

RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

GIUSEPPE ZWIRNER

**Su un problema di valori al contorno per equazioni
differenziali ordinarie di ordine n**

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 12 (1941), p. 114-122

[<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1941__12__114_0>](http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1941__12__114_0)

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1941, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SU UN PROBLEMA DI VALORI AL CONTORNO PER EQUAZIONI DIFFERENZIALI ORDINARIE DI ORDINE n .

Nota di GIUSEPPE ZWIRNER a Padova

I teoremi d'esistenza per le soluzioni di classi estesissime di equazioni funzionali hanno una comune radice topologica posta in luce da BIRKHOFF-KELLOGG ⁽¹⁾ e CACCIOPOLI ⁽²⁾. In questa Nota mi propongo di far vedere come, servendosi delle considerazioni svolte da tali Autori, si possa dimostrare anche il seguente noto teorema ⁽³⁾:

Il problema

$$(1) \quad \begin{aligned} y^{(n)} &= f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}), \\ y(x_1) &= c_1, y(x_2) = c_2, \dots, y(x_n) = c_n, \end{aligned}$$

⁽¹⁾ BIRKHOFF-KELLOGG: *Invariant points in function space* [Transactions of the American Mathematical Society, vol. 23 (1922), pp. 96-115].

⁽²⁾ R. CACCIOPOLI: *Un teorema generale sull'esistenza di elementi uniti in una trasformazione funzionale* [Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, serie 6^a, vol. XI (1930), pp. 794-799]; *Sugli elementi uniti delle trasformazioni funzionali: un'osservazione sui problemi ai limiti* [Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, serie 6^a, vol. XII (1931), pp. 498-502].

⁽³⁾ Cfr. S. CINQUINI: *Problemi di valori al contorno per equazioni differenziali di ordine n* [Annali della R. Scuola Normale Superiore di Pisa, serie II, vol. IX (1940), pp. 61-77], pp. 63-68.

Per $n = 3$ cfr. G. ZWIRNER: *Problemi al contorno per l'equazioni differenziali ordinarie del terzo ordine: teoremi di esistenza e di unicità* [Atti del Reale Istituto Veneto di Scienze Lettere ed Arti, t. XCIX, parte II (1940), pp. 263-275], pp. 268-271.

dove $c_1, c_2, \dots, c_n$ sono numeri reali arbitrariamente prefissati, $x_1 < x_2 < \dots < x_n$ n punti qualsiasi dell'intervallo chiuso (a, b) e $f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ è continua rispetto a $(y, y', \dots, y^{(n-1)})$ e misurabile rispetto a x in

$$T: a \leq x \leq b, \quad |y^{(i)}| < +\infty, \quad (i = 0, 1, \dots, n-1; y^{(0)} = y),$$

ammette almeno una soluzione $y(x)$ assolutamente continua insieme con le sue prime $n-1$ derivate nell'intervallo $a \leq x \leq b$, se in tutto il campo T risulta verificata la disuguaglianza

$$(2) \quad |f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})| \leq \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i(x) |y^{(i)}| + \beta(x), \quad (y^{(0)} = y),$$

dove $\beta(x)$ e $\alpha_i(x)$ ($i = 0, 1, \dots, n-1$) sono funzioni non negative e sommabili in $a \leq x \leq b$, con

$$(3) \quad \int_a^b \left(\sum_{i=0}^{n-1} \frac{(b-a)^{n-i-1}}{(n-i-1)!} \alpha_i(x) \right) dx < 1 \quad (4).$$

Per dimostrare il teorema enunciato mi servirò anche del seguente lemma, conseguenza immediata (n. 1) di una notissima formula d'interpolazione:

Se $Y(x)$ è una funzione assolutamente continua, insieme con le sue prime $n-1$ derivate, in $a \leq x \leq b$ e ivi nulla in n punti $x_1 < x_2 < \dots < x_n$, risultano allora verificate, in tutto $a \leq x \leq b$, le disuguaglianze:

(4) Se si vuole definire l'integrale $y(x)$ soltanto nell'intervallo $x_1 \leq x \leq x_n$, basta porre $a = x_1$ e $b = x_n$ e con ciò si viene ad enunciare un teorema non più generale di quello del testo.

$$\begin{aligned}
 |Y(x)| &\leq \frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!} \int_a^b |Y^{(n)}(x)| dx, \\
 |Y'(x)| &\leq \frac{(b-a)^{n-2}}{(n-2)!} \int_a^b |Y^{(n)}(x)| dx, \\
 &\dots\dots\dots \\
 |Y^{(n-1)}(x)| &\leq \int_a^b |Y^{(n)}(x)| dx.
 \end{aligned}
 \tag{4}$$

In un prossimo lavoro darò un criterio di esistenza che generalizzerà quello del testo e che estenderò anche ai sistemi di equazioni differenziali ordinarie di forma normale e d'ordine qualunque.

