di un gruppo di HIRSCH una serie costituita da un numero finito di sottogruppi, ciascuno invariante nel precedente, iniziatesi con G e terminante con l'identità: $G = M_0, M_1, \dots, M_k = 1$, e tale che i fattoriali M_i / M_{i+1} sono ciclici infiniti o ciclici di ordine primo.

Diremo invece *catena principale* di un gruppo G di HIRSCH una serie costituita da un numero finito di sottogruppi, ciascuno contenuto nel precedente e invariante in G , iniziatesi con G e terminante con l'identità: $G = N_0, \dots, N_k = 1$, e tale che

a) non esistano sottogruppi invarianti di G contenenti N_{i+1} e contenuti in N_i , che abbiano indice infinito in N_i ($i = 0, \dots, k-1$);

b) ogni fattoriale N_i / N_{i+1} sia, se infinito, un gruppo abeliano libero, e, se finito, un gruppo abeliano d'ordine p^n (p primo) e tipo $(1, \dots, 1)$.

Dal fatto che i gruppi di HIRSCH sono risolubili, si deduce facilmente che ogni gruppo di HIRSCH ha almeno una catena di composizione. Ma HIRSCH ha di più mostrato che

IV) *Ogni gruppo di HIRSCH possiede almeno una catena principale.*

HIRSCH si è poi posto il problema, se in due diverse catene principali, o in due diverse catene di composizione di uno stesso gruppo G , i gruppi fattoriali siano, a meno dell'ordine, isomorfi; ed ha dimostrato che

V) *In due diverse catene principali (o di composizione) di uno stesso gruppo G di HIRSCH, i gruppi fattoriali d'ordine infinito sono nello stesso numero e, a meno dell'ordine, a due a due isomorfi.*

Egli ha inoltre fatto vedere con esempi, che ciò non vale per i gruppi fattoriali d'ordine finito, e si è posto il quesito, se ciò valga anche per i gruppi fattoriali d'ordine finito, qualora ci si limiti a considerare catene principali, o di composizione, con un numero minimo di termini, o, per usare la sua denominazione, di lunghezza minima.

HIRSCH ha dato risposta al quesito, e in senso affermativo, per una larga classe di gruppi di HIRSCH, detti, *gruppi con serie centrale* ⁽³⁾, e che sono caratterizzati dalla proprietà di contenere una catena di composizione $G = K_0, K_1, \dots, K_m = 1$, tale che il fattoriale K_i / K_{i+1} appartenga al centrale di G / K_{i+1} . HIRSCH ha determinato molte proprietà di questi gruppi, che sono analoghe a quelle possedute, tra i gruppi finiti, dai p -gruppi.

In questa nota ci proponiamo di studiare una classe di gruppi di HIRSCH più ampia di quella dei gruppi con serie centrale, e di dimostrare tra l'altro che, anche per i gruppi di questa nuova classe, i fattoriali di due catene principali di lunghezza minima sono, a meno dell'ordine, isomorfi.

1. DEFINIZIONE. *Un gruppo di HIRSCH si dirà supersolubile se possiede almeno una catena principale, i cui gruppi fattoriali siano tutti ciclici infiniti, o ciclici d'ordine primo.*

Notiamo anzitutto che

Ogni sottogruppo di un gruppo di HIRSCH supersolubile, è un gruppo di HIRSCH supersolubile.

Sia G un gruppo di HIRSCH supersolubile, e sia

$$G = N_0, N_1, \dots, N_k = 1$$

una sua catena principale, in cui ogni fattoriale N_i / N_{i+1} sia ciclico infinito, o ciclico d'ordine primo.

Sia L un sottogruppo qualsiasi di G . Dal teorema I) di HIRSCH sopra riportato, segue che L è ancora un gruppo di HIRSCH. Si indichi ora con L_i l'intersezione di L con N_i ($i = 0, \dots, k$).

⁽³⁾ K. A. HIRSCH, *On infinite soluble groups, II*, Proc. London Math. Soc., 2ª serie, vol. 44, pp. 336-344 (1938).

