RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

LUIGI CAMPEDELLI

Sopra i piani doppi con tutti i generi uguali all'unità

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 11 (1940), p. 1-27

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1940__11__1_0>

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1940, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (http://rendiconti.math.unipd.it/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

SOPRA I PIANI DOPPI CON TUTTI I GENERI UGUALI ALL' UNITÀ

di Luigi Campedelli *a Firenze.*

INTRODUZIONE

1. I piani doppi con tutti i generi uguali ad uno, cioè le superficie *regolari* aventi come campo di razionalità

$$\{x, y, \sqrt{f(x, y)}\},$$

ed i cui *caratteri* hanno il valore:

$$p_a = p_g = P = P_3 = \ldots = 1,$$

sono stati studiati per la prima volta, nel 1896, dall' Enriques [1] il quale li ha classificati elencandoli in quattro tipi che ha ritenuto non ulteriormente riducibili dal punto di vista delle trasformazioni birazionali.

Si tratta dei piani doppi che più sotto indichiamo con *a*), *b*), *c'*), e *c*).

Qui, riprendendo in esame il problema (cap. I), siamo portati anzitutto a riconoscere che per quanto concerne la scoperta e la effettiva costruzione dei piani doppi predetti, essa può farsi nel modo più rapido e semplice in base alla circostanza che *una superficie, con i generi uguali all' unità, è certamente rap-*

[1] Cfr. F. Enriques: *Sui piani doppi di genere uno* (Memorie della Società Italiana delle Scienze, detta «dei XL», s. III, to. X, 1896).

presentabile sopra un piano doppio se contiene una curva iperellittica priva di punti multipli (§ 3).

Così l'uso del *metodo dei successivi aggiunti*, al quale fa ricorso l'ENRIQUES (§ 2), rimane necessario soltanto per dimostrare che i tipi cui si giunge per la via accennata, esauriscono in effetto tutte le classi possibili.

L'analisi approfondita della questione porta inoltre a stabilire che *dei quattro tipi elencati dall'* ENRIQUES, *il terzo si riduce ad un caso particolare del quarto.* Cosicchè *i piani doppi con tutti i generi uguali ad uno, fra loro birazionalmente distinti, dànno luogo ai soli tre casi seguenti:*

a) *piano doppio con curva di diramazione*, C_6, *del sesto ordine:*

$$\{C_6\};$$

b) *piano doppio con curva di diramazione dell'ottavo ordine*, C_8, *avente due punti quadrupli*, O, Q, *distinti o infinitamente vicini*:

$$\{C_8(O^4, Q^4)\};$$

c) *piano doppio con curva di diramazione del dodicesimo ordine*, C_{12}, *possedente un punto di molteplicità nove*, O, *con tre punti tripli infinitamente vicini (in direzioni distinte)*, Q_1, Q_2, Q_3:

$$\{C_{12}(O^9, Q_1^3, Q_2^3, Q_3^3)\}.$$

In quanto al

c') *piano doppio con curva di diramazione del decimo ordine*, C_{10}, *dotata di un punto di molteplicità sette*, O, *con due punti tripli infinitamente vicini* (*in direzioni diverse*), Q_1 *e* Q_2:

$$\{C_{10}(O^7, Q_1^3, Q_2^3)\},$$

esso è trasformabile in un caso particolare del tipo c), caratterizzato dalla presenza di un punto di molteplicità due nella curva di diramazione.

A conferma dei risultati ottenuti e in vista di ulteriori applicazioni, si procede poi al computo dei *moduli* da cui quei piani doppi dipendono (cap. II).

Il metodo costruttivo del quale ho detto sopra, mi ha portato in particolare ad esaminare il caso in cui la nostra superficie contenga una curva *ellittica* K, e quindi un fascio lineare, $|K|$, di tali curve (cap. III). Il possesso di codeste K, a differenza di ciò che accade per una curva iperellittica di genere $p > 1$, non porta senz'altro alla possibilità di riferire la superficie ad un piano doppio: bisogna aggiungere l'ipotesi che esista una curva unisecante le K, oppure una loro bisecante ellittica.

Vengono così precisate diverse circostanze – talune delle quali a prima vista presentano anche aspetto di paradosso (§ 19) – e si stabilisce fra l'altro l'interessante proprietà che *ogni superficie rappresentabile sopra un piano doppio del tipo* b), *la cui curva di diramazione* C_8 *possegga due punti quadrupli infinitamente vicini, è pure rappresentabile sopra un piano* c).

Questo e i rimanenti risultati cui si giunge, troveranno maggiori sviluppi e applicazioni in ulteriori ricerche concernenti le superficie con i generi uno, rappresentabili in più modi sul piano doppio ([2]).

Cap. I.

I piani doppi con i generi uguali all'unità.

2. Nella prima parte della trattazione dell'Enriques, data una superficie, F, avente tutti i generi eguali ad uno e rappresentabile su un piano doppio – tale cioè che sopra di essa si abbia una *involuzione razionale*, I, di coppie di punti – si giunge a stabilire (facendo ricorso all'esame dei successivi *aggiunti* ad un conveniente sistema lineare di curve unite nella I) che *sulla* F *esiste un sistema lineare,* $|M|$, *di curve iperellittiche, privo di punti base (e appartenente all'involuzione* I*).*

Se le M sono di genere $p\,(>1)$, il sistema $|M|$ ha la di-

([2]) Cfr. L. Campedelli: *Le superficie con i generi uguali all'unità, rappresentabili in infiniti modi sopra un piano doppio.* (In corso di stampa nei «Rendiconti del Seminario matematico» della R. Università di Roma).

mensione p ed il grado $2p-2$ ([3]), mentre la M generica è priva di punti multipli. Riteniamo quest' ultima circostanza:

α) *Se la superficie F, con i generi uguali ad uno, è rappresentabile sopra un piano doppio, sulla F esiste una curva iperellittica senza punti multipli.*

Procedendo nell' esame della F, l' ENRIQUES giunge a determinare le caratteristiche che presenta la curva di diramazione dei piani doppi rappresentativi di superficie come la F, e successivamente – nella seconda parte del suo lavoro – classifica quelli che hanno in effetto i generi uguali ad uno, pervenendo così ai tipi a), b), c') e c), di cui sopra.

Vogliamo qui far vedere come quest' ultima parte della trattazione possa essere sostituita con altro procedimento che – come si è detto – appare dotato di un notevole valore euristico poichè porta rapidamente alla scoperta dei diversi piani doppi di genere uno: però per dimostrare che i tipi a cui si giunge sono i soli possibili, è necessario ricorrere ancora alla proposizione α), e quindi occorre conservare la prima parte del metodo dell' ENRIQUES.

