

RENDICONTI  
*del*  
SEMINARIO MATEMATICO  
*della*  
UNIVERSITÀ DI PADOVA

ANTONIO MINZONI

**Su un problema ai limiti per un sistema di due  
equazioni differenziali del 1° ordine**

*Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,*  
tome 9 (1938), p. 142-149

[http://www.numdam.org/item?id=RSMUP\\_1938\\_\\_9\\_\\_142\\_0](http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1938__9__142_0)

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1938, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

## SU UN PROBLEMA AI LIMITI PER UN SISTEMA DI DUE EQUAZIONI DIFFERENZIALI DEL 1° ORDINE

Nota di ANTONIO MINZONI a Venezia.

In questa nota mi propongo di dimostrare <sup>(1)</sup> elementarmente che il problema ai limiti

$$(1) \quad \begin{aligned} y' &= f(x, y, z), \\ z' &= g(x, y, z), \\ y(a) &= y_0, \quad z(b) = z_0 \end{aligned} \quad (a < b)$$

è sempre risolubile se  $f(x, y, z)$  e  $g(x, y, z)$  sono continue e limitate nella striscia  $S: a \leq x \leq b, -\infty < y < +\infty, -\infty < z < +\infty$  <sup>(2)</sup>.

La dimostrazione si spezza in due parti. Si riconosce dapprima (n. 1) che il problema (1) ammette soluzioni se i rapporti incrementali di  $f$  e  $g$  rispetto ad  $y$  e  $z$  sono limitati nella striscia o in ogni sua porzione limitata: ciò si ottiene elementarmente sfruttando, in modo opportuno, procedimenti noti. Per togliere l'ipotesi relativa alla condizione di LIPSCHITZ, uso (n. 2) un metodo, già seguito in un caso analogo dal MÜLLER <sup>(3)</sup>, che

<sup>(1)</sup> Salvo pure differenze di forma, le dimostrazioni date si trovano esposte nella mia Tesi di Laurea, discussa a Padova nel luglio scorso.

<sup>(2)</sup> Cfr. CACCIOPOLI, *Sugli elementi uniti delle trasformazioni funzionali: un'osservazione sul problema dei valori ai limiti* [Rend. Acc. dei Lincei, serie VI, vol. XIII (1931), pp. 498-502].

<sup>(3)</sup> M. MÜLLER, *Über das Fundamentaltheorem in der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen* [Math. Zeitschrift, vol. 26 (1927), pp. 619-645] Cap. II.

consiste nell'approssimare convenientemente i secondi membri delle  $y' = f$ ,  $x' = g$  e ricondurre, in tal modo, questo al caso precedente.

Tratto poi (n. 3) il problema (1) nell'ipotesi che  $f$  e  $g$  siano infinite d'ordine  $< 1$  rispetto a  $|y| + |x|$  e soddisfacciano alla condizione di Lipschitz ricordata (\*). Anche questo caso si esaurisce con un ragionamento elementare (\*\*).

1. - Cominciamo coll'osservare che se  $f$  e  $g$  sono continue e limitate e soddisfanno alla condizione di LIPSCHITZ, dato  $\bar{x}_0$ , il sistema  $y' = f$ ,  $x' = g$  ammette una ed una sola soluzione  $\bar{y}(x)$ ,  $\bar{x}(x)$  verificante le condizioni iniziali

$$(2) \quad \bar{y}(a) = y_0, \quad \bar{x}(a) = \bar{x}_0,$$

le funzioni  $\bar{y}(x)$ ,  $\bar{x}(x)$  potendosi definire in tutto l'intervallo  $\mathbf{H}$   $a$   $b$  e variando con continuità al variare continuo di  $\bar{x}_0$ .

Sia  $M$  una costante maggiore delle funzioni  $|f|$ ,  $|g|$  in tutta la striscia, e  $y_1(x)$ ,  $x_1(x)$  e  $y_2(x)$ ,  $x_2(x)$  siano le soluzioni del sistema  $y' = f$ ,  $x' = g$  verificanti rispettivamente le

$$\begin{aligned} y_1(a) &= y_0, & x_1(a) &= x_0 - M(b-a) \\ y_2(a) &= y_0, & x_2(a) &= x_0 + M(b-a). \end{aligned}$$

Si ha evidentemente :

$$\begin{aligned} x_1(b) &\leq x_0 - M(b-a) + \int_a^b |g(t, y_1(t), x_1(t))| dt \leq x_0, \\ x_2(b) &\geq x_0 + M(b-a) - \int_a^b |g(t, y_2(t), x_2(t))| dt \geq x_0. \end{aligned}$$

(\*) Cfr. R. CACCIOPOLI, loco cit. Ivi non si suppone soddisfatta la condizione di LIPSCHITZ; anche qui questa ipotesi si dovrebbe poter eliminare applicando il procedimento di MÜLLER.

(\*\*) Cfr. G. SCORZA DRAGONI, *Su un problema di valori ai limiti per le equazioni differenziali ordinarie del secondo ordine* [Rend. Semin. Mat. R. Univ. di Roma, serie IV, Vol. 2, (1936), pp. 177-215], § 1.

