

RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

GIUSEPPE ZWIRNER

**Sopra un teorema sulle equazioni differenziali
del secondo ordine**

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 10 (1939), p. 65-68

[<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1939__10__65_0>](http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1939__10__65_0)

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1939, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*
<http://www.numdam.org/>

SOPRA UN TEOREMA SULLE EQUAZIONI DIFFERENZIALI DEL SECONDO ORDINE

Nota di GIUSEPPE ZWIRNER (a Padova)

In una Nota recente ⁽¹⁾ ho dato una dimostrazione semplicissima del seguente teorema :

Se $f(x, y, y')$ è continua rispetto a (y, y') e misurabile rispetto a x nello strato

$$S: a \leq x \leq b, \quad |y| < +\infty, \quad |y'| < +\infty,$$

e riesce minore, in modulo, di una funzione $\lambda(x)$ (≥ 0) sommabile in $a \leq x \leq b$, l'equazione

$$(1) \quad y(x) = \int_a^x dt \int_a^t f(u, y(u), y'(u)) du + \alpha + \\ + \frac{x-a}{b-a} \left[\beta - \alpha - \int_a^b dt \int_a^t f(u, y(u), y'(u)) du \right],$$

ammette sempre almeno una soluzione, per α e β numeri reali prefissati ⁽²⁾.

⁽¹⁾ G. ZWIRNER: *L'osservazione su un problema ai limiti per le equazioni differenziali* [Bollettino U. M. I. serie II, anno I, (1939), pp. 334-336].

⁽²⁾ Cfr. G. SCORZA DRAGONI: *Elementi uniti di trasformazioni funzionali e problemi di valori ai limiti* [Rendiconti del Seminario Matematico della R. Università di Roma, serie IV. vol. 2 (1938), pp. 255-275]. § 3.

In una Nota successiva ⁽³⁾ ho trattato lo stesso problema con $f(x, y, y')$ definita in un insieme del tipo

$$C: a \leq x \leq b, \quad \sigma(x) \leq y \leq \tau(x), \quad -\infty < y' < +\infty$$

e soddisfacente ad una conveniente diseguglianza del tipo

$$|f(x, y, y')| \leq \psi(y) \varphi(y') + \chi(x).$$

A questo scopo mi sono servito di un ragionamento elementare che sfrutta il teorema ricordato e, previe alcune semplici modificazioni, una dimostrazione già svolta da SCORZA DRAGONI ⁽⁴⁾ in una questione del tutto analoga.

Lo stesso ragionamento si presta senza difficoltà a stabilire con una semplicità assoluta anche il seguente teorema, rilevato dal CINQUINI ⁽⁵⁾:

La (1) ammette almeno una soluzione se $f(x, y, y')$, ovunque finita nella solita striscia S , è continua rispetto a (y, y') , misurabile rispetto a x ; se in ogni regione limitata di S $f(x, y, y')$ risulta minore in modulo di una conveniente funzione non negativa e sommabile in $a \leq x \leq b$; e se inoltre

$$|f(x, y, y')| \leq \psi(y) \varphi(y') + \chi(x),$$

dove $\psi(u)$ è non negativa e sommabile in $-\infty < u < +\infty$ e $\chi(x)$ in $a \leq x \leq b$ e dove $\varphi(u)$ è continua e positiva in $-\infty < u < +\infty$, con

$$(2) \quad \int_0^{+\infty} \frac{u}{\varphi(u)} du = \int_0^{-\infty} \frac{u}{\varphi(u)} du = +\infty$$

e

$$|u| < K \varphi(u) \quad (K = \text{cost.} > 0),$$

⁽³⁾ G. ZWIRNER: *Un criterio di esistenza per un problema di valori al contorno per equazioni differenziali del secondo ordine* [Rendiconti del Seminario Matematico della R. Università di Padova, questo volume].

⁽⁴⁾ Cfr. loc. cit. ⁽²⁾ pp. 268-275.

⁽⁵⁾ S. CINQUINI: *Sopra i problemi di valori al contorno per equazioni differenziali del secondo ordine* [Annali R. Scuola Normale Superiore di Pisa, vol. VIII (1939), pp. 271-283], pp. 272-276.

il rapporto $\frac{u}{\varphi(u)}$ potendosi supporre non limitato quando è $\chi(x) \equiv 0$.