3. Osserviamo subito che la α) è invertibile, cioè che:

β) *se sopra una superficie F, con i generi uguali ad uno, esiste una curva iperellittica, M, priva di punti multipli, la F è rappresentabile su di un piano doppio.*

Ciò segue dal fatto che *il sistema completo $|M|$, individuato dalla M, è tutto composto di curve iperellittiche ed appartiene ad una involuzione del secondo ordine.*

Invero si ricordi che $|M|$ coincide con il suo *aggiunto* ([4]), e che quindi la *serie caratteristica*, segata sopra una M generica del sistema $|M|$ stesso, coincide con la *serie canonica*. Ma di $|M|$ fa parte la curva iperellittica data M, cosicchè se M' è un' altra sua curva e se P è un punto comune a M e ad M', tutte le curve di $|M|$ passanti per P passano di conseguenza

([3]) Cfr., p. es., F. ENRIQUES e L. CAMPEDELLI: *Lezioni sulla teoria delle superficie algebriche*, parte I (Padova, « Cedam », 1932–X), cap. V, § 52.

([4]) Cfr., p. es., op. cit. in ([3]), cap. V, § 51.

per il punto P', coniugato di P nella g_2^1 esistente sulla M. Così, anche sulla M', si verifica l'esistenza di *coppie neutre* per la serie canonica, la quale quindi risulta composta con una g_2^1.

Questa conclusione non appare *a priori* prevedibile. Infatti le curve di genere p dipendono da $3p-3$ *moduli*, e, tra esse, quelle iperellittiche ne posseggono $2p-1$ (5): quindi, per una curva di genere p, l'essere iperellittica implica $p-2$ condizioni. Sembrerebbe pertanto che, sulla F, entro un sistema ∞^p di curve di genere p, dovessero esservi soltanto ∞^2 curve iperellittiche. Invece da quanto precede risulta che, in generale, in quel sistema non esisterà alcuna curva iperellittica: quando ne esista una tutte le curve del sistema sono iperellittiche.

Premesse queste considerazioni e detto ancora p il genere della M, si consideri la superficie doppia F_{p-1}, d'ordine $p-1$ e appartenente ad uno spazio a p dimensioni, che dà l'*immagine* del sistema $|M|$, il quale ha appunto la dimensione p ed il grado $2p-2$.

Sulla F_{p-1} la superficie F è rappresentata doppiamente con una *curva di diramazione*, C^*, dell'ordine $2p+2$, altrettanti essendo i punti doppi delle g_2^1 esistenti sopra le curve M.

Se si rappresenta biunivocamente la F_{p-1} (che è razionale) sopra un piano, si ha un *piano doppio*:

$$\{x,\ y,\ \sqrt{f(x,\ y)}\},$$

che determina una *classe* di superficie tra le quali è la F.

La proposizione β) è così dimostrata.

4. Siamo in tal modo ricondotti a studiare quel piano doppio e a ricercare i tipi a cui è riducibile, mediante trasformazioni birazionali, la sua curva di diramazione:

$$f(x,\ y)=0.$$

Come è noto (6) le superficie (irriducibili) d'ordine $p-1$

(5) Cfr., p. es., F. Severi: *Trattato di geometria algebrica*, vol. I, P.e I (Bologna, Zanichelli, 1926), cap. VI, n. 58.

(6) Cfr. P. Del Pezzo: *Sulle superficie d'ordine n immerse nello spazio di n + 1 dimensioni* (Rend. Acc. delle Scienze, Napoli, vol. 24, 1885).

appartenenti ad uno spazio a p dimensioni, sono:

1) il piano;

2) la *superficie del* VERONESE, del quarto ordine in S_5;

3) le rigate razionali normali (non cóni);

4) i coni razionali normali.

Nel primo caso si ha senz'altro un *piano doppio del tipo* a) *con curva di diramazione del sesto ordine*: la F_{p-1} per $p=2$ dà l'immagine doppia di una rete di curve iperellittiche di grado e genere uguali a due. E allo stesso piano si giunge dalla *superficie del* VERONESE ($p=5$), come è evidente quando si avverta che le ∞^2 coniche di questa, riguardate come doppie, dànno anch'esse una rete con i medesimi caratteri della predetta. Del resto la F_4 si rappresenta sopra un piano in guisa che alle sue sezioni iperpiane corrispondano le coniche, e ciò porta appunto ad una C_6 quale curva immagine della C_{12}^* di diramazione della F_4.

5. Se la F_{p-1} è una rigata osserviamo che al sistema ∞^1 delle sue generatrici corrisponde sulla F un fascio di curve che, essendo senza punti base, ha il genere uguale alla dimensione, e quindi è composto di curve ellittiche. Ne segue che sopra ogni generatrice della F_{p-1} riguardata come *doppia*, si hanno quattro punti di diramazione, cioè *la curva di diramazione, C^*, della F_{p-1}, è una quadrisecante le generatrici.*

Conviene allora distinguere due casi, secondo che p è un numero pari o dispari.

Se è $p=2m\,(m>1)$ l'iperpiano S_{2m-1} passante per m generatrici generiche della F_{2m-1}, incontra ulteriormente la F_{2m-1} stessa lungo una curva D_{m-1}, dell'ordine $m-1$, che supporremo irriducibile, poichè qualora essa fosse spezzata in una generatrice e in una D_{m-2} (facente parte della C^*), la F_{2m-1} si ridurrebbe, con successive proiezioni da generatrici, ad un cono: caso questo di cui è detto nel § 8. La D_{m-1} è quindi la (sola) *direttrice minima* della F_{2m-1}, la quale è pertanto, come suol dirsi, una *rigata razionale normale di specie* $m-1$ [7].

[7] Per le proprietà delle superficie d'ordine $p-1$ appartenenti ad uno spazio a p dimensioni, cfr. anche, p. es., E. BERTINI: *Introduzione alla geometria proiettiva degli iperspazi* (II ed., Messina, Principato, 1923), cap. XIV.

La F_{2m-1} si rappresenta biunivocamente sopra un piano in modo che alle sue sezioni iperpiane corrisponde il sistema completo delle curve, L_m, d'ordine m, passanti con la molteplicità $m-1$ per un punto O (*rappresentazione minima*) [8]. Allora per determinare l'immagine C della curva di diramazione C^* sulla F_{2m-1}, basta tener conto del fatto che la C deve incontrare le L_m in $4m+2$ punti, mentre è tagliata in quattro punti dalle rette per O (che rappresentano le generatrici della F_{2m-1}). Ne segue subito che la C *è una curva del sesto ordine con un punto doppio in* O: si ottiene così un caso particolare del piano doppio *a*) incontrato nel paragrafo precedente.

Che la C abbia un punto doppio in O è d'accordo con la circostanza che la C^* sega in due punti la direttrice D_{m-1}, la quale nel piano è appunto rappresentata dall'intorno di O.

6. Supponiamo ora che sia $p=2m+1$. Un iperpiano passante per m generatrici generiche della F_{2m}, contiene una curva *direttrice*, D_m, d'ordine m, della F_{2m} stessa. La D_m, se è irriducibile, costituisce una *direttrice minima* della nostra superficie, e varia in un fascio (razionale) di curve direttrici dello stesso ordine, ciascuna delle quali incontra in quattro punti la curva di diramazione C^*, che è ora dell'ordine $4(m+1)$.