Ogni sottogruppo L_i è invariante in N . Detto poi R_i il minimo gruppo contenente L_i ed N_{i+1} , si ha da un teorema sugli isomorfismi che R_i / N_{i+1} è oloedricamente isomorfo ad L_i / L_{i+1} . Ora R_i / N_{i+1} è un sottogruppo di N_i / N_{i+1} , e quindi è al pari di esso ciclico d'ordine primo o ciclico infinito; tale pertanto dovrà essere L_i / L_{i+1} , e di conseguenza la serie $L, L_1, \dots, L_k = 1$ è una catena principale, i cui fattoriali sono ciclici d'ordine primo o ciclici infiniti. Da ciò segue che L è un gruppo di HIRSCH supersolubile, c. d. d.

Si osservi parimenti che

Se G è un gruppo di HIRSCH supersolubile, e L è un suo sottogruppo invariante, anche il fattoriale G/L è un gruppo di HIRSCH supersolubile.

Sia $G = N_0, N_1, \dots, N_k = 1$ una catena principale di G , in cui ogni fattoriale sia ciclico d'ordine primo, o ciclico infinito. Considerata, accanto a questa catena, la serie $G, L, 1$, di sottogruppi invarianti, si ha dal teorema di JORDAN-HÖLDER-SCHREIER che si possono raffinare le due serie, in modo da ottenere due nuove serie di sottogruppi invarianti, i cui fattoriali siano, a meno dell'ordine, isomorfi. Poichè una di queste serie si ottiene raffinando la $G, N_1, \dots, N_k = 1$, le due nuove serie saranno anch'esse serie principali con fattoriali ciclici d'ordine primo o ciclici infiniti. Se

$$G, H_1, \dots, H_{i-1}, L, K_1, \dots, K_{i-1}, K_i = 1$$

è la catena principale ottenuta raffinando la serie $G, L, 1$, la serie

$$G/L, H_1/L, \dots, H_{i-1}/L, 1$$

è una serie principale di G/L con fattoriali ciclici d'ordine primo o ciclici infiniti. G/L è pertanto supersolubile, c. d. d.

2. Passiamo ora a provare che

In ogni catena principale di un gruppo di HIRSCH supersolubile, i fattoriali sono tutti ciclici d'ordine primo o ciclici infiniti.

Sia G un gruppo di HIRSCH supersolubile. Sia

$$(1) \quad G = N_0, N_1, \dots, N_k = 1$$

una sua catena principale (esistente per definizione), i cui fattoriali siano tutti ciclici d'ordine primo o ciclici infiniti, e sia

$$(2) \quad G = M_0, M_1, \dots, M_k = 1$$

un'altra sua catena principale. Si tratta di dimostrare che i fattoriali di questa godono della stessa proprietà di quelli della (1). Facciamo la dimostrazione per assurdo, supponendo pertanto che, ad es., il fattoriale M_i / M_{i+1} non sia ciclico d'ordine primo, nè ciclico infinito. Sono allora possibili due casi:

a) M_i / M_{i+1} è un gruppo abeliano libero non ciclico. Allora, pel teorema IV) di HIRSCH, di cui sopra, M_i / M_{i+1} è isomorfo ad un fattoriale della (1), che dovrebbe essere anch'esso un gruppo abeliano libero non ciclico, contro l'ipotesi.

b) M_i / M_{i+1} è un gruppo abeliano d'ordine p^* (p primo, $n > 1$) e tipo $(1, 1, \dots, 1)$. In base al teorema di JORDAN-HÖLDER-SCHREIER, sarà possibile raffinare le due catene principali (1), (2) in modo che i gruppi fattoriali che si originano siano a due a due isomorfi. E poichè nella (1), o in qualunque catena che si ottenga raffinando la (1), i gruppi fattoriali sono ciclici, si dovranno poter inserire tra M_i ed M_{i+1} dei sottogruppi invarianti, in modo che i fattoriali che si originano sian ciclici, e ciò contro la definizione di catena principale. Il teorema è pertanto in ogni caso dimostrato.

3. Estendiamo ora ai gruppi di HIRSCH supersolubili un teorema già noto per gruppi finiti supersolubili (*).

(*) Per i gruppi finiti supersolubili, cioè per i gruppi finiti i cui fattori principali sono tutti numeri primi, tale teorema fu trovato da E. WENDT nel 1901 (*Über eine spezielle Klasse von Gruppen*, Math. Ann. 55, pp. 479-492). Esso fu recentemente ritrovato dall'Autore (a cui, per involontario,

Il derivato di un gruppo di HIRSCH supersolubile è un gruppo con serie centrale.

