

RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

UGO MORIN

**Massima dimensione dei sistemi lineari di
superficie algebriche dello spazio a curva
caratteristica di dato genere**

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 10 (1939), p. 21-34

http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1939__10__21_0

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1939, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

MASSIMA DIMENSIONE DEI SISTEMI LINEARI DI SUPERFICIE ALGEBRICHE DELLO SPAZIO A CURVA CARATTERISTICA DI DATO GENERE

di UGO MORIN a Padova.

JUNG e CASTELNUOVO ⁽¹⁾ hanno trattato e risolto il problema della determinazione dei sistemi lineari di curve piane di dato genere π e massima dimensione. In questa nota classifichiamo i sistemi lineari di superficie algebriche dello spazio, a curva-caratteristica (variabile) irriducibile di dato genere π , e massima dimensione.

Si presenta opportuna la considerazione a parte dei *sistemi lineari di monoidi di 2^a specie e indice q* ; cioè dei sistemi di superficie d'ordine m con un punto-base multiplo secondo $m-1$ (moneidi), la cui immagine sia una curva d'ordine q (punto fondamentale di 2^a specie).

Arrivo alla conclusione che la dimensione massima dei sistemi lineari di superficie è $r = 2\pi + 5$ se non sono sistemi di monoidi di 2^a specie, ed $r = 3\pi + 6 - 2q$, ($2q \leq \pi$), se sono sistemi di monoidi di 2^a specie e indice q . Questi sistemi si possono suddividere in 6 tipi, di cui 5 esistono per ogni valore di π e sono a curva-caratteristica iperellittica (nn. 6, 7) e per uno, a curva-caratteristica non iperellittica, è $\pi = 6$, (n. 22).

(¹) JUNG G., *Ricerche sui sistemi lineari di curve piane algebriche* [Annali di Mat. t. 15, 16 (2), (1887-88)].

CASTELNUOVO G., *Massima dimensione dei sistemi lineari di curve piane di dato genere* [Annali di Mat. t. 18 (2), (1890)].

1. Si abbia nello spazio lineare S_3 un sistema lineare *completo* di superficie Φ con la curva caratteristica (variabile) γ irriducibile e di genere (effettivo) π . Poichè i sistemi lineari di superficie a curva-caratteristica razionale o ellittica sono completamente conosciuti, supporremo $\pi \geq 2$. Se n è il grado del sistema $|\Phi|$ ed r la sua dimensione, quando è $r > \pi + 1$ il sistema Φ è semplice (tale essendo la serie caratteristica su una γ) ed inoltre

$$(1) \quad r = n - \pi + 2.$$

Noi ci proponiamo di determinare il valore massimo che per un dato π può avere r , e di descrivere i sistemi lineari di superficie corrispondenti a questo valore. Vedremo che rispetto a questo problema si presenta naturale la suddivisione dei sistemi lineari di superficie in 2 classi (n. 6, 7).

2. Consideriamo la varietà algebrica immagine proiettiva di $|\Phi|$. Essa è una M_3^* , a 3 dimensioni e di ordine n , normale in uno spazio lineare S_r , a curve-sezioni C di genere π . Supponiamo che le C siano iperellittiche. Allora le superficie-sezioni F della M_3^* sono a curve-sezioni iperellittiche. Vogliamo ricordare le seguenti proprietà stabilite dal CASTELNUOVO ⁽²⁾.

Una superficie (non rigata) a curve-sezioni iperellittiche di genere $\pi \geq 2$:

a) contiene un fascio razionale di coniche C^2 (quindi è razionale);

b) ha l'ordine $n = 4\pi + 4 - \nu$, dove $\nu \geq 0$ è il numero delle coniche degeneri del fascio $|C^2|$;

c) si rappresenta nel piano mediante il sistema $|\Gamma|$ delle curve d'ordine $\pi + 3$ con un punto-base $(\pi + 1)$ -uplo, Ω , ordinario, un punto-base doppio e ν punti-base semplici; oppure mediante un sistema $|\Gamma|$ di curve d'ordine $2\pi - \mu + 2$ con un punto base Ω multiplo secondo $2\pi - \mu$, a cui sono infinitamente vicini $\pi - \mu$ punti doppi, e ν punti-base semplici.

⁽²⁾ CASTELNUOVO G., *Sulle superficie algebriche le cui sezioni piane sono curve iperellittiche* [Rendiconti del Circolo Mat. di Palermo, t. 4 (1890)].