Nella rappresentazione (*minima*) della F_{2m} sopra un piano, il sistema rappresentativo delle sezioni iperpiane è costituito dalle ∞^{2m+1} curve, L_{m+1}, d'ordine $m+1$, che passano con la molteplicità m per un punto O, e che inoltre hanno in comune un punto semplice Q [9].

Le rette per O dànno le immagini delle generatrici, mentre le rette del fascio di centro Q rappresentano le direttrici D_m. Tra queste, quella che passa per il punto H della F_{2m} omologo della retta OQ, è rappresentata dall'intorno di O, e invece alla generatrice per H corrisponde l'intorno di Q. Ne segue che *la* C, *immagine della* C^*, *è una curva dell'ottavo ordine con due punti quadrupli in* O *e in* Q.

[8] Cfr. op. cit. in [7], cap. XIV, n. 13.
[9] Cfr. l. cit. in [8].

Si giunge pertanto ad un *piano doppio del tipo b*).

Abbiamo fatto l'ipotesi che la D_m, ulteriore intersezione della F_{2m} con un iperpiano passante per m generatrici, sia irriducibile: il caso contrario rientra implicitamente nell'analisi del § 8. Limitiamoci qui a supporre che la D_m sia spezzata in una generatrice e in una D_{m-1}, che a sua volta sia irriducibile.

Se dunque la F_{2m} possiede la (sola) *direttrice minima* D_{m-1}, la rappresentazione piana della F_{2m} si modifica nel senso che il punto Q diviene infinitamente vicino ad O: cioè le L_{m+1}, immagini delle sezioni iperpiane, hanno in O un punto di molteplicità m, con una tangente fissa. L'immagine C della C^*, è ancora *una curva dell'ottavo ordine con due punti quadrupli*, i quali però sono *infinitamente vicini*. Cioè si cade in un *caso particolare del piano doppio b*).

7. L'analisi dei §§ 5 e 6 si può ripetere in modo più semplice, anche se diverso solo formalmente.

Si proietti la F_{p-1} di S_p, da una generatrice g, in un S_{p-2} indipendente da g: si ottiene una rigata F_{p-3}, e su questa si ha una curva C^*_{2p-2} - proiezione della C^*_{2p+2} di diramazione della F_{p-1} - la quale è incontrata in quattro punti dalle generatrici della F_{p-3}. Ripetiamo questa operazione sulla F_{p-3}, e così si continui con successive proiezioni da generatrici. Allora, nelle nostre ipotesi, se $p = 2m$ è pari, si giunge infine ad una rigata cubica F_3 di uno spazio a quattro dimensioni, sulla quale si ha una curva di diramazione, C^*_{10}, quadrisecante le generatrici. Dalla F_3 con un'ultima proiezione si passa ad un piano, e la C^*_{10} dà una sestica C_6 con un punto doppio.

Se $p = 2m + 1$, dopo $m - 1$ proiezioni si arriva ad una quadrica, F_2, di S_3, e sopra di essa si ha una curva, C^*_8, quadrisecante le generatrici. Se la F_{2m} da cui siamo partiti è di *specie m*, le $m - 1$ proiezioni eseguite portano ad una quadrica con ∞^1 *direttrici* rettilinee, cioè ad una quadrica non degenere. Se invece la F_{2m} possiede una direttrice di ordine $m - 1$, ossia è di *specie* $m - 1$, la F_2 ha una direttrice di ordine zero, e quindi è un cono. Nel primo caso, rappresentando la F_2 sopra un piano, si ha come immagine della C^*_8 una curva dello stesso

ordine con due punti quadrupli distinti; nel secondo caso questi due punti risultano infinitamente vicini.

8. Rimane da esaminare l'ipotesi che la F_{p-1} sia (riducibile, con successive proiezioni da generatrici, ad) un cono.

Anche in tal caso sopra ogni generatrice si hanno quattro punti di diramazione: se nessuno di questi cade nel vertice V, la C^* è ancora una quadrisecante delle generatrici (fuori di V), e poichè ha l'ordine $2p+2$, ciò porta $p=3$.

Se invece V è un punto di diramazione, può accadere che la C^* passi per V, oppure che l'intorno di V si aggiunga alla curva di diramazione: la C^* incontra le generatrici del cono in tre punti (distinti da V), e, nel primo caso, si ha $p=4$, mentre nel secondo è $p=5$.

Se $p=3$ si ricade in un tipo già incontrato (§ 6), cioè nel *piano doppio b) con una curva di diramazione dell'ottavo ordine dotata di due punti quadrupli infinitamente vicini.*

A nuovi piani doppi portano invece gli altri due valori di p.

Esaminiamo per primo il caso $p=5$, che corrisponde ad un cono F_4, del quarto ordine, nello spazio S_5. Esso si rappresenta sopra un piano col sistema delle quartiche aventi un punto base triplo O, e tre punti base semplici, Q_1, Q_2, Q_3, infinitamente vicini ad O (in direzioni diverse): allora la C_{12}^* tracciata sul cono F_4, del quale incontra in tre punti le generatrici (senza contenerne il vertice), ha come immagine *una curva, ancora del dodicesimo ordine*, C_{12}, *che passa con la molteplicità nove per il punto O, e che presenta la molteplicità tre in ciascuno dei punti* Q_1, Q_2, Q_3. Ciò che dà luogo ad un *piano doppio del tipo c)*.

Invece per $p=4$ si arriva al piano doppio c'):

$$\{C_{10}(O^7,\ Q_1^3,\ Q_2^3)\}.$$

Si ha, infatti, un cono cubico, F_3, dello spazio a quattro dimensioni, e, nella rappresentazione piana, alle sezioni iperpiane di F_3 corrisponde il sistema delle cubiche aventi un punto base doppio (non cuspidale) con ambedue le tangenti fisse. Quindi la C_{10}^*, data su F_3, ha per immagine *una curva del decimo ordine,*

C_{10}, con un punto di molteplicità sette, al quale sono infinitamente vicini (in direzioni distinte) due punti tripli.

9. Si deve ora provare che, come abbiamo asserito, *il piano c′) è un caso particolare del piano c)*, e ciò, precisamente, perchè *la curva di diramazione del piano c′) si può ridurre, con trasformazioni birazionali, ad una curva del dodicesimo ordine dotata di un punto di molteplicità nove, con tre punti tripli infinitamente vicini, e che possiede inoltre un punto doppio.*

Come si è visto, il piano doppio *c*) proviene da un cono doppio del quarto ordine, F_4, in S_5, avente una curva di diramazione C_{12}^*, del dodicesimo ordine, trisecante le generatrici, e che non passa per il vertice. Se supponiamo che la C_{12}^* abbia un punto doppio P, e se si proietta F_4 da P in un S_4, si ottiene un cono del terzo ordine, F_3, e sopra di esso una curva C_{10}^*, del decimo ordine, passante per il vertice e che incontra ulteriormente le generatrici in tre punti. Da un cono F_3 siffatto si passa appunto ad un piano doppio del tipo *c′*).