1. - Per dimostrare il lemma enunciato ricordiamo che per la funzione $Y(x)$, soddisfacente alle condizioni dette, vale la formula

$$(5) \quad Y(x) = (x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_{n-1}) \frac{Y^{(n-1)}(u)}{(n-1)!}, \quad (a \leq x \leq b),$$

dove u è un conveniente valore intermedio fra a e b , dipendente da x ⁽⁵⁾.

Inoltre, in un conveniente punto ξ interno all'intervallo $x_1 \leq x \leq x_n$, risulta

$$Y^{(n-1)}(\xi) = 0$$

e quindi, per essere

$$Y^{(n-1)}(x) = \int_{\xi}^x Y^{(n)}(x) dx,$$

⁽⁵⁾ Cfr. SEVERI e SCORZA DRAGONI: *Lezioni di Analisi* [Zanichelli, Bologna] II, n. 57.

resta senz'altro provata la prima delle (4). In modo analogo si prova che sussistono anche le altre disuguaglianze osservando che la $Y^{(i)}(x)$ ($i = 1, 2, \dots, n-1$) si annulla $n-i$ volte in $x_1 \leq x \leq x_n$ (e che $Y^{(n)}(x)$ è la derivata $n-i$ di $Y^{(i)}(x)$).

OSSERVAZIONE. Sieno: $v_1, v_2, \dots, v_r$ r numeri interi positivi (maggiori od eguali ad 1) con $v_1 + v_2 + \dots + v_r = n$; $x_1 < x_2 < \dots < x_r$ r punti dell'intervallo $a \leq x \leq b$ e $F(x)$ una funzione assolutamente continua, insieme con le sue prime $n-1$ derivate, in $a \leq x \leq b$ e verificante le condizioni:

$$F(x_j) = F'(x_j) = \dots = F^{v_j-1}(x_j) = 0, \quad (j = 1, 2, \dots, r).$$

Risultano allora verificate, in tutto $a \leq x \leq b$, le disuguaglianze:

$$|F^{(i)}(x)| \leq \frac{(b-a)^{n-i-1}}{(n-i-1)!} \int_a^b |F^{(n)}(x)| dx, \\ (i = 1, 2, \dots, n-1; F^{(0)}(x) = F(x)).$$

Basta infatti ricordare che per la funzione $F(x)$ vale la formula ⁽⁶⁾:

$$F(x) = (x-x_1)^{v_1} (x-x_2)^{v_2} \dots (x-x_{r-1})^{v_{r-1}} (x-x_r)^{v_r-1} \frac{F^{(n-1)}(u)}{(n-1)!}, \\ (a \leq x \leq b),$$

e poi ragionare come nel lemma precedente.

2. - Per provare il teorema enunciato nella prefazione osserviamo innanzi tutto che possiamo sempre supporre, per semplicità di dimostrazione,

$$c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0 \quad (7).$$

⁽⁶⁾ Cfr. loc. cit. ⁽⁵⁾, n. 58.

⁽⁷⁾ Infatti, detto $G(x)$ il polinomio di grado $n-1$ (al più) verificante le condizioni $G(x_1) = c_1, G(x_2) = c_2, \dots, G(x_n) = c_n$, basta eseguire il cambiamento di funzione $y(x) = \eta(x) - G(x)$, in base al quale, nella (2), le $\alpha_i(x)$ restano immutate e varia soltanto la $\beta(x)$.

Indichiamo inoltre con Σ lo spazio delle funzioni $y(x)$ continue insieme con le loro prime $n-1$ derivate in $a \leq x \leq b$ e assumiamo, in tale spazio, come distanza fra due funzioni $y_1(x)$, $y_2(x)$ la somma dei massimi delle n funzioni $|y_1(x) - y_2(x)|$, $|y'_1(x) - y'_2(x)|$, ..., $|y^{(n-1)}_1(x) - y^{(n-1)}_2(x)|$; un insieme compatto di Σ risulterà costituito da funzioni equicontinue ed equilimate con le loro derivate fino alla $(n-1)$ -ma.

