RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

UGO MORIN

Sulla razionalità dell'ipersuperficie cubica generale dello spazio lineare S_5

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 11 (1940), p. 108-112

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1940__11__108_0>

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1940, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (http://rendiconti.math.unipd.it/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

SULLA RAZIONALITÀ DELL' IPERSUPERFICIE CUBICA GENERALE DELLO SPAZIO LINEARE S_5

Nota di UGO MORIN *a Padova.*

Sunto. — *La razionalità dell' ipersuperficie cubica generale $V_4^{(3)}$ dello spazio lineare S_5 risulta dall' esistenza nella $V_4^{(3)}$ di una superficie rigata razionale normale del quarto ordine, al cui insieme (razionale) delle corde i punti della $V_4^{(3)}$ sono biunivocamente riferiti.*

1. - Supponiamo che in un'ipersuperficie cubica irriducibile $V_4^{(3)}$ dello spazio lineare S_5 sia contenuta una superficie algebrica F, del quarto ordine, rigata razionale normale. Poichè per un punto generico dell' S_5 passa una, ed una sola, corda della F, i punti della $V_4^{(3)}$ risultano riferiti biunivocamente alle corde della F, cioè la $V_4^{(3)}$ è *razionale.*

2. - Ora proponiamoci di dimostrare che nell' ipersuperficie cubica *generale* $V_4^{(3)}$ dell' S_5 sono contenute delle superficie F. Consideriamo perciò il sistema delle rigate razionali normali del quarto ordine, $F_2^{(4)}$, dell' S_5 che hanno come curve direttrici di ordine minimo ∞^1 coniche ([1]). Una di queste rigate è rappresentata su di un piano π dal sistema lineare delle cubiche $|C^{(3)}|$ con un punto-base doppio e un punto-base semplice; ed essa è generata dalle rette che congiungono le coppie di punti corrispondenti in una proiettività tra due coniche generiche dell' S_5.

([1]) E. BERTINI, *Introduzione alla geometria proiettiva degli iperspazi* [G. Principato, Messina 1923], pagg. 355-368.

Poichè due sistemi lineari di cubiche $|C^{(3)}|$ sono cremonianamente (anzi omograficamente) equivalenti, due generiche superficie $F_2^{(4)}$ si corrispondono in un'omografia dell' S_5, cioè le $F_2^{(4)}$ a coniche direttrici formano un unico sistema algebrico (irriducibile) Φ.

Calcoliamo la dimensione D di questo sistema Φ (doppia della dimensione del sistema delle coniche dell' S_5, aumentata della dimensione 3 del sistema delle proiettività tra due coniche, e diminuita di 2 per il fatto che abbiamo considerate due arbitrarie delle ∞^1 coniche della $F_2^{(4)}$), cioè

$$(1) \qquad D = 2[(5-2)3+5]+3-2 = 29\,.$$

Dunque: Le rigate $F_2^{(4)}$ dell' S_5, a coniche direttrici, formano un sistema algebrico irriducibile Φ di dimensione $D = 29$, ([2]).

3. - Consideriamo nell' S_5 due piani (non incidenti) σ e σ' e una determinata omografia (non degenere) Ω tra questi due piani. Le rette che congiungono i punti di una conica $C^{(2)}$ del piano σ coi punti corrispondenti in Ω nel piano σ' generano una $F_2^{(4)}$ (n. 2). Al variare di $C^{(2)}$ in σ si ottiene in questo modo un sottosistema di Φ (n. 2). Se la $C^{(2)}$ si spezza in due rette (del piano σ), la $F_2^{(4)}$ corrispondente si scinde in due quadriche con una generatrice comune.

In conclusione: Del sistema Φ di $F_2^{(4)}$ (dipendenti da $D = 29$ parametri) fa parte il sistema φ delle coppie di quadriche con una generatrice comune (dipendenti, come si verifica facilmente, da $d = 28$ parametri).