Ma, viceversa, dato, in uno spazio a quattro dimensioni, S_4, un cono cubico, F_3, e sopra di esso una curva del decimo ordine, C_{10}^*, che ne tagli le generatrici in tre punti e passi per il vertice V, occorre dimostrare che il cono F_3 e la C_{10}^* si possono sempre riguardare come ottenuti da un cono F_4, del quarto ordine, in S_5, e da una curva C_{12}^* tracciata sopra F_4 (trisecante le sue generatrici, e non passante per il vertice), per mezzo di una proiezione da un punto P, doppio per la C_{12}^*.

Per questo indichiamo con $|L_3|$ il sistema (completo) ∞^4 delle sezioni iperpiane del cono F_3 (che è normale in S_4), e con $|R|$ il fascio (razionale) delle sue generatrici. Sia r la generatrice tangente alla C_{10}^* nel vertice V, e si designi con ν la curva infinitesima costituita dall'intorno del punto della C_{10}^* infinitamente vicino a V, punto che è della r. La *curva eccezionale* ν è di genere zero e di grado uguale a -1 ([10]).

Si ponga inoltre:

$$\rho = |R - \nu| ;$$

([10]) Cfr. p. es., op. cit. in ([3]), cap. I, § 20.

la curva ρ, così definita, ha il genere zero ed il grado -1, è cioè anch' essa una *curva eccezionale.*

Ciò premesso, consideriamo il sistema (di genere zero e di grado quattro):

$$|L_4| = |L_3 + \rho|,$$

e ricerchiamone la dimensione.

Poichè la ρ non ha nessun punto in comune con la L_4 generica, è cioè una *curva fondamentale* per $|L_4|$, da:

$$|L_4 - \rho| = |L_3|,$$

si deduce che le L_4 sono ∞^5 ([11]).

Si osservi poi che se indichiamo con θ la curva:

$$\theta = |L_4 - 4R|,$$

la θ risulta razionale, di grado -4, ed è *fondamentale* per il sistema $|L_4|$, in quanto non ha intersezioni con la L_4 generica ([12]).

Sia, allora, F_4 la superficie, razionale del quarto ordine in uno spazio a cinque dimensioni, sulla quale il sistema $|L_4|$ è segato dagli iperpiani (*superficie immagine* di $|L_4|$). Sulla F_4 alle curve ρ e θ, fondamentali per $|L_4|$, corrispondono due punti, P e V_0, il primo dei quali è semplice ed il secondo ha invece la molteplicità quattro (poichè le curve

$$|L_4 - \theta|$$

incontrano la θ in quattro punti), cioè la F_4 è un *cono* col ver-

([11]) Ciò è d' accordo col fatto che il sistema $|L_4|$ è segato su F_3 dalle quadriche (iperquadriche) W di S_4, che toccano la r nel vertice V e passano per le due rette, r_1 e r_2, ulteriori intersezioni del cono F_3 con un iperpiano passante per r. Le W costituiscono un sistema lineare di dimensione otto, e tra esse se ne hanno ∞^2 (degeneri) che contengono per intero F_3.

([12]) Oppure: il sistema

$$|4R| = |L_4 - \theta|$$

ha la dimensione quattro, e poichè le L_4 sono in numero di ∞^5, si ha che la θ presenta una sola condizione alle L_4 obbligate a contenerla, è cioè, appunto, una *curva fondamentale* per $|L_4|$.

tice in V_0. Infine, essendo:

$$|L_4 - P| = |L_3|,$$

il cono F_3 è la proiezione di F_4 da P.

Alla C_{10}^* data su F_3 (e che incontra in dodici punti le curve del sistema $|L_4| = |L_3 + \rho|$), risponde su F_4 una curva C_{12}^*, del dodicesimo ordine, passante per P con la molteplicità due (poichè la C_{12}^* ha due intersezioni con la ρ), e che si appoggia in tre punti alle generatrici. D'altra parte, poichè sopra F_3 la C_{10}^* non incontra la θ, la C_{12}^* non passa per il vertice V_0 di F_4.

Siamo così giunti alla conclusione richiesta.

10. Del resto, data una curva piana C_{10}, del decimo ordine, possedente un punto di molteplicità sette, O, con due punti tripli infinitamente vicini (in direzioni distinte), Q_1 e Q_2, si può provare in modo diretto che, mediante una trasformazione quadratica, la C_{10} è trasformabile in una curva del dodicesimo ordine, C_{12}, con un punto di molteplicità nove, O', al quale sono infinitamente vicini (in direzioni diverse) tre punti tripli, Q'_1, Q'_2, Q'_3, e che possiede inoltre un punto doppio P'. Viceversa: da una tale C_{12} si passa, sempre con una trasformazione quadratica, alla C_{10}.

Sulla C_{10} il punto O è origine di tre rami: OQ_1, OQ_2, ed un terzo (lineare) che indicheremo con OQ_3, intendendo che Q_3 sia il punto infinitamente vicino ad O sopra di esso. Si consideri allora la trasformazione quadratica, T_2, con un punto fondamentale in O, un altro in Q_3, ed il terzo del tutto generico (fuori di C_{10}), per modo che nel piano della C_{10} la *rete omaloidica* sia costituita dalle coniche tangenti in O al ramo OQ_3 della C_{10}, e che passano inoltre per un altro punto base genericamente fissato. Ebbene, come è subito visto, la T_2 muta la C_{10} in una C_{12} con le singolarità predette.

Viceversa, una C_{12} siffatta è cambiata nella C_{10} da una trasformazione quadratica che, sul piano della C_{12}, abbia come fondamentali i punti O', Q'_3 e P'.

Cap. II.

I moduli dei piani doppi con i generi uguali all' unità.

11. Il computo del numero dei moduli da cui dipendono i nostri piani doppi è immediato per i tipi *a*) e *b*).

Nel primo di questi casi si hanno 19 moduli, poichè fra le ∞^{27} sestiche piane, quelle proiettivamente distinte sono ∞^{19}.

Per i piani del tipo *b*), la cui curva di diramazione è una

$$C_8(O^4,\ Q^4),$$

il numero dei moduli è invece 18. E ciò perchè le curve dell' ottavo ordine che passano con la molteplicità quattro per due punti prefissati, O e Q, sono ∞^{24} e ciascuna di esse è trasformata in un' altra dello stesso tipo dalle ∞^6 trasformazioni quadratiche del piano in sè, che hanno in O e in Q due punti fondamentali uniti.

12. Passiamo al piano doppio del tipo *c*).

Fissato nel piano un punto O, e tre punti, Q_1, Q_2, Q_3, infinitamente vicini ad O (in direzioni distinte), le curve del dodicesimo ordine:

$$C_{12}(O^9,\ Q_1^3,\ Q_2^3,\ Q_3^3)$$

che hanno in O un punto di molteplicità nove, e tre punti tripli in Q_1, Q_2 e Q_3, costituiscono un sistema lineare la cui dimensione è uguale a 27, e ciascuna di esse è cambiata in un' altra da ogni trasformazione birazionale del quarto ordine, T_4, del tipo del De Jonquières, la quale abbia i punti fondamentali disposti in modo opportuno.