3. Verifichiamo che per $n \geq 3\pi + 2$ (e quindi la dimensione $\geq 2\pi + 3$) da c) segue che se due piani α e β di due coniche del fascio $|C^2|$ hanno in comune un punto P , tutte le coniche del fascio passano per P .

Si consideri infatti il sistema lineare $|\Gamma|$ rappresentativo della F in un piano ($v \leq \pi + 2$). Se i piani α e β sono incidenti in un punto, allora affinchè un iperpiano per α contenga anche β dovranno essere soddisfatte due condizioni.

Quindi (lè Γ essendo di ordine m , n. 2), se consideriamo il sistema $|\Gamma^{m-1}|$, residuo del sistema $|\Gamma|$ rispetto ad una retta a per Ω (immagine della conica C^2 del piano α) e vogliamo che affinchè questo sistema contenga la retta b per Ω (immagine della conica C^2 del piano β) siano soddisfatte due condizioni, o il sistema $|\Gamma^{m-1}|$ dovrebbe subordinare sulla retta b una serie g_2^1 , oppure il punto Ω dovrebbe essere per $|\Gamma^{m-1}|$ multiplo dell'ordine $m - 2$.

La prima eventualità si esclude, poichè se essa si verificasse il sistema $|\Gamma^{m-1}|$ sarebbe composto con un'involuzione piana, ciò che è escluso poichè (dall'ipotesi $r \geq 2\pi + 3$ segue che) la sua dimensione è $r' \geq 2\pi$ e il suo genere è $\pi' = \pi - 1$ ⁽³⁾.

La seconda eventualità invece si verifica esclusivamente quando tutte le tangenti alle Γ nel punto Ω multiplo dell'ordine $m - 2$ sono fisse, cioè questo punto è immagine di un punto P della F comune a tutte le coniche C^2 , c. v. d.

4. Una M_3^2 dell' S_r a curve-sezioni iperellittiche (che non sia generata da un fascio ellittico di piani, nel qual caso non è razionale ed ha l'irregolarità superficiale $= \pi$) contiene un fascio razionale di quadriche Q . Supponiamo

$$(2) \quad r \geq 2\pi + 5, \quad \text{cioè} \quad n \geq 3\pi + 3.$$

Allora (n. 3) se gli S_3 di due quadriche Q hanno un punto P in comune, tutte le quadriche del fascio $|Q|$ passano per P .

⁽³⁾ Quindi la serie-caratteristiche avendo dimensione maggiore della serie canonica, è semplice.

Verifichiamo che ciò nell'ipotesi (2) può verificarsi soltanto se le Q sono coni col vertice in P , e quindi la M_3^n stessa è un cono.

Se le Q non sono coni col vertice in P , questo punto è multiplo per la M_3^n dell'ordine $\pi + 1$, ⁽⁴⁾. Le rette tangenti alla M_3^n in P , cioè i piani tangenti alle Q in P , formano dunque un cono K_3 , dell'ordine $\pi + 1$. Poichè le rette delle Q per il punto P stanno a coppie nei piani del cono K_3 , il cono K_2 da esse generato ha l'ordine $\nu \geq \pi + 2$. Se la superficie-sezione F generica non è rigata, poichè essa contiene ν rette (ν = ordine di K_2) per il punto P , sarà (n. 2) $n = 4\pi + 4 - \nu \leq 3\pi + 2$; in contrasto coll'ipotesi (2).

Se le F per P sono *rigate*, poichè le loro curve-sezioni sono normali ⁽⁵⁾ esse sono coni col vertice in P , cioè la M_3^n stessa è un cono.

5. Se la M_3^n non è un cono, si potrà quindi proiettarla biunivocamente dall' S_3 di una quadrica del fascio $|Q|$ sopra uno spazio S_{r-1} . La proiezione sarà una varietà $M_3^{n_1}$, d'ordine $n_1 = n - 6$, a curve-sezioni di genere $\pi_1 = \pi - 2$. Infatti un'iperpiano dell' S_r per l' S_3 sega la M_3^n nella quadrica Q dell' S_3 e in una superficie F^{n-2} , d'ordine $n - 2$, a curve-sezioni di genere $\pi - 1$. Questa F^{n-2} ha in comune con la Q dell' S_3 una conica, dalla quale si proietta in una F^{n-6} a curve-sezioni di genere $\pi - 2$.