4. - Il sistema lineare di tutte le ipersuperficie cubiche $V_4^{(3)}$ dell' S_5 ha la dimensione $R = \binom{5+3}{3} - 1 = 55$. Questo sistema determina su una $F_2^{(4)}$ un sistema lineare di curve $|C^{(12)}|$, triplo del sistema delle sezioni iperpiane dell' $F_2^{(4)}$. Il genere π'

([2]) Ciò segue anche dall' osservazione che le omografie dell' S_5 dipendono da 35 parametri e che una $F_2^{(4)}$ è mutata in se da ∞^6 omografie.

e il grado n' di questo sistema di $|C^{(12)}|$ sono quindi

$$(2)\qquad \begin{cases} \pi' = 3n - 2 = 3 \,.\, 4 - 2 = 10 \\ n' = 3^2 n = 9 \,.\, 4 = 36\,; \end{cases}$$

e poichè questo sistema lineare di $C^{(12)}$ è *completo,* la sua dimensione è $r' = n' - \pi' + 1 = 27$, ([3]). Cioè: Condizione necessaria e sufficiente affinchè una $V_4^{(3)}$ dell' S_5 contenga una $F_2^{(4)}$ è che essa passi per 28 punti generici dell' $F_2^{(4)}$.

5. – Verifichiamo il seguente **lemma I**: *Per due $F_2^{(4)}$ generiche dell' S_5 non passa alcuna ipersuperficie cubica $V_4^{(3)}$* (cioè 28 punti generici di una $F_2^{(4)}$ e 28 dell'altra pongono alle $V_4^{(3)}$ 56 condizioni indipendenti (n. 4)).

Perciò basterà verificare che per due *particolari* di quelle superficie non passa alcuna $V_4^{(3)}$. Consideriamo due superficie, $F_2^{(4)}$ e $\overline{F}_2^{(4)}$ riducibili del sistema φ (n. 3). Indichiamo non α, β e $\overline{\alpha}$, $\overline{\beta}$ gli spazi lineari S_3 delle coppie di quadriche $F_2^{(4)}$ e $\overline{F}_2^{(4)}$. Queste quadriche (e quegli spazi S_3) siano in posizione generica. Una $V_4^{(3)}$ che contenesse $F_2^{(4)}$ e $\overline{F}_2^{(4)}$ avrebbe in comune con lo spazio α la quadrica dell' $F_2^{(4)}$ relativa ad α e i 4 punti generici comuni allo spazio α e alla $\overline{F}_2^{(4)}$, cioè la $V_4^{(3)}$ conterrebbe totalmente lo spazio α. Per analogo motivo la $V_4^{(3)}$ dovrebbe contenere gli altri spazi lineari S_3, β, $\overline{\alpha}$, $\overline{\beta}$. Ma è facile vedere che i 4 spazi lineari S_3 generici α, β, $\overline{\alpha}$, $\overline{\beta}$ non possono appartenere ad una $V_4^{(3)}$. Infatti un S_4 generico per α taglierebbe ulteriormente la $V_4^{(3)}$ in un' iperquadrica Q_3 dell' S_4 che dovrebbe contenere tre piani generici (la sezioni degli spazi β, $\overline{\alpha}$, $\overline{\beta}$ coll' S_4), ciò che manifestamente non è possibile ([4]).

([3]) Infatti il sistema $|C^{(12)}|$ determina su una $C^{(4)}$-sezione della $F_2^{(4)}$ la serie g_{12}^{12} (triplo *minimo* della g_4^4). Una $C^{(12)}$ che contiene (cioè si spezza in) 3 curve $C^{(4)}$ soddisfa a $(12+1)+(8+1)+(4+1)=27$ condizioni; cioè la dimensione di $|C^{(12)}|$ è 27 (e non meno).

([4]) Infatti un'iperquadrica dell' S_4 che contenga dei piani è singolare. Se essa è un cono, quei piani devono passare per un punto (o per una retta); e se essa è degenere almeno due di tre dei suoi piani devono stare in un medesimo S_3.