Precisamente: sul piano π, in cui è data la nostra C_{12}, si prenda come *rete omaloidica* della T_4 quella costituita dalle quartiche che posseggono in O un punto triplo con le tre tangenti fisse OQ_1, OQ_2, OQ_3, e che passano inoltre per altri tre punti arbitrari, Q_4, Q_5, Q_6:

$$|\,C_4(O^3,\ Q_1,\ Q_2,\ Q_3,\ Q_4,\ Q_5,\ Q_6)\,|\,.$$

Allora sul secondo piano $\pi' (\equiv \pi)$ il punto O', triplo per le quartiche della rete omaloidica, dovrà coincidere con O, e i punti base semplici Q'_4, Q'_5, Q'_6 (omologhi delle rette OQ_4, OQ_5, OQ_6), si prenderanno rispettivamente in Q_1, Q_2, Q_3, scegliendo invece ad arbitrio i punti Q'_1, Q'_2, Q'_3.

Codeste T_4 trasformano in sè il sistema, di dimensione cinque e di grado quattro:

$$| C_4 (O^3, Q_1, Q_2, Q_3) |,$$

costituito dalle quartiche aventi in O un punto triplo con le tre tangenti fisse OQ_1, OQ_2 e OQ_3; cioè il sistema rappresentativo del cono quartico dello spazio a cinque dimensioni. Quindi le T_4 sono ∞^9, tante quante le omografie che cambiano quel cono in sè (ciascuna di esse essendo il prodotto di una delle ∞^6 omologie col centro nel vertice del cono, per una delle ∞^3 proiettività del sistema delle generatrici in sè) ([13]).

Si conclude così che le

$$C_{12} (O^9, Q_1^3, Q_2^3, Q_3^3)$$

birazionalmente distinte sono in numero di ∞^{18}, cioè che *i piani doppi del tipo c) dipendono da 18 moduli.*

Le trasformazioni T_4 si possono contare anche direttamente ricorrendo alla loro *costruzione mediante fasci proiettivi di rette e cubiche (razionali).*

Invero la T_4 nasce nel modo seguente. Dopo avere assegnati sul piano π i punti O, Q_1, Q_2, Q_3 (Q_1, Q_2, Q_3 essendo infinitamente vicini ad O in direzioni distinte), e su π' i punti $O' (\equiv O)$, $Q'_4 (\equiv Q_1)$, $Q'_5 (\equiv Q_2)$, $Q'_6 (\equiv Q_3)$, si prendano su π tre punti arbitrari, Q_4, Q_5, Q_6, e su π' si scelga un punto Q'_1 tale che si abbia l'uguaglianza dei birapporti:

$$O (Q_1 \, Q_4 \, Q_5 \, Q_6) = O' (Q'_1 \, Q'_4 \, Q'_5 \, Q'_6).$$

Fra il fascio delle rette per O e quelle delle rette per O',

([13]) A questa conclusione si giunge anche direttamente da quanto è detto nel § 8.

si stabilisca la proiettività:

$$O(Q_1,\ Q_4,\ Q_5,\ Q_6,\ldots)\ \overline{\wedge}\ O'(Q'_1,\ Q'_4,\ Q'_5,\ Q'_6\ldots),$$

ed inoltre si consideri il fascio delle cubiche passanti doppiamente per O e semplicemente per Q_2, Q_3, Q_4, Q_5, Q_6, e si riferisca a quello delle rette per Q'_1, in una proiettività nella quale alla cubica spezzata nelle tre rette OQ_4, OQ_5 e OQ_6 corrisponda la retta Q'_1O'.

La corrispondenza biunivoca che così si determina fra i piani π e π' coincide appunto con la nostra T_4, e dal computo degli elementi arbitrari che appaiono in questa costruzione si ha nuovamente che le T_4 costituiscono una totalità nove volte infinita.

13. Per il piano doppio del tipo c') si ha senz'altro (§ 9) che il numero dei moduli che lo caratterizzano è uguale a 17. Ma conviene ritrovare direttamente questo risultato (ciò che si fa in maniera del tutto analoga a quella dianzi seguita), sia per la conferma che dà alle nostre conclusioni, sia per l'influenza euristica che ha avuto sopra di esse.

Nel piano π, le curve del decimo ordine:

$$C_{10}(O^7,\ Q_1^3,\ Q_2^3)$$

con i punti multipli – O, di molteplicità sette, e Q_1, Q_2 (infinitamente vicini ad O) di molteplicità tre – in posizione prefissata, sono ∞^{25}, ed il loro sistema lineare è cambiato in sè da convenienti trasformazioni cubiche T_3 fra due piani sovrapposti in π. Le T_3 si debbono prendere in guisa che, sul piano π, la rete omaloidica sia formata dalle cubiche che hanno in O un punto doppio con le tangenti fisse OQ_1 e OQ_2, e che passano inoltre per altri due punti arbitrari, Q_3 e Q_4. Sul secondo piano π' ($\equiv \pi$), se indichiamo con O', Q'_1, Q'_2, Q'_3, Q'_4, i punti base della rete omaloidica (intendendo che il punto O' sia quello doppio e che la retta $O'Q'_i$ sia l'omologa del punto fondamentale Q_i), i punti O', Q'_3 e Q'_4 si faranno coincidere rispettivamente con O, Q_1 e Q_2.

Per determinare il numero delle T_3 si osserverà, come si è fatto più sopra, che esse trasformano in sè il sistema ∞^4 delle

cubiche passanti doppiamente per O, e aventi ivi le due tangenti fisse OQ_1 e OQ_2, e poichè questo sistema è quello rappresentativo di un cono cubico dello spazio a quattro dimensioni, le T_3 sono tante quante le omografie che mutano in sè codesto cono, cioè ∞^8 (cfr. anche § 8).

Si trova quindi di nuovo che i piani c') dipendono effettivamente da 17 moduli.

Anche in questo caso per contare le T_3 ci si può valere della loro *costruzione mediante fasci proiettivi di rette e coniche,* alla quale si giunge ora come segue.

Nel piano π, in cui sono dati O, Q_1, Q_2, prendiamo ad arbitrio i punti Q_3 e Q_4, ed in π', accanto ai punti assegnati O' $(\equiv O)$, $Q'_3(\equiv Q_1)$, $Q'_4(\equiv Q_2)$, fissiamo un altro punto Q'_1. Si consideri poi il fascio di rette col centro in O, e si riferisca al fascio delle rette per O', nella proiettività individuata dalle tre coppie:

$$(OQ_1,\ O'Q'_1),\quad (OQ_3;\ O'Q'_3),\quad (OQ_4,\ O'Q'_4).$$

Infine tra il fascio delle coniche tangenti in O alla OQ_2 e passanti per Q_3 e Q_4, e il fascio delle rette per Q'_1 si stabilirà una proiettività nella quale alla conica degenere nelle rette OQ_3 e OQ_4, faremo corrispondere la retta $O'Q'_1$.

Cap. III.

I piani doppi con tutti i generi uguali ad uno e che posseggono un fascio razionale di curve ellittiche.