Sia infatti G' il derivato di un gruppo di HIRSCH supersolubile G , e sia $G = N_0, N_1, \dots, N_k = 1$ una catena principale di G . Chiamiamo H_i l'intersezione di N_i con G' ($i = 0, \dots, k$). I sottogruppi H_i , quali intersezioni di sottogruppi invarianti in G , sono invarianti in G . Dal ragionamento fatto per dimostrare il primo teorema del n. 1, segue che i sottogruppi H_i costituiscono una catena principale di G' , e che i fattoriali H_{i-1}/H_i ($i = 1, \dots, k$) sono tutti ciclici d'ordine primo o ciclici infiniti. Siano a e b due qualsiasi elementi di G ; essi determineranno in ciascuno dei fattoriali H_{i-1}/H_i automorfismi permutabili, perchè il gruppo di automorfismi di un gruppo ciclico è sempre abeliano. Essendovi un isomorfismo tra gli elementi di G e gli automorfismi che essi determinano in H_{i-1}/H_i , il commutante $a^{-1}b^{-1}ab$ di a e b determina su H_{i-1}/H_i un automorfismo che è il commutante degli automorfismi determinati da a e b , vale a dire l'automorfismo identico. Pertanto ogni commutante, e quindi anche ogni elemento di G' , determina l'automorfismo identico in ciascuno dei fattoriali H_{i-1}/H_i , onde H_{i-1}/H_i appartiene al centrale di G'/H_i , e la serie $G', H_1, \dots, H_k = 1$ è una serie centrale di G' , c. d. d.

4. Per arrivare a proprietà più importanti sui gruppi di HIRSCH supersolubili, ci gioveremo dei seguenti lemmi.

A) Se un gruppo di HIRSCH supersolubile ha un elemento il cui ordine è divisibile pel numero primo p , in ogni sua catena di composizione (e quindi anche principale) v' è almeno un fattoriale d'ordine p .

Poichè nei gruppi di HIRSCH supersolubili le catene princi-

deplorabile errore, era sfuggita la memoria ora citata di WENDT nella nota: *Sui gruppi supersolubili* (Rend. Sem. Mat. Univ. Roma, IV serie, vol. , pp. 323-330 (1938)) e, contemporaneamente, in modo molto semplice, da O. ORE nella memoria: *Contributions to the theory of groups of finite order*, (Duke mathematical Journal, vol. 5, pp. 431-460 (1939)). È appunto la dimostrazione di ORE che vien qui estesa ai gruppi di HIRSCH supersolubili.

pali sono particolari catene di composizione, basterà dimostrare la cosa per quest' ultime.

Sia G un tal gruppo, e a un suo elemento il cui ordine è divisibile per p . Una conveniente potenza di a , che diremo b , deve avere esattamente ordine p . Se $G = N_0, N_1, \dots, N_k = 1$ è una catena di composizione di G , si indichi con N_i il primo dei suoi sottogruppi, che non contenga b . Nell'isomorfismo meriedrico tra N_{i-1} ed N_{i-1}/N_i , all'elemento b dovrà corrispondere in N_{i-1}/N_i un elemento diverso dall'identità, quindi necessariamente d'ordine p . Ma allora N_{i-1}/N_i non può essere ciclico infinito; esso dovrà avere per ordine un numero primo, e precisamente p , c. d. d.

B) Se un gruppo G ha un sottogruppo invariante N ciclico infinito, il cui indice è un numero primo dispari p , e non ha elementi d'ordine finito, è esso stesso un gruppo ciclico infinito.

Sotto le ipotesi fatte, G sarà generato da un elemento b , generatore di N , e da un elemento a , tale che a^p sia in N . Essendo N invariante in G , trasformando mediante a gli elementi di N , si deve determinare in N un automorfismo, il cui ordine divide p . Ma, essendo N ciclico infinito, esso possiede, oltre l'automorfismo identico, solo l'automorfismo d'ordine 2 che muta ciascun elemento nel suo inverso. Onde a determinerà in N l'automorfismo identico, vale a dire sarà permutabile con b e G di conseguenza sarà abeliano. Due casi sono allora da distinguersi:

$\alpha)$ È $a^p = b^{pk}$, con k intero ≥ 0 . Si ha allora

$$(ab^{-k})^p = a^p b^{-kp} = b^{kp} b^{-kp} = 1$$

onde ab^{-k} , (che è diverso dall'identità, perchè a non è in N), ha ordine finito p , contro le ipotesi fatte. Questo caso pertanto si esclude.