Poichè per la $M_3^{n_1}$ è ancora soddisfatta la disuguaglianza (2), si potrà a partire dall' S_3 di una sua Q ripetere l'operazione di proiezione, fino ad arrivare ad una varietà M_3^* :

- a) non cono, a curve-sezioni razionali o ellittiche;
- b) cono, a curve-sezioni iperellittiche di genere $\pi^* \geq 0$.

⁽⁴⁾ Ciò risulta sia dalla considerazione del sistema lineare rappresentativo in un piano della superficie-sezione F per P (n. 2); sia osservando che da P la M_3^n si proietta sopra un S_{r-1} in una M_3 generata da un fascio razionale di piani, quindi di ordine $r - 3 = n - (\pi + 1)$.

⁽⁵⁾ Infatti, se la F non è un cono, un S_{r-1} generico per una sua generatrice g sega la F ulteriormente in una curva irriducibile la quale, dovendo avere lo stesso genere π della rigata, apparterrà ad un S_{r-2} . Ma allora il fascio degli S_{r-1} per l' S_{r-2} è riferito proiettivamente alle g della F , cioè $\pi = 0$.

Nel caso *b*) la M_3^* contiene un fascio di coni (quadrici) i cui vertici generano una curva di un certo ordine i . Conveniamo di chiamare una tale M_3^* un *pseudo-cono di indice i* . In particolare dunque un pseudo-cono di indice 0 è un cono.

Se la M_3^* è, nell'ipotesi *a*), a curve-sezioni razionali (d'ordine $n^* = 2$), cioè una quadrica, poichè $\pi = 2q$ (cioè pari), sarà $n = 6q + n^* = 3\pi + n^* \leq 3\pi + 4$; cioè inferiore all'ipotesi (2).

Se la M_3^* è a curve-sezioni ellittiche d'ordine n^* , poichè $\pi = 2q + 1$ (cioè dispari) sarà

$$(3) \quad n = 6q + n^* = 3\pi + n^* - 3.$$

Per raggiungere nella (3) un valore di n compatibile colla (2) bisogna fare $n^* = 6$. E non è possibile supporre $n^* > 6$ poichè una M_3^* di quell'ordine, a curve-sezioni ellittiche e non cono, non può contenere un fascio di quadriche ⁽⁶⁾.

6. Proviamo la effettiva esistenza di 3 tipi proiettivamente distinti di M_3^* in corrispondenza di $n^* = 6$; e diamone i relativi sistemi lineari rappresentati nell' S_3 . Anzi noi proveremo l'esistenza delle M_3^* attraverso a quella dei loro sistemi rappresentativi.

Una M_3^* a curve-sezioni ellittiche d'ordine $n^* = 6$, contenente un fascio di quadriche e non conica, può essere rappresentata nell' S_3 da un sistema lineare di:

I) quadriche con 2 punti-base:

II) superficie cubiche con 3 rette-base sghembe;

III) superficie cubiche con un punto-base doppio O , una retta-base l per O , ed una conica-base C^2 appoggiata ad l ⁽⁷⁾.

In corrispondenza a queste M_3^* (n. 5) avremo delle M_3^* dell' S_3 , a curve sezioni di genere $\pi = 2q + 1$, con

$$(4) \quad r = 2\pi + 5, \quad n = 3\pi + 3.$$

⁽⁶⁾ ENRIQUES F., *Sui sistemi lineari di superficie algebriche ad intersezioni variabili iperellittiche* [Mathem. Annalen, t. 46 (1896)].

⁽⁷⁾ ENRIQUES F., loco cit. ⁽⁶⁾. (ho fatti degenerare alcuni degli elementi base ivi indicati, affinchè la M_3^* contenga un fascio di quadriche).

rappresentate nell' S_3 da un sistema lineare di superficie Φ :

- I) d'ordine $q + 2$, con 2 punti-base multipli d'ordine $q + 1$;
- II) d'ordine $q + 3$, con 3 rette-base sghembe, di cui due semplici ed una multipla d'ordine $q + 1$;
- III) d'ordine $q + 3$, con un punto-base O multiplo d'ordine $q + 2$, per esso una retta-base l multipla d'ordine $q + 1$, ed una conica-base semplice, appoggiata alla l .