14. Sulle superficie F rappresentate dai piani doppi b) e c) esiste (almeno) un fascio lineare di curve ellittiche K, e lo stesso accade per il caso particolare del tipo a) costituito dal

a') *piano doppio con curva di diramazione del sesto ordine,* C_6, *dotata di un punto di molteplicità due,* O:

$$\{\, C_6(O^2) \,\}.$$

Esaminiamo allora, in relazione a codesta circostanza, come

si esprimano le condizioni che caratterizzano quei piani doppi, ai quali aggiungeremo anche il tipo c').

Per il tipo a') si ha facilmente:

La condizione necessaria e sufficiente affinchè una superficie F, con tutti i generi uguali ad uno, sia rappresentabile sopra un piano doppio del tipo a'), è che sulla F esista (una e quindi) un fascio, K, di curve ellittiche, ed una curva razionale (irriducibile), R, bisecante le K.

Invero se la sestica di diramazione:

$$C_6(O^2),$$

ha un punto doppio in O, le rette per esso rappresentano un fascio razionale di curve ellittiche K (ciascuna delle quali è unita nell'involuzione I le cui coppie sulla F corrispondono ai punti del piano doppio), e l'intorno di O (curva razionale con due punti di diramazione) è immagine di una curva razionale, R (unita nella I), bisecante le K (in coppie della I stessa).

Ma, viceversa, dati sulla F il fascio $|K|$ e la curva R, si consideri il sistema:

$$|M| = |K + R|,$$

e se ne determini i caratteri. Il suo genere ed il suo grado risultano uguali a due (la R essendo di genere zero e grado -2), e quindi - per il teorema di Riemann-Roch ([14]) - la dimensione è $r \geq 2$. Ma allora il sistema $|M|$ è irriducibile, e ciò porta ([15]) precisamente $r = 2$. Si avverta inoltre che le M sono iperellittiche poichè sopra ciascuna di esse le K segnano una g_2^1, e che il sistema $|M|$ appartiene ad una involuzione del secondo ordine. Ciò consente di rappresentare doppiamente la F sopra il piano *immagine* di $|M|$, e la curva di diramazione è appunto una $C_6(O^2)$.

15. *La condizione necessaria e sufficiente affinchè una superficie F, con tutti i generi uguali all'unità, sia rappre-*

([14]) Cfr., p. es., op. cit. in ([3]), cap. IV, § 48.
([15]) Cfr. l. cit. in ([3]).

sentabile mediante un piano doppio del tipo b):

$$\{ C_8 (O^4, Q^4) \},$$

la cui curva di diramazione possegga due punti quadrupli distinti, è che sopra la F esistano due fasci (lineari), $|K|$ ed $|H|$, di curve ellittiche tali che una K ed una H abbiano due intersezioni.

Si tratta dei due fasci che, dato il piano doppio, sono rappresentati l'uno dalle rette per O e l'altro da quelle per Q.

Viceversa, dall'esistenza dei due fasci $|K|$ ed $|H|$ si deduce la rappresentabilità della F sopra un piano doppio del tipo predetto, ricorrendo al sistema:

$$|M| = |H + K|.$$

Come nel caso precedente, se ne determinano il genere ed il grado - che risultano, ora, uguali rispettivamente a tre e a quattro - e se ne ricava che $|M|$ è irriducibile, di dimensione uguale a tre, e che le sue curve sono iperellittiche. Infine si osserva che $|M|$ appartiene ad una involuzione del secondo ordine.

Dopo ciò valgono le conclusioni del § 6.

16. Maggiore interesse presenta il caso che segue.

La condizione necessaria e sufficiente affinchè una superficie F sia rappresentabile sopra un piano doppio del tipo b) con una curva di diramazione, C_8, dotata di due punti quadrupli infinitamente vicini, è che sulla F esistano un fascio, $|K|$, di curve ellittiche, e due curve razionali (irriducibili), R_1 e R_2, unisecanti le K, prive di punti comuni.

Se la F è rappresentabile sopra un piano del tipo predetto, essa lo è anche (§ 6) sopra una rigata razionale doppia F_{2m}, d'un certo ordine $2m$, appartenente ad un S_{2m+1}, con una conveniente curva di diramazione. Sulla F_{2m} si ha una *direttrice* D_{m-1}, d'ordine $m - 1$, che non incontra la curva di diramazione. La D_{m-1}, riguardata come doppia, è immagine di una curva spezzata in due componenti di genere zero (e grado -2), R_1, R_2, ciascuna delle quali incontra in un punto le K e che non hanno

intersezioni fra loro. Ciò è d'accordo col fatto che la $R_1 + R_2$ risulta di genere -1 e grado -4 (come si vede osservando che la D_{m-1} insieme ad $m+1$ generatrici, costituisce una sezione iperpiana della F_{2m}).

Viceversa, date sulla F le due curve R_1 e R_2, il sistema:

$$|M| = |2K + R_1 + R_2|,$$

irriducibile, di dimensione e genere tre e di grado quattro, appartiene ad una involuzione del secondo ordine, ed ha per immagine un cono quadrico, F_2, in uno spazio ordinario. Sopra F_2 la F è rappresentata doppiamente con una curva di diramazione dell'ottavo ordine, quadrisecante le generatrici. Da questa rappresentazione si passa appunto, come si è visto (§ 8), ad un piano doppio del tipo dianzi detto.

17. *La condizione necessaria e sufficiente affinchè una superficie F, con tutti i generi uguali ad uno, sia rappresentabile sopra un piano doppio del tipo c), è che sulla F esista un fascio (lineare) di curve ellittiche, $|K|$, ed una curva razionale (irriducibile), R, unisecante le K.*

La condizione è necessaria: cioè se sulla F esiste una involuzione razionale del secondo ordine, I, che consenta di rappresentarla sopra un piano doppio con la curva di diramazione:

$$C_{12}(O^9, Q_1^3, Q_2^3, Q_3^3)$$

(i punti Q_1, Q_2, Q_3 essendo infinitamente vicini ad O, in direzioni diverse), il fascio delle $\bar{K}$ (unite nella I) è dato, ancora, dalle rette per O, e l'intorno di O (che fa parte della curva di diramazione) rappresenta adesso una curva razionale R (contata due volte, poichè è costituita da punti di coincidenza per la I), che incontra ciascuna delle K in *un* punto (unito nella I, cioè *doppio* per la g_2^1 delle coppie della I che stanno sulla K).

La cosa si mette meglio in evidenza sostituendo alla C_{12} la sua corrispondente in una trasformazione quadratica con un punto fondamentale in O (e gli altri due - Q_4 e Q_5 - generici, fuori della C_{12}). La nuova curva di diramazione risulta allora costituita da una curva del sedicesimo ordine, C'_{16}, della quale

fa parte una retta C'_1 (l'omologa dell'intorno di O), e si ha precisamente (con notazioni evidenti):

$$C'_{16} = C'_{15}(O'^{12}, Q'^3_1, Q'^3_2, Q'^3_3, Q'^3_4, Q'^3_5) + C'_1(Q'_1, Q'_2, Q'_3, Q'_4, Q'_5),$$

i punti $Q'_1, Q'_2, Q'_3, Q'_4, Q'_5$ – tripli per la C'_{15} – essendo allineati sulla C'_1.