$\beta)$ È $a^p = b^k$, con k non divisibile per p . L'equazione indeterminata

$$(3) \quad kx + py = 1$$

ha allora soluzione (perchè $D(k, p) = 1$). Presi due numeri x e y che soddisfino ad essa, si ha

$$(a^x b^y)^p = a^{xp} b^{yp}$$

perchè a e b sono permutabili, ed inoltre

$$a^{xp} b^{yp} = b^{kx + yp} = b$$

perchè $a^p = b^k$, e per la (3). In sostanza, b è potenza di $a^x b^y$. Analogamente si ha

$$(a^x b^y)^k = a^{xk} b^{yk} = a^{xk} a^{yp} = a^{xk + yp} = a$$

onde anche a è potenza di $a^x b^y$. Pertanto $a^x b^y$, generando i generatori a e b di G , genera tutto G , che è di conseguenza ciclico infinito. Il lemma è quindi dimostrato.

Dalla dimostrazione precedente risulta del pari che

C) Se un gruppo G ha un sottogruppo invariante N ciclico infinito, il cui indice sia un numero primo dispari p , esso è abeliano.

È poi immediato che

D) Se un gruppo G ha un sottogruppo invariante N d'ordine 2, il cui indice sia un numero primo dispari p , esso è (ciclico, quindi) abeliano.

5. Per arrivare a stabilire che i fattoriali di due catene principali di lunghezza minima sono, a meno dell'ordine, isomorfi, occorre provare che

Data una catena principale Σ di un gruppo di HIRSCH supersolubile G , può costruirsi un'altra catena principale Σ^ , tale che*

a) Il numero v^ dei fattoriali di Σ^* non supera il numero v dei fattoriali di Σ .*

b) Tra i v fattoriali di Σ se ne possono scegliere v^ , i quali siano, a meno dell'ordine, isomorfi ai fattoriali di Σ^* .*

c) *Esiste un numero p tale che i primi $v^* - p$ fattoriali di Σ^* siano d'ordine infinito o d'ordine 2, e gli ultimi p d'ordine primo dispari.*

Sia

$$G = N_0, N_1, \dots, N_v = 1$$

la catena principale Σ . Se in Σ nessun fattoriale d'ordine primo dispari è seguito da fattoriali d'ordine infinito o d'ordine 2, già Σ soddisfa alle condizioni che si desiderano per Σ^* . In caso contrario, sia N_{i-1}/N_i l'ultimo fattoriale di Σ d'ordine primo dispari che sia seguito da fattoriali d'ordine infinito o d'ordine 2. Allora sono da distinguersi tre casi:

I) N_i/N_{i+1} ha ordine 2. Per la D) del numero precedente, N_{i-1}/N_{i+1} è allora abeliano, e, detto p l'ordine di N_{i-1}/N_i , si ha che gli elementi di N_{i-1}/N_{i+1} d'ordine p formano un sottogruppo caratteristico L_i/N_{i+1} . La catena

$$G = N_0, N_1, \dots, N_{i-1}, L_i, N_{i+1}, \dots, N_v = 1$$

è una nuova catena principale, Σ' , i cui fattoriali sono isomorfi a quelli di Σ , e che differisce da Σ pel fatto che, o è diminuito di uno il numero dei fattoriali d'ordine dispari che precedano fattoriali d'altro tipo, oppure l'ultimo di tali fattoriali, anzichè essere al posto i -esimo, è al posto $(i+1)$ -esimo.

II) N_i/N_{i+1} ha ordine infinito, e N_{i-1}/N_{i+1} ha elementi d'ordine primo dispari p . Allora N_{i-1}/N_{i+1} è abeliano, per la C) del numero precedente, e i suoi elementi d'ordine p formano un sottogruppo caratteristico L_i/N_{i+1} . La catena

$$G = N_0, N_1, \dots, N_{i-1}, L_i, N_{i+1}, \dots, N_v = 1$$

è una nuova catena principale, Σ' , i cui fattoriali sono isomorfi a quelli di Σ , e che differisce da Σ pel fatto che, o è diminuito il numero dei fattoriali d'ordine dispari che precedono fattoriali d'altro tipo, oppure l'ultimo di tali fattoriali, anzichè essere al posto i -esimo, è al posto $(i+1)$ -esimo.