Osserviamo infine che, data $y(x)$, la funzione, $z(x)$, assolutamente continua insieme con le sue prime $n-1$ derivate, verificante, quasi ovunque in $a \leq x \leq b$, l'equazione

$$(6) \quad z^{(n)}(x) = f(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x))$$

e le condizioni

$$z(x_1) = z(x_2) = \dots = z(x_n) = 0$$

è completamente determinata ed è data dalla formula:

$$(7) \quad z(x) = \int_a^x dt_1 \int_a^{t_1} dt_2 \dots \int_a^{t_{n-1}} f(u, y(u), y'(u), \dots, y^{(n-1)}(u)) du - \\ - \sum_{i=1}^n \frac{(x-x_1) \dots (x-x_{i-1})(x-x_{i+1}) \dots (x-x_n)}{(x_i-x_1) \dots (x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1}) \dots (x_i-x_n)} \cdot \\ \cdot \int_a^{x_i} dt_1 \int_a^{t_1} dt_2 \dots \int_a^{t_{n-1}} f(u, y(u), y'(u), \dots, y^{(n-1)}(u)) du.$$

Premesso ciò e tenuta presente la (3), indichiamo con M un numero reale positivo verificante la relazione

$$(8) \quad \int_a^b \left(\sum_{i=0}^{n-1} \frac{(b-a)^{n-i-1}}{(n-i-1)!} \alpha_i(x) + \frac{\beta(x)}{M} \right) dx < 1$$

e con Σ' l'insieme degli elementi $g(x)$ di Σ per i quali sia

$$g(x_1) = g(x_2) = \dots = g(x_n) = 0$$

e la $g^{(n-1)}(x)$ sia assolutamente continua e

$$(9) \quad |g^{(n)}(x)| \leq M \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(b-a)^{n-i-1}}{(n-i-1)!} \alpha_i(x) + \beta(x).$$

Valendo allora per le $g(x)$ le relazioni, analoghe alle (4),

$$|g^{(i)}(x)| \leq \frac{(b-a)^{n-i-1}}{(n-i-1)!} \int_a^b |g^{(n)}(x)| dx,$$

$$(i = 0, 1, \dots, n-1; g^{(0)}(x) = g(x)),$$

per le (8) e (9), si ha

$$|g^{(i)}(x)| \leq \frac{(b-a)^{n-i-1}}{(n-i-1)!} M.$$

L'insieme Σ' sarà allora compatto rispetto a Σ perchè composto da funzioni equicontinue ed equilimitate insieme con le loro prime $n-1$ derivate in $a \leq x \leq b$.

Fissato un numero intero positivo p , dividiamo l'intervallo (a, b) in 2^p parti eguali mediante i punti

$$D_p: \xi_1 = a, \xi_2, \dots, \xi_{2^p}, \xi_{2^p+1} = b$$

e sia $g(x)$ un elemento qualsiasi di Σ' e $\varphi_p(g|x)$ la funzione continua, lineare in ognuno degli intervalli di suddivisione e verificante le condizioni

$$\varphi_p(g|\xi_1) = g^{(n-1)}(\xi_1), \varphi_p(g|\xi_2) = g^{(n-1)}(\xi_2), \dots$$

$$\dots, \varphi_p(g|\xi_{2^p+1}) = g^{(n-1)}(\xi_{2^p+1}).$$

Le funzioni $\varphi_p(g|x)$, per $p = 1, 2, \dots$, verificano la disuguaglianza

$$|\varphi_p(g|x)| \leq M$$

e risultano inoltre, come si vede facilmente, equicontinue in $a \leq x \leq b$.

Posto ora

$$\begin{aligned} \phi_p(g|x) &= \int_a^x dt_1 \int_a^{t_1} dt_2 \dots \int_a^{t_{n-2}} \varphi_p(g|u) du - \\ &- \sum_1^{n-1} \frac{(x-x_1) \dots (x-x_{i-1})(x-x_{i+1}) \dots (x-x_{n-1})}{(x_i-x_1) \dots (x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1}) \dots (x_i-x_{n-1})} \int_a^{x_i} dt_1 \int_a^{t_1} dt_2 \dots \int_a^{t_{n-2}} \varphi_p(g|u) du \end{aligned}$$

e quindi

$$\phi_p^{(n-1)}(g|x) = \varphi_p(g|x),$$

per la (5) e ricordando che $|\phi_p^{(n-1)}(g|x)| \leq M$, si avrà, in $a \leq x \leq b$,

$$(10) \quad |\phi_p^{(i)}(g|x)| \leq \frac{(b-a)^{n-i-1}}{(n-i-1)!} M,$$

$$(i = 0, 1, \dots, n-1; \phi_p^{(0)}(g|x) = \phi_p(g|x)).$$

Inoltre, prefissata $g(x)$, risulta, come si vede facilmente,

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \phi_p^{(i)}(g|x) = g^{(i)}(x), \quad (i = 0, 1, \dots, n-1).$$