Conviene rilevare dal nostro piano doppio alcune circostanze che ci saranno di guida per stabilire la seconda parte della proposizione.

Si noti che sulla F esiste un sistema lineare $|M|$, di curve iperellittiche unite nella I, il quale ha il genere e la dimensione uguali a cinque, ed il cui grado è otto: si tratta del sistema che sul piano doppio

$$\{C_{12}\}$$

è rappresentato dalle quartiche

$$C_4(O^3, Q_1, Q_2, Q_3),$$

che hanno un punto triplo in O con le tre tangenti fisse OQ_1, OQ_2, OQ_3; o, ciò che è lo stesso, sul piano doppio

$$\{C'_{15} + C'_1\},$$

dalle quintiche

$$C'_5(O'^4, Q'_1, Q'_2, Q'_3, Q'_4, Q'_5).$$

Quest'ultimo sistema contiene entro di sè quello, ∞^4, delle C'_5 spezzate nella C'_1 e in quattro rette per O'. Cioè, sulla F, la $2R$ è una *curva fondamentale* (*monovalente*) ([16]) per $|M|$, ed il sistema residuo è costituito dalle curve che si ottengono prendendo le K a quattro a quattro, cosicchè possiamo scrivere:

$$|M| = |4K + 2R|.$$

Se di questo sistema costruiamo la *superficie immagine* si ritrova *a posteriori* per il piano doppio del tipo c) la genesi di cui al § 8.

([16]) Cfr. op. cit. in ([3]), cap. III, § 38.

Appare ora evidente come si giunga a dimostrare la sufficienza della condizione enunciata.

Dato sulla F il fascio $|K|$ e la curva R (di genere zero e quindi di grado -2), si costruisca il sistema

$$|M| = |4K + 2R|,$$

che risulta di genere cinque, di grado otto, e - per il teorema di Riemann-Roch - di dimensione $r \geq 5$. Se ne deduce, al solito, che $|M|$ è irriducibile, e quindi che $r = 5$. Si ha inoltre che le M sono iperellittiche (poichè sopra ciascuna di esse il fascio $|K|$ sega una g_2^1) e che il sistema $|M|$ è composto con una involuzione, I, del secondo ordine. Allora l'*immagine* di $|M|$ è una superficie F_4 di un S_5, e poichè $|M|$ possiede la curva fondamentale $2R$, che ha otto intersezioni (costituenti quattro coppie della I) con le curve

$$|M - 2R| = |4K|,$$

si ha che la F_4 è un cono. Ciò porta appunto ad un piano doppio del tipo c) (§ 8).

Si può precisare direttamente che sul *cono doppio* F_4 la C_{12}^* di diramazione è una trisecante delle generatrici, e che alla C_{12}^* stessa si deve aggiungere l'intorno del vertice: basta per questo osservare che l'involuzione I determina sopra ogni curva K una g_2^1 che ha un punto doppio nell'intersezione della K stessa con la R.

18. Dai §§ 16 e 17 segue che:

Ogni superficie F rappresentabile mediante un piano doppio del tipo b) la cui curva di diramazione possegga due punti quadrupli infinitamente vicini, lo è anche sopra un piano doppio del tipo c) ([17]).

Sopra ogni K sono determinati razionalmente i due punti, P_1 e P_2, intersezioni della K con la curve R_1 e R_2: se si co-

([17]) Per ulteriori precisazioni e per una proprietà di cui la presente è un caso particolare, cfr. l. cit. in ([2]).

struisce la g_2^1 individuata dalla coppia (P_1, P_2) si ottiene sulla F un'involuzione del secondo ordine che porta al piano b); se invece si considera la g_2^1 che ha un punto doppio in P_1 (o in P_2) si ha una seconda involuzione mediante la quale si giunge al piano doppio c).

Si avverta che i due piani c) che si ottengono valendoci dei punti P_1 o dei punti P_2, sono birazionalmente trasformabili l'uno nell'altro. Infatti esistono due trasformazioni della F in sè, le quali cambiano la R_1 nella R_2, e sopra ogni K, la

$$g_2^1 = |2P_1|,$$

nella

$$g_2^1 = |2P_2|.$$

Una è l'involuzione del secondo ordine mediante la quale la F si rappresenta sul piano doppio b), e che fa corrispondere al punto A di K il punto A' che, sulla K stessa, è definito dalla relazione di equivalenza:

$$A + A' = P_1 + P_2;$$

l'altra si ottiene ponendo:

$$A' = A + P_2 - P_1.$$

19. Terminiamo con l'analisi del piano doppio c').

Nello spazio a quattro dimensioni si consideri il *cono doppio* F_3, del terzo ordine, con una curva di diramazione C_{10}^*, trisecante le generatrici e che passa (semplicemente) per il vertice V (cfr. § 8). Ci domandiamo: che cosa rappresenta l'intorno di V?

Nel § 17 abbiamo risposto alla stessa domanda fatta per il cono doppio F_4 di S_5, la cui curva di diramazione, C_{12}^*, allora non passava per il vertice: in quel caso trovavamo che il vertice dava l'immagine doppia di una curva (di coincidenze per l'involuzione), incidente alle K in un sol punto.

Possiamo lasciarci guidare dall'apparente analogia e supporre che anche l'intorno di V su F_3, rappresenti una curva razionale, θ, contata due volte? Saremmo tratti a conclusioni che si presentano subito assurde. Basterebbe per questo procedere al

calcolo del grado ρ della 2θ, valendoci dell'osservazione che la 2θ è fondamentale per il sistema di genere quattro e di grado sei, rappresentato doppiamente dalle sezioni iperpiane di F_3: troveremmo per ρ un valore in contraddizione con la razionalità della θ stessa.

Come si risolve questo paradosso? Valgono a chiarire la cosa la genesi del cono doppio F_3 di S_4 per proiezione dal cono F_4 di S_5, come è detto nel § 9, e l'esame diretto del piano doppio c'). La risposta è che *l'intorno del vertice V di F_3, rappresenta ora una curva spezzata in una componente doppia (di punti uniti per l'involuzione e unisecante le K), e in una ulteriore curva razionale (fondamentale per il fascio delle K), incidente in un punto alla prima.*

Più precisamente si ha il teorema:

La condizione necessaria e sufficiente affinchè una superficie F, con tutti i generi uguali ad uno, sia rappresentabile sopra un piano doppio del tipo c'):

$$\{ C_{10}(O^7,\ Q_1^3,\ Q_2^3) \},$$

è che la F possegga un fascio (lineare) di curve ellittiche, $|K|$; una curva razionale (irriducile), R, unisecante le K; ed una seconda curva razionale (irriducibile), R', che incontri in un punto la R e sia fondamentale per $|K|$.

La dimostrazione procede in modo del tutto parallelo a quello seguito nel § 17.