Infatti si passa dal sistema lineare delle $|\Phi|$, rappresentativo della M_3^* e al cui fascio di quadriche Q corrisponde un certo fascio di piani dell' S_3 , costruendo il sistema residuo di Φ rispetto ad gruppo di q piani di quel fascio (e viceversa).

7. Supponiamo ora che la M_3^* sia un cono che dal vertice P proietta una superficie a curve-sezioni iperellittiche (ellittiche, razionali) di genere π^* , e di massima dimensione (n. 5, b). Indicati con r^* ed n^* la dimensione dello spazio d'appartenenza e l'ordine della M_3^* , sarà

$$(5) \quad r^* = 3\pi^* + 6, \quad n^* = 4\pi^* + 4;$$

per $\pi^* \geq 2$ in base al n. 2; per $\pi^* = 1$ in quanto il cono a curve-sezioni ellittiche e di ordine massimo, che contiene un fascio di quadriche, è dell' 8° ordine; per $\pi^* = 0$ poichè da P si proietterà una superficie di VERONESE, oppure una rigata del 4° ordine (che contiene un fascio di coniche).

La M_3^* è rappresentata nell' S_3 da un sistema lineare di superficie d'ordine m , con un punto-base O multiplo dell'ordine $m - 1$ ed $m - 1$ rette-base infinitesime nei successivi intornoi infinitesimali di O (cioè aventi in O un unico piano tangente fisso); ed inoltre in un piano generico α

- I) per $m = \pi^* + 3$: un punto-base Ω multiplo secondo $\pi^* + 1$ ed un punto-base doppio;
- II) per $m = 2\pi^* - \mu + 2$, ($\mu \leq \pi^*$): un punto-base Ω multiplo secondo $2\pi^* - \mu$, a cui sono infinitamente vicini $\pi^* - \mu$ punti doppi.

Infatti se nel piano affine (x, y) la superficie-sezione F del

cono M_3^* è rappresentata dal sistema lineare di curve di equazione $f(x, y) = 0$ (n. 2), M_3^* sarà rappresentato nello spazio affine (x, y, z) da $ax + f(x, y) = 0$.

Per la corrispondente M_3^* sarà quindi, posto $2q = \pi - \pi^*$, cioè $\pi = \pi^* + 2q$:

$$(6) \quad \begin{cases} r = 4q + 3\pi^* + 6 = 3\pi + 6 - 2q = 2\pi + 6 + \pi^* \\ n = 6q + 4\pi^* + 4 = 4\pi + 4 - 2q = 3\pi + 4 + \pi^*, \end{cases}$$

ed essa è rappresentata nell' S_3 da un sistema lineare di superficie Φ d'ordine $m + q$, con un punto-base O multiplo dell'ordine $m + q - 1$ ed $m - 1$ rette-base infinitesime nei suoi successivi intorni infinitesimali; ed inoltre in un piano generico α

I) per $m = \pi^* + 3$: un punto-base Ω multiplo secondo $\pi^* + q + 1$ ed un punto-base doppio;

II) per $m = 2\pi^* - \mu + 2$, ($\mu \leq \pi^*$): un punto-base Ω multiplo secondo $2\pi^* - \mu + q$, a cui sono infinitamente vicini $\pi^* - \mu$ punti doppi.

La retta $O\Omega$ viene ad avere per le Φ^{m+q} la molteplicità effettiva $m + q - 2$, e le quadriche Q corrispondenti ai piani per la retta $O\Omega$ sono coni, i cui vertici descrivono una curva d'ordine q , immagine del punto O . Cioè le M_3^* sono pseudo-coni di indice q (n. 5).

Questi sistemi lineari di superficie Φ^{m+q} con un punto-base O multiplo dell'ordine $m + q - 1$ (monoidi), la cui immagine è una curva (punto fondamentale di 2^a specie) verranno detti sistemi lineari di monoidi di 2^a specie di indice q .

8. Studiamo ora le M_3^* normali dell' S_3 a curve-sezioni non iperellittiche ($\pi > 2$), per le quali i valori di r ed n possono raggiungere (od eventualmente superare) i valori massimi (4) o (6).

Per garantire la razionalità della M_3^* è sufficiente che supponiamo nulla la sua irregolarità superficiale⁽⁸⁾. Infatti, poichè

(⁸) SEVERI F., *Fondamenti per la geometria sulle varietà algebriche* [Rendiconti del Circolo Mat. di Palermo, t. 28 1909].