III) N_i/N_{i+1} ha ordine infinito, ma N_{i-1}/N_{i+1} non ha elementi d'ordine primo dispari p . Allora, per la B) del nu-

mero precedente, N_{i-1} / N_{i+1} è ciclico infinito. La catena

$$G = N_0, N_1, \dots, N_{i-1}, N_{i+1}, \dots, N_v = 1$$

è una nuova catena principale Σ' , che differisce da Σ pel fatto che non ha più il fattoriale d'ordine p , N_{i-1} / N_i .

In definitiva, siamo passati in ogni caso dalla catena Σ alla catena Σ' , la quale differisce da essa o per avere un fattoriale d'ordine dispari in meno, o perchè è diminuito di uno il numero dei fattoriali d'ordine dispari che precedono fattoriali d'altro tipo, o perchè l'ultimo di tali fattoriali ha fatto un passo in avanti.

Ripetendo il procedimento più volte, si arriverà ad una catena Σ'' , in cui i fattoriali d'ordine dispari che precedono fattoriali d'altro tipo sono uno di meno che in Σ . I fattoriali di Σ'' sono isomorfi, a meno dell'ordine, ai fattoriali di Σ , oppure ai fattoriali di Σ ad esclusione di uno di questi.

Ripetendo ancora il procedimento, si arriverà ad una catena Σ^* , in cui non vi sono più fattoriali d'ordine dispari che precedono fattoriali d'altro tipo, e i cui fattoriali sono isomorfi, a meno dell'ordine, a tutti o ad una parte dei fattoriali di Σ . Detta catena soddisfa alle condizioni a), b), c).

6. Sia ora

$$G = M_0, M_1, \dots, M_h = 1$$

la catena Σ^* , e sia M_i / M_{i+1} il primo fattoriale d'ordine dispari. Allora M_i , avendo una serie principale $M_i, M_{i+1}, \dots, M_h = 1$ con fattoriali tutti d'ordine dispari, ha ordine dispari. G / M_i ha una catena principale, $G / M_i, M_1 / M_i, \dots, M_i / M_i = 1$, senza fattoriali d'ordine dispari; onde, pel lemma A) del n. 4, non ha elementi d'ordine dispari, oltre l'identità. E poichè, nell'isomorfismo meriedrico tra G e G / M_i , ad elementi d'ordine dispari corrispondono elementi d'ordine dispari, gli elementi d'ordine dispari di G dovranno avere per omologo in G / M_i l'identità, e pertanto sono in M_i . In conclusione:

Gli elementi d'ordine dispari di un gruppo di HIRSCH supersolubile formano un sottogruppo caratteristico.

7. Sia G un gruppo di HIRSCH supersolubile, e sia D il sottogruppo dei suoi elementi d'ordine dispari. Dal ragionamento dei numeri precedenti segue che, data una catena principale di G , se ne può trovare un'altra, di lunghezza eguale o minore, i cui fattoriali d'ordine dispari siano, a meno dell'ordine, isomorfi ai fattoriali di D ; e in conseguenza:

I fattoriali d'ordine primo dispari di una catena principale di lunghezza minima sono, a meno dell'ordine, isomorfi ai fattoriali di D .

Siano ora date due catene principali di lunghezza minima di G . I loro fattoriali d'ordine primo dispari sono, a meno dell'ordine, isomorfi ai fattoriali di D , e quindi isomorfi tra loro. I fattoriali d'ordine infinito delle due catene sono, a meno dell'ordine, isomorfi tra loro, secondo il teorema IV) di HIRSCH da noi riportato in principio. Restano i fattoriali d'ordine 2 i quali, essendo le due serie di lunghezza minima, e quindi di egual numero di termini, dovranno essere anch'essi nello stesso numero, epperò a due a due isomorfi, a meno dell'ordine.

In conclusione

Se G è un gruppo di HIRSCH supersolubile, i fattoriali di due catene principali di lunghezza minima sono, a meno dell'ordine, isomorfi.

Verrà esaminato, in una nota ulteriore sull'argomento, il comportamento dei sottogruppi di G il cui ordine è una potenza di 2.

Parimenti verranno ivi studiate le catene di composizione di lunghezza minima.