Anche in questo caso conviene sostituire al piano doppio dato, quello che se ne ottiene mediante una trasformazione quadratica avente un punto fondamentale in O, e gli altri due fuori della C_{10}. La nuova curva di diramazione, C'_{14}, risulta del quattordicesimo ordine, e presenta le singolarità e lo spezzamento indicati dalla scrittura:

$$C'_{14} = C'_{13}(O'^{10},\ Q_1'^3,\ Q_2'^3,\ Q_3'^3,\ Q_4'^3) + C'_1(Q'_1,\ Q'_2,\ Q'_3,\ Q'_4),$$

i punti Q'_1, Q'_2, Q'_3, Q'_4 essendo allineati sulla retta C'_1.

Su questo piano doppio si rintracciano subito gli elementi predetti, e cioè:

il fascio $|K|$ che è rappresentato dalle rette per O';

la curva razionale R (costituita di punti di coincidenza per l' involuzione I, che risponde al piano doppio), unisecante le K, la quale (contata due volte) ha per immagine la retta C'_1;

la curva razionale R' (trasformata in sè dalla I), che incontra in un punto la R, non ha intersezioni con la K generica, ed è rappresentata dall' intorno del punto (doppio per la C'_{14}) ulteriore intersezione della C'_{13} con la C'_1, fuori di Q'_1, Q'_2, Q'_3 e Q'_4.

Inoltre è opportuno fermare l' attenzione sul sistema $|M'|$ (di curve iperellittiche unite nella I) che nel piano doppio

$$\{C_{10}\}$$

è rappresentato dalle cubiche:

$$C_3(O^2,\ Q_1,\ Q_2),$$

e quindi, sul piano doppio

$$\{C'_{13}+C'_1\},$$

dalle quartiche:

$$C'_4(O'^3,\ Q'_1,\ Q'_2,\ Q'_3,\ Q'_4).$$

Il sistema $|M'|$ (che è completo) ha la dimensione ed il genere uguali a quattro, mentre il suo grado è sei, e si ha:

$$|M'| = |3K+2R+R'|,$$

da cui segue che la curva

$$2R+R'$$

è *fondamentale (monovalente)* per il sistema $|M'|$ stesso.

Allora, viceversa, supposto che F soddisfi alle condizioni enunciate, per dimostrare come essa sia rappresentabile mediante un piano del tipo c'), basta costruire sulla F il sistema (irriducibile):

$$|M'| = |3K+2R+R'|,$$

determinarne i caratteri e la dimensione, osservare che esso è formato di curve iperellittiche e che appartiene ad una involu-

zione del secondo ordine I (costituita dalle g_2^1 che sulle M' segano le K).

La superficie *immagine* di $|M'|$ ha l'ordine uguale a tre, ed appartiene ad un S_4: e poichè il sistema $|M'|$ possiede una curva fondamentale - la $2R+R'$ - che è incontrata in sei punti (costituenti tre coppie della I) dalle curve del sistema residuo:

$$|M'-2R-R'| = |3K|,$$

quella superficie è un conò, F_3. Sulla F_3 la F è rappresentata doppiamente con una curva di diramazione del decimo ordine, C_{10}^*, che incontra in tre punti le generatrici, e passa per il vertice V.

Queste circostanze sono lumeggiate dalle osservazioni che seguono. Le curve M' segnano sopra la K generica una g_2^1 che è individuata dal punto comune alla K e alla R, contato due volte. Quindi ogni generatrice del cono F_3 ha quattro punti di diramazione, uno dei quali cade nel vertice V, il cui intorno però non fa parte per intero della curva di diramazione, poichè esso rappresenta la $2R+R'$, e non soltanto la $2R$.

Consideriamo allora la curva $K=K'$ passante per il punto in cui la R è segata dalla R': poichè la R' è *fondamentale* per il fascio $|K|$, la K' è spezzata nella R' e in una residua curva razionale ([18]). Quindi alla K' risponde su F_3 una generatrice r' la quale, fuori di V, ha due sole intersezioni con la C_{10}^*, che pertanto è tangente alla r' in V.

Dal cono doppio F_3 si passa poi ad un piano del tipo c'), come è detto nel § 8.

20. I risultati a cui siamo giunti nei §§ 17 e 19 mostrano nuovamente il legame che esiste tra i piani doppi dei tipi c) e c').

Se la F è rappresentabile sopra un piano c'), ricorrendo al

([18]) Se indichiamo con θ questa componente della K', da:

$$|K| = |R'+\theta|,$$

segue che la θ biseca la R', essendo la R' di grado -2 e senza intersezioni con le R. Di qui si ha poi subito che la θ è di genere zero.

sistema:

$$|M| = |4K + 2R|,$$

se ne ha anche una rappresentazione sopra un piano c), birazionalmente identico al precedente poichè risponde ad una stessa involuzione I (§ 17). Si tratta di provare che la curva di diramazione di questo piano c):

$$C_{12}(O^9,\ Q_1^3,\ Q_2^3,\ Q_3^3),$$

possiede un punto doppio. Con le solite notazioni, si ha:

$$|M| = |M' + K - R'|,$$

e quindi la curva:

$$\rho = K - R'$$

(di genere zero e grado -2) è *fondamentale* per $|M|$. Allora sul cono F_4 di S_5, immagine del sistema $|M|$, alla ρ corrisponde un punto P, che è doppio per la C_{12}^* di diramazione. Invero sulla F il sistema:

$$|M - \rho| = |M'|$$

è costituito di curve di genere quattro, e quindi le loro immagini su F_4 hanno (fuori di P) dieci soli punti di diramazione. Passando dal cono F_4 alla sua rappresentazione piana, resta dimostrato quanto volevamo.

Viceversa, supposto che la F sia rappresentabile sopra un piano doppio del tipo c), la cui curva di diramazione - oltre alle singolarità che le competono - possegga un punto doppio P, se ne deduce la possibilità di passare ad un piano c').

Infatti all'intorno di P risponde una curva ρ (di genere zero e grado -2) fondamentale per il fascio delle K, e ponendo:

$$R' = K - \rho,$$

si viene a definire una curva razionale senza intersezioni con le K, e che si appoggia in un punto alla R.

21. Possiamo riunire le conclusioni dei §§ 14, 16, 17 e 19 in un solo enunciato:

Data una superficie F, con tutti i generi uguali all'unità, se sopra di essa esiste un fascio (lineare) di curve ellittiche, $|K|$, ed una curva razionale R, e:

1) *se la R (irriducibile) è una bisecante delle K, la F è rappresentabile sopra un piano doppio a'), e viceversa;*

2) *se la R (irriducibile) è una unisecante delle K, la F è rappresentabile sopra un piano doppio del tipo c), e viceversa;*

3) *se la R si spezza in due componenti di genere zero, con un punto in comune, la prima delle quali è una unisecante delle K e la seconda invece non ha con esse alcuna intersezione, la F è rappresentabile sopra un piano doppio del tipo c'), e viceversa;*

4) *se accanto alla R (irriducibile) unisecante le K, si ha una seconda curva razionale (irriducibile) che incontri le K in un punto e non abbia intersezioni con la R, la F è rappresentabile anche sopra un piano doppio del tipo b), la cui curva di diramazione possiede due punti quadrupli infinitamente vicini. E viceversa.*