Per ogni numero intero positivo p indicheremo con Σ_p'' la porzione di Σ formata con gli elementi $\phi_p(g|x)$ e con $\bar{\Sigma}_p''$ l'involucro chiuso (rispetto a Σ) di Σ_p'' . È evidente che $\bar{\Sigma}_p''$ è costituito da funzioni la cui derivata $(n-1)$ -ma è continua e lineare in ogni intervallo di suddivisione di (a, b) in 2^p parti eguali. Indicheremo infine con Σ'' lo spazio

$$\Sigma'' = \Sigma_1'' + \Sigma_2'' + \dots \Sigma_p'' + \dots$$

Nell' S_{2^p+1} reale euclideo consideriamo l'insieme s_{2^p+1} descritto dal punto $(\phi_p^{(n-1)}(\xi_1), \dots, \phi_p^{(n-1)}(\xi_{2^p+1}))$ al variare di $\phi_p(x)$ in Σ_p'' e l'insieme $\bar{s}_{2^p+1}$ descritto dal punto $(\phi_p^{(n-1)}(\xi_1), \dots, \phi_p^{(n-1)}(\xi_{2^p+1}))$ al variare di $\phi_p(x)$ in $\bar{\Sigma}_p''$.

Allora $\bar{s}_{2^p+1}$ è l'involucro chiuso di s_{2^p+1} ed è convesso.

Diciamo infine Σ^* lo spazio

$$\Sigma^* = \Sigma' + \Sigma''$$

è $\bar{\Sigma}^*$ l'involucro chiuso di Σ^* (rispetto a Σ). L'insieme $\bar{\Sigma}^*$ è un sottospazio compatto di Σ ed ogni suo elemento $y(x)$ soddisfa alle relazioni:

$$|y^{(i)}(x)| \leq \frac{(b-a)^{n-i-1}}{(n-i-1)!} M,$$

$$(i = 0, 1, \dots, n-1; y^{(0)}(x) = y(x)).$$

Premesso tutto ciò, sia ora $\phi(x)$ un elemento qualsiasi di $\bar{\Sigma}_p''$. I valori che $\phi^{(n-1)}(x)$ assume nei punti $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{2^p+1}$ di suddivisione dell'intervallo (a, b) in 2^p parti eguali, rappresentano, come abbiamo già osservato, un punto dell'insieme $\bar{s}_{2^p+1}$.

Trasformando la $\phi(x)$ mediante la (7) otteniamo una funzione $g(x)$ che, in base alle (2), (4), (6) e (10), appartiene, evidentemente, a Σ' . Allora i valori che la $g^{(n-1)}(x)$ assume nei punti di suddivisione di D_p rappresentano, nel modo solito, un punto di $\bar{s}_{2^p+1}$. Viene così definita una trasformazione univoca e continua, di $\bar{s}_{2^p+1}$ in una sua parte, quindi, per un teorema di BROUWER⁽⁸⁾, esiste almeno un elemento unito.

Per ogni numero intero positivo p posso quindi trovare una funzione $\phi_p(x)$ di $\bar{\Sigma}_p''$ tale che la sua derivata $(n-1)$ -ma coincida con la derivata $(n-1)$ -ma della sua trasformata $g_p(x)$ nei punti di suddivisione di D_p . Dalle successioni

$$\phi_1(x), \phi_2(x), \dots,$$

$$g_1(x), g_2(x), \dots,$$

formate da funzioni equicontinue ed equilimate, potremo estrarre delle successioni parziali:

⁽⁸⁾ BROUWER: *Über Abbildung von Mannigfaltigkeiten*, [Math. Ann. t. 71 (1912), p. 115].

$$\phi_{q_1}(x), \phi_{q_2}(x), \dots,$$

$$g_{q_1}(x), g_{q_2}(x), \dots$$

in modo che le

$$\phi_{q_1}^{(i)}(x), \phi_{q_2}^{(i)}(x), \dots, \quad (i = 0, 1, 2, \dots, n-1)$$

$$g_{q_1}^{(i)}(x), g_{q_2}^{(i)}(x), \dots,$$

risultino convergenti uniformemente verso funzioni continue che indicheremo rispettivamente con $\phi^{(i)}(x)$ e $g^{(i)}(x)$ ($i = 0, 1, \dots, n-1$; $\phi^{(0)}(x) = \phi(x)$, $g^{(0)}(x) = g(x)$) dove $g(x)$ è la trasformata della

$$\phi(x) \left(\text{e } \phi^{(i)}(x) = \frac{d^i \phi(x)}{dx^i}, g^{(i)}(x) = \frac{d^i g(x)}{dx^i} \right).$$

Siccome $\phi^{(n-1)}(x)$ e $g^{(n-1)}(x)$ sono funzioni continue e coincidono in un insieme denso su $a \leq x \leq b$, si avrà, in $a \leq x \leq b$,

$$\phi^{(n-1)}(x) = g^{(n-1)}(x)$$

e quindi la trasformazione considerata ammette almeno un elemento unito.

(Pervenuto in Redazione il 10 ottobre 1941 XIX)