6. – Verifichiamo ora il seguente **lemma II**: *Se due superficie $F_2^{(4)}$ e $\overline{F}_2^{(4)}$ hanno un punto in comune, esse appartengono in generale ad una, ed una sola, $V_4^{(3)}$.*

Almeno una di tali $V_4^{(3)}$ esiste certamente, poichè essa deve soddisfare (n. 4) al più a $2.28 - 1 = 55$ condizioni linearmente indipendenti. Per provare che ne esiste una soltanto, basterà verificare che due opportune superficie $F_2^{(4)}$ e $\overline{F}_2^{(4)}$, con un punto in comune, appartengono ad una sola $V_4^{(3)}$. Scegliamo le due superficie riducibili del n. 5, i cui spazi lineari S_3 associati α, β e $\overline{\alpha}$, $\overline{\beta}$ siano ancora in posizione generica, ma la quadrica Q_2 di α e la quadrica $\overline{Q}_2$ di $\overline{\alpha}$ abbiamo un punto in comune (e non vi siano altre particolarità). Una $V_4^{(3)}$, contenente queste due superficie riducibili, contiene totalmente gli spazi β e $\overline{\beta}$ (n. 5); ed invece è segata dallo spazio α secondo la quadrica Q_2 e il determinato piano che passa per i 3 punti d'incontro di α coll' $\overline{F}_2^{(4)}$, diversi dal punto comune a Q_2 e $\overline{Q}_2$.

Ora se vi fossero due (e quindi un fascio di) $V_4^{(3)}$ per queste due superficie $F_2^{(4)}$ e $\overline{F}_2^{(4)}$, poichè l'intersezione della $V_4^{(3)}$ generica del fascio collo spazio α è fissa, una $V_4^{(3)}$ particolare del fascio dovrebbe contenere totalmente lo spazio α. Ma questa particolare $V_4^{(3)}$ dovrebbe contenere totalmente anche lo spazio $\overline{\alpha}$ (avendo con esso in comune la $\overline{Q}_2$, due punti generici e la retta intersezione di $\overline{\alpha}$ con α); cioè verrebbe a contenere tutti i 4 spazi α, β, $\overline{\alpha}$, $\overline{\beta}$, ciò che abbiamo visto essere assurdo (n. 5).

7. – Rappresentiamo le $V_4^{(3)}$ dell' S_5 mediante i punti di uno spazio lineare S_{55} (n. 4). Alle $V_4^{(3)}$ per una $F_2^{(4)}$ generica corrispondono nell' S_{55} i punti di uno spazio lineare S_{27} (n. 4). Abbiamo così nell' S_{55} un sistema algebrico irriducibile Σ di spazi S_{27}, dipendenti da $D = 29$ parametri (n. 2).

Se per un punto generico dell' S_{55} passano ∞^1 spazi S_{27} del sistema Σ, ciò significa che una $V_4^{(3)}$ generica dell' S_5 contiene ∞^1 rigate $F_2^{(4)}$ (*e quindi essa è razionale* (n. 1)).

8. – Se questa circostanza non si verifica, i punti degli ∞^{29} spazi S_{27} del sistema Σ formano una varietà algebrica irriducibile $W_{55-\lambda}$ (di dimensione $55-\lambda$; $\lambda \geq 1$), e per un punto generico di questa $W_{55-\lambda}$ passano $\infty^{\lambda+1}$ spazi S_{27}.

Se due S_{27} di Σ, aventi un punto in comune, si tagliano di conseguenza in un S_ρ ($\rho \geq 0$), deve essere $27+(\lambda+1)-\rho \leq 29$, cioè

$$\rho \geq \lambda - 1. \tag{3}$$

Se nella (3) vale il segno $=$, un S_{27} generico di Σ incontra tutti gli altri S_{27} di Σ, quindi due S_{27} generici di Σ si tagliano in un $S_{\lambda-1}$. Ciò significa che due $F_2^{(4)}$ generiche dell' S_5 apparterrebbero ad $\infty^{\lambda-1}$, ($\lambda-1 \geq 0$), ipersuperficie $V_4^{(3)}$, in contrasto col lemma I (n. 5).

Se nella (3) vale il segno $>$, due S_{27} di Σ con un punto in comune hanno di conseguenza in comune uno spazio lineare S_ρ ($\rho \geq \lambda \geq 1$). Ciò significa che due $F_2^{(4)}$ dell' S_5 con un punto in comune (quindi appartenenti ad una $V_4^{(3)}$), dovrebbero di conseguenza appartenere ad ∞^ρ ($\rho \geq 1$) $V_4^{(3)}$, in contrasto col lemma II (n. 6). Dunque l'unica circostanza possibile per gli S_{27} del sistema Σ è quella del n. 7, cioè *l'ipersuperficie cubica generale dell' S_5 è razionale.*

(Pervenuto in Redazione il 10 agosto 1940-XVIII)