$n > 2\pi - 2$, la superficie-sezione F è allora, in base ad un teorema di CASTELNUOVO e ENRIQUES ⁽⁹⁾ razionale, ed una M_3^n a superficie-sezioni F razionali e di ordine $n > 3$ è razionale ⁽¹⁰⁾. La M_3^n essendo dunque razionale, le sue superficie-sezioni F e le sue curve-sezioni C saranno normali, cioè (n. 1)

$$(7) \quad r = n - \pi + 2.$$

9. Consideriamo di una superficie-sezione F generica la rappresentazione sopra un piano α mediante un sistema lineare di curve $|\Gamma|$, di un certo ordine m , di dimensione $r \geq 2\pi + 5$. Il sistema lineare $|\Gamma'|$, aggiunto puro di $|\Gamma|$, è formato da curve d'ordine $m' \leq m - 3$ le quali nei punti base $P_i (i = 1, \dots, h)$ di $|\Gamma|$, di molteplicità v_i , hanno molteplicità $v'_i \leq v_i - 1$. Il sistema lineare di curve Γ^* , d'ordine $m^* = m - m'$ e che nei punti P_i hanno le molteplicità virtuali $v_i - v'_i$, si dice *sistema residuo* di $|\Gamma|$ rispetto $|\Gamma'|$, e si può scrivere

$$(8) \quad |\Gamma| = |\Gamma'| + |\Gamma^*|.$$

Poichè è $r \geq 2\pi + 5$, la dimensione virtuale di $|\Gamma^*|$ è $r^* > 0$. Da una ricerca del CASTELNUOVO ⁽¹¹⁾ risulta allora che il sistema $|\Gamma^*|$ è regolare e che il suo genere (virtuale = effettivo) è 1. Se la generica Γ^* è irriducibile, il sistema di curve ellittiche $|\Gamma^*|$ ha dunque la dimensione effettiva $r^* \leq 9$. Se $|\Gamma^*|$ è riducibile, il sistema si spezza (in virtù della sua regolarità e del teorema di BERTINI sui sistemi riducibili) in una curva fissa e in un sistema irriducibile $|\gamma^*|$ di dimensione effettiva $r^* \leq 8$ ⁽¹²⁾, (la γ^* potendo anche essere razionale).

⁽⁹⁾ CASTELNUOVO-ENRIQUES, *Sur les intégrales simples de première espèce d'une surface ou d'une variété algébriques à plusieurs dimensions* [Annales Sc. de École Nat. sup. (Paris) t. 23 (3), 1906].

⁽¹⁰⁾ FANO G., *Sulle varietà algebriche a tre dimensioni a superficie-sezioni razionali* [Annali di Mat. t. 24 (3), (1915)].

⁽¹¹⁾ CASTELNUOVO G., *Ricerche generali sopra i sistemi lineari di curve piane* [Memorie della R. Acc. delle Scienze di Torino, t. 42 (2), (1891)].

⁽¹²⁾ CASTELNUOVO G., loco cit. ⁽¹¹⁾.

10. Vogliamo mostrare che se γ^* è razionale, non è solamente $r^* \leq 8$, ma addirittura $r^* \leq 5$. Cominciamo perciò con ricordare il seguente lemma del CASTELNUOVO sui sistemi riducibili ⁽¹³⁾: Se le curve d'ordine m che passano colle molteplicità virtuali $\nu_1, \dots, \nu_h$ per certi h punti del piano, formano un *sistema riducibile* di dimensione virtuale ≥ 1 , avente il genere effettivo uguale al genere virtuale, le curve d'ordine m passanti colle molteplicità virtuali $\nu_1, \dots, \nu_h$ per h punti presi in posizione generica nel piano, formano un sistema irriducibile.

11. Se consideriamo in un piano α_1 un sistema di curve Γ_1^* , d'ordine m^* , che nei punti base P_{1i} , in posizione generica, hanno le molteplicità $\nu_i - \nu'_i$ (n. 9), queste curve saranno (in base al precedente lemma) irriducibili e ellittiche. Supponiamo che Γ_1^* abbia la dimensione $r^* \neq 8$. Consideriamo allora una certa trasformazione cremoniana Ω che trasforma Γ_1^* in un sistema lineare di cubiche di un piano α_2 , con $9 - r^*$ punti-base.