In questa Nota mi propongo di sviluppare la dimostrazione cui ho alluso, la quale risulta, come è naturale, più semplice di quella che ho dato pel caso di $f(x, y, y')$ definita in C .

In un prossimo lavoro mi occuperò delle equazioni d'ordine superiore ⁽⁶⁾.

1. Se $y(x)$ è una qualunque funzione verificante la (1), dalla $|f(x, y, y')| \leq \psi(y) \varphi(y') + \chi(x)$, segue, quasi ovunque,

$$(3) \quad |y''(x)| \leq \psi(y(x)) \varphi(y'(x)) + \chi(x);$$

da cui, posto $K_1 = K \int_a^b \chi(x) dx$,

$$(4) \quad \int_{y(t_1)}^{y(t_2)} \psi(u) du \geq \pm \int_{y'(t_1)}^{y'(t_2)} \frac{u}{\varphi(u)} du - K_1,$$

$$(5) \quad \int_{y(t_1)}^{y(t_2)} \psi(u) du \leq \pm \int_{y'(t_1)}^{y'(t_2)} \frac{u}{\varphi(u)} du + K_1,$$

a seconda che in $t_1 \leq x \leq t_2$, con $t_1 < t_2$ punti di $a \leq x \leq b$, è $y'(x) \geq 0$ o $y'(x) \leq 0$.

Poichè $\psi(u)$ è non negativa e sommabile su tutto l'asse reale, gli integrali a primo membro delle (4), (5) risultano sempre minori in modulo di $\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(u) du$. Di qui, dalle (2) e dall'essere

$y'(\xi) = \frac{\beta - \alpha}{b - a}$ in un conveniente punto ξ di $a < x < b$, si deduce ⁽⁷⁾

⁽⁶⁾ Di ciò ho già fatto cenno nel mio lavoro: *Problemi di valori ai limiti per equazioni differenziali ordinarie* [Rendiconti del Seminario Matematico della R. Università di Padova, questo volume].

⁽⁷⁾ Cfr. L. TONELLI: *Sull'equazione differenziale $y'' = f(x, y, y')$* [Annali R. Scuola Normale Superiore di Pisa, vol. VIII (1939), pp. 76-88], n. 6, c); G. ZWIRNER: *Su un problema di valori al contorno per equazioni differenziali del secondo ordine* [Rendiconti del Seminario Matematico della R. Università di Roma, serie IV, vol. 3 (1939), pp. 57-70], pag. 59.

$$(6) \quad |y'(x)| < \bar{H},$$

con $\bar{H}$ costante positiva dipendente soltanto da $a, b, \alpha, \beta, \phi(u), \varphi(u), \chi(x)$ e non da $f(x, y, y')$. Dalla (6) si trae

$$(7) \quad |y(x)| < H, \quad |y'(x)| < H,$$

se $H = |\alpha| + \bar{H}(b-a)$.

Sia ora $\lambda(x) \geq 0$ una funzione sommabile in $a \leq x \leq b$ tale che

$$|f(x, y, y')| < \lambda(x)$$

per $|y| < H, |y'| \leq H$, e poniamo

$$f_0(x, y, y') = f(x, y, y')$$

oppure

$$f_0(x, y, y') = \lambda(x), \quad f_0(x, y, y') = -\lambda(x),$$

a seconda che

$$|f(x, y, y')| \leq \lambda(x)$$

oppure

$$f(x, y, y') > \lambda(x), \quad f(x, y, y') < -\lambda(x),$$

di guisa che se $|y| \leq H, |y'| \leq H$, è $f_0(x, y, y') = f(x, y, y')$.

La funzione $f_0(x, y, y')$ così definita risulta evidentemente continua rispetto a (y, y') e misurabile rispetto a x in S , avendosi ivi inoltre

$$|f_0(x, y, y')| \leq \phi(y) \varphi(y') + \chi(x)$$

e

$$|f_0(x, y, y')| \leq \lambda(x).$$

Ma allora il problema

$$y''(x) = f_0(x, y(x), y'(x)), \quad y(a) = \alpha, \quad y(b) = \beta$$

ammette almeno una soluzione, $y_0(x)$, assolutamente continua insieme alla sua derivata prima; $y_0(x)$ soddisfa, evidentemente, in tutto $a \leq x \leq b$, ad una disuguaglianza analoga alla (3) e quindi alle (7) ed è perciò anche un integrale dell'equazione (1).