Al sistema lineare di tutte le cubiche del piano α_2 corrisponde nella Ω^{-1} un sistema di curve ellittiche $\bar{\Gamma}_1^*$, di dimensione $\bar{r}^* = 9$ e di ordine $\bar{m}^* \geq m^*$, che contiene parzialmente il sistema Γ_1^* . Possiamo quindi dire che il gruppo dei punti base $\bar{P}_{1i}$ di $|\bar{\Gamma}_1^*|$ è sovrapposto al gruppo dei punti-base P_{1i} di $|\Gamma_1^*|$.

Consideriamo ora il sistema di curve $\bar{\Gamma}^*$ del piano α , d'ordine $\bar{m}^*$, col gruppo di punti base $\bar{P}$, sovrapposto al gruppo dei punti-base P , di Γ^* . Poichè il genere di $\bar{\Gamma}^*$ è 1 e la sua dimensione è 9, $|\bar{\Gamma}^*|$ è irriducibile (n. 9). $|\bar{\Gamma}^*|$ contiene parzialmente γ^* . Inoltre $|\bar{\Gamma}^*|$ si può trasformare cremonianamente nel sistema delle cubiche, che conterrà parzialmente il sistema di curve razionali trasformato di γ^* ; dunque la dimensione effettiva di γ^* è $r^* \leq 5$, c. v. d.

12. Possiamo infine constatare che non si può verificare il caso escluso di $r^* = 8$. Infatti, imponendo al sistema $|\Gamma^*|$, e

⁽¹³⁾ CASTELNUOVO G., loco cit. ⁽¹¹⁾.

quindi al sistema Γ^* , un punto-base semplice P in posizione generica, si otterrebbe un sistema nella situazione del n. precedente, per cui dunque $r^* - 1 \leq 5$, in contrasto coll'ipotesi $r^* = 8$.

13. Ai sistemi lineari $|\Gamma|$, $|\Gamma'|$ e $|\Gamma^*|$ di α corrispondono nella superficie-sezione F i sistemi lineari $|C|$, $|C'|$ e $|C^*|$, $|C|$ essendo il sistema delle curve-sezioni, tali che

$$(9) \quad |C| = |C'| + |C^*|.$$

Poichè la generica C' è irriducibile (C non essendo iperellittica), il sistema $|C^*|$ determina su una C' una serie lineare di punti la quale (se non è speciale e se C' non è contenuto in $|C^*|$) ha la dimensione r^* e quindi l'ordine

$$(10) \quad \mu \geq \pi' + r^*.$$

Se la serie fosse speciale, sarebbe $r^* \leq \pi'$.

Se C' è contenuta in $|C^*|$ potrà essere $\pi' = 1$ oppure $\pi' = 0$. Se è $\pi' = 1$, sarà $\mu \geq r^*$.

Si osservi inoltre che se la C^* è ellittica essa è certamente *normale*. Infatti i punti-base di $|\Gamma|$ appartengono tutti ad una Γ^* , quindi determinano su essa una serie completa.

14. Ritorniamo alla considerazione della M_3^n dell' S_r , $r \geq 2\pi + 5$ (n. 8). Il sistema $|F + F'|$, aggiunto al sistema $|2F|$, depurato dalle eventuali componenti fisse, determina su una F il sistema $|C'|$ aggiunto a $|C|$, ⁽¹⁴⁾.

Lo spazio d'appartenenza $S_{r'}$ della $(F + F')$, di dimensione $r' \leq 2\pi - \pi' - 1$, potrà segare la M_3^n soltanto nella $(F + F')$, d'ordine $2\pi - 2$ e a curve-sezioni di genere π' ; oppure potrà segarla inoltre in una superficie f , la quale apparterrà allora a tutti gli spazi $S_{r'}$ (in quanto la curva-sezione della f con una F è una componente fissa del sistema aggiunto impuro di $|C|$).

Un S_{r-1} generico per l' S_r sega la M_3^n (oltre che nelle $(F + F')$ e f) in una superficie Ψ , le cui curve-sezioni sono le C^* delle F (n. 13). La Ψ è quindi a curve-sezioni ellittiche

⁽¹⁴⁾ FANO G., loco cit. ⁽¹⁰⁾.

o razionali (n. 9). La dimensione del sistema $|\Psi|$ è uguale a quello del sistema $|C^*|$ di una F , cioè r^* (n. 15).

Risulta quindi

$$(11) \quad r = r' + r^* + 1 \leq 2\pi - \pi' + r^*.$$

15. Se la serie di punti determinata da $|C^*|$ su una C' fosse speciale, quindi $r^* \leq \pi'$ (n. 13), dalla (11) segue $r \leq 2\pi - \pi' + \pi'$, in contrasto all'ipotesi $r \geq 2\pi + 5$. Questa eventualità verrà quindi nel seguito esclusa.

La $(F + F')$ e una Ψ hanno in comune una curva C^μ , d'ordine μ (n. 13). Un iperpiano generico $\bar{S}_{r-1}$ per la $(F + F')$ sega la Ψ (oltre che nella componente fissa C^μ) in una curva comune alla Ψ e alla $\bar{\Psi}$ contenuta nell' $\bar{S}_{r-1}$. L'ordine di questa curva è quindi uguale all'ordine della serie caratteristica del sistema $|C^*|$ di una F , cioè r^* oppure $r^* - 1$ (a seconda che la componente variabile di $|C^*|$ è ellittica oppure razionale, n. 9). Quindi l'ordine ν della Ψ è

$$(12) \quad \nu \geq \mu + r^*, \text{ oppure } \nu \geq \mu + r^* - 1.$$

16. Se la generica Ψ è non rigata e a curve-sezioni razionali il suo ordine è (come noto) $\nu = 4 - \varepsilon$, ($\varepsilon > 0$).

Dal n. 13 e dalla (12) segue che in questo caso è $\nu \geq 2r^* - 2$. Quindi $2r^* - 2 \leq 4 - \nu$, cioè $r^* \leq 3 - \frac{\varepsilon}{2}$; ed infine dalla (11) $r \leq 2\pi + 3$; in contrasto coll'ipotesi (4).

17. Supponiamo Ψ a curve-sezioni ellittiche e $\pi' \geq 1$. Allora dal n. 13 e dalla (12) segue $2r^* \leq 9 - \varepsilon$, cioè $r^* \leq 4$. Quindi dalla (11) $r = 2\pi - \pi' + r^* = 2\pi + 3$, in contrasto coll'ipotesi (4).

18. Supponiamo Ψ a curve-sezioni ellittiche e $\pi' = 0$. Allora dal n. 13 e dalla (12) segue $2r^* - 1 \leq 9 - \varepsilon$, cioè $r^* \leq 5 - \frac{\varepsilon}{2}$. Perchè risulti $r \geq 2\pi + 5$, dovrebbe essere $\varepsilon = 0$, cioè $\nu = 9$. Ma la curva comune a Ψ e $\bar{\Psi}$ avrebbe l'ordine

$r^* = 5$, mentre in una Ψ (rappresentata nel piano dal sistema lineare di tutte le cubiche) non esistono curve del 5° ordine.

19. Supponiamo Ψ rigata a curve-sezioni ellittiche. Ora una rigata ellittica a curve-sezioni normali (n. 13) è necessariamente un cono ⁽¹⁵⁾; e allora (la dimensione di $|\Psi|$ essendo $r^* \geq 5$), la M_3^n stessa è un cono (il cui ordine, la F non essendo a curve-sezioni iperellittiche, è $n < 3\pi + 4$).

20. Supponiamo infine che le Ψ siano rigate a curve-sezioni razionali. Dal n. 10 sappiamo che è $r^* \leq 5$. Quindi la (11) dà $r \leq 2\pi - \pi' + 5$. L'unico caso che ci interessa, in relazione alla limitazione $r \geq 2\pi + 5$, è $\pi' = 0$, $r^* = 5$.

In questo caso la superficie-sezione F si può rappresentare in un piano α mediante il sistema di curve d'ordine m , $|\Gamma| = |\Gamma'| + |\Gamma^*|$, dove $|\Gamma^*|$ si spezza in una retta λ per i quattro punti-base P_1, P_2, P_3, P_4 di $|\Gamma|$ e nel sistema di tutte le coniche γ^* del piano (n. 11). Indichiamo con ν_i la molteplicità del punto-base P_i , $\nu_1 \geq \nu_2 \geq \nu_3 \geq \nu_4$. Sarà

$$(13) \quad \sum_1^4 \nu_i = m - \nu, \quad (\nu \geq 0).$$

Le curve Γ' , d'ordine $m - 3$, hanno i punti-base P_i multipli rispettivamente dell'ordine $\nu_i - 1$. Poniamo $\mu = m - 3$, $\mu_i = \nu_i - 1 \geq 0$, quindi

$$(14) \quad \sum_1^4 \mu_i = \mu - 1 - \nu.$$

Poichè Γ' è razionale sarà

$$(15) \quad (\mu - 1)(\mu - 2) = \sum_1^4 \mu_i(\mu_i - 1).$$

Eliminando μ dalle (14) e (15) si trova

$$(16) \quad \sum_{i,j}^4 \mu_i \mu_j + 2\nu \sum_1^4 \mu_i + \nu(\nu - 1) = 0, \quad (j \neq i).$$

⁽¹⁵⁾ Vedi cit. (5).

21. Se nella (16) è $\nu = 0$, sarà $\mu_1 > 0$ e $\mu_2 = \mu_3 = \mu_4 = 0$. Quindi, dalla (13), $\nu_1 = m - 3$, $\nu_2 = \nu_3 = \nu_4 = 1$. Se nella (16) è $\nu = 1$, dovranno essere nulli tutti i μ_i , cioè $\nu_1 = \nu_2 = \nu_3 = \nu_4 = 1$. Infine $\nu > 1$ non è compatibile con la (16).

Nel caso $\nu = 0$, il sistema $|\Gamma|$ è dunque un sistema di curve d'ordine $m \geq 4$ con un punto-base P_1 multiplo d'ordine $m - 3$ e tre punti-base P_2, P_3, P_4 appartenenti a una medesima retta λ . A questa retta λ fondamentale di $|\Gamma|$ corrisponde un punto triplo L^3 della F . Il grado n di $|\Gamma|$, cioè l'ordine della F , si calcola direttamente, $n = 3\pi + 3$. Cioè la dimensione dell' S_r della M_3^n è $r = 2\pi + 5$.

Al variare della F il punto triplo L^3 descrive una retta tripla l^3 della M_3^n . Le rette della rigata M_3^n che passano per un punto L^3 della l^3 formano un cono cubico K_2^3 (segato da una F per L^3 nelle 3 rette che nella rappresentazione piana della F hanno per immagini i punti base P_2, P_3, P_4).

La nostra M_3^n è dunque un pseudo-cono di indice 1, e poichè il suo ordine $n = 3\pi + 3$ è inferiore all'ordine massimo $4\pi + 2$ ($\pi \geq 3$) spettante ad un pseudo-cono di indice 1 (n. 7), noi la scarteremo dalla nostra considerazione (quantunque sia facile provare l'esistenza di una tale M_3^n).

22. Supponiamo ora che nella (16) sia $\nu = 1$. Allora dalla (13) segue che $|\Gamma|$ è un sistema di curve del 5° ordine con 4 punti-base su una retta λ .

Il grado di $|\Gamma|$ è $n = 21$ e il genere $\pi = 6$. Per la M_3^n dell' S_r è quindi $n = 3\pi + 3 = 21$, $r = 2\pi + 5 = 17$.

Alla retta λ del piano α corrisponde nella superficie-sezione F una retta semplice l la quale, al variare della F , descrive un piano S_2 semplice della M_3^{21} . Questo piano è un piano direttore della rigata M_3^{21} . Le rette della M_3^{21} che si appoggiano ad una retta l dell' S_2 generano una superficie rigata R^5 , del 5° ordine. Un S_{16} dell' S_{17} generico per l' R^5 taglia la M_3^{21} ulteriormente in una superficie F^{16} , d'ordine 16, a curve-sezioni di genere 3. La F^{16} è quindi rappresentata nel piano dal sistema di tutte le quartiche, e su essa è individuata una rete omaloidica di C^4 normali del 4° ordine.

Le rette della M_3^{21} stabiliscono una corrispondenza birazionale tra il piano S_2 e la F^{16} (d' un S_{14}) nella quale alle rette del piano S_2 corrispondono le C^4 della F^{16} (e viceversa).

Questa M_3^{21} si proietta semplicemente dall' S_{13} di una curva-sezione C^{16} della F^{16} sopra un S_3 . Come sistema lineare di superficie rappresentativo della M_3^{21} nell' S_3 si ottiene così il *sistema delle superficie del 5° ordine con un punto base quadruplo e una quartica base di genere 3 (eventualmente degenera)*.