Consideriamo la soluzione  $\bar{y}(x)$ ,  $\bar{z}(x)$  determinata dalle (2) ove  $\bar{x}_0$  è il punto corrente dell'intervallo

$$(3) \quad x_1(a) \leq \bar{x}_0 \leq x_2(a);$$

poichè la funzione  $\bar{z}(x)$  può definirsi in tutto l'intervallo  $a \stackrel{\text{H}}{b}$ , esiste ed è finito il numero  $\bar{z}(b)$  ch'è funzione continua di  $\bar{x}_0$  definita nell'intervallo chiuso e limitato (3). Se la indichiamo con  $Z(\bar{x}_0)$ , nell'intervallo (3) avremo

$$Z[x_1(a)] \leq z_0, \quad Z[x_2(a)] \geq z_0.$$

Ne viene pertanto che esiste almeno un punto, diciamolo  $\zeta_0$ , dell'intervallo (3) per cui è  $Z(\zeta_0) = z_0$  cioè, se  $y(x)$ ,  $z(x)$  è il sistema integrale che verifica le  $y(a) = y_0$ ,  $z(a) = \zeta_0$ , è pure  $z(b) = z_0$ .

**2.** - Mostriamo che l'ipotesi relativa ai rapporti incrementali di  $f$  e  $g$  non è essenziale. Supponiamo cioè  $f$  e  $g$  continue e limitate in  $S$ .

Osserviamo intanto che le eventuali soluzioni  $y(x)$ ,  $z(x)$  delle (1) (verificanti le  $y(a) = y_0$ ,  $z(b) = z_0$ ) sono, una volta fissati  $y_0$  e  $z_0$ , limitate in modo uniforme nell'intervallo  $a \stackrel{\text{H}}{b}$ , precisamente:

$$(4) \quad \begin{aligned} |y(x)| &\leq |y_0| + M(b-a) = k_1, \\ |z(x)| &\leq |z_0| + M(b-a) = k_2, \end{aligned}$$

dove  $M$  ha il significato dianzi precisato. Se  $k$  è il maggiore dei numeri  $k_1$  e  $k_2$ , consideriamo l'insieme

$$I: a \leq x \leq b, \quad -k-1 \leq y \leq k+1, \quad -k-1 \leq z \leq k+1.$$

Consideriamo in  $I$  due successioni di polinomi  $p_n(x, y, z)$ ,  $q_n(x, y, z)$ , convergenti in modo uniforme in  $I$  verso  $f, g$  rispettivamente, di guisa che in  $I$  si possono supporre soddisfatte le relazioni

$$(5) \quad |p_n(x, y, z)| \leq k^*, \quad |q_n(x, y, z)| \leq k^* \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

$$k^* = M + \frac{1}{b-a}.$$

Le funzioni  $p_n$  e  $q_n$  sono equicontinue in  $I$ . Prolunghiamone la definizione in modo da ottenere in  $S$  funzioni continue, lipschitziane e verificanti le (5), che diremo ancora  $p_n, q_n$ .

Consideriamo ora il sistema

$$(6) \quad \begin{cases} y' = p_n(x, y, z) \\ z' = q_n(x, y, z) \end{cases} \quad (n = 1, 2, 3 \dots);$$

per ogni valore fissato di  $n$ , esiste, per quanto si è visto al n. 1, almeno una soluzione  $y_n(x), z_n(x)$  delle (6) verificante le

$$y_n(a) = y_0, \quad z_n(b) = z_0 \quad (n = 1, 2, 3 \dots).$$

Ad ogni valore di  $n$  associamo una simile soluzione, il che può farsi secondo una legge determinata. Le successioni

$$y_1(x), y_2(x), \dots; \quad z_1(x), z_2(x) \dots$$

sono, com'è facile vedere, successioni di funzioni equicontinue ed equilimitate nell'intervallo chiuso  $a \overset{H}{b}$ . Possiamo allora trovare una successione di indici  $m_1 < m_2 < m_3 < \dots$  tali che le successioni

$$y_{m_1}(x), y_{m_2}(x), \dots; \quad z_{m_1}(x), z_{m_2}(x), \dots$$

convergono uniformemente verso i limiti rispettivi  $Y(x), Z(x)$ , che risulteranno funzioni continue. Le funzioni  $Y(x), Z(x)$  verificano le condizioni ai limiti  $Y(a) = y_0, Z(b) = z_0$ ; dalle eguaglianze

$$(7) \quad \begin{aligned} y_{m_r}(x) &= y_0 + \int_a^x p_{m_r}(t, y_{m_r}(t), z_{m_r}(t)) dt, \\ z_{m_r}(x) &= z_0 + \int_b^x q_{m_r}(t, y_{m_r}(t), z_{m_r}(t)) dt \end{aligned}$$

si ricava, tenendo presenti le (4), (5),

$$\begin{aligned} |y_{m_r}(x)| &\leq |y_0| + k^*(b-a) \leq k+1, \\ |z_{m_r}(x)| &\leq |z_0| + k^*(b-a) \leq k+1. \end{aligned}$$

Quindi è anche

$$|Y(x)| \leq k+1, \quad |Z(x)| \leq k+1.$$

Le curve di equazioni

$$\begin{aligned} y &= y_{m_r}(x), \quad z = z_{m_r}(x) \quad (r = 1, 2, 3, \dots), \\ y &= Y(x), \quad z = Z(x) \end{aligned}$$

sono perciò tutte contenute nell'insieme  $I$  in cui le funzioni  $p_n, q_n$  convergono uniformemente verso le funzioni  $f, g$ .

Tenuto conto della equicontinuità di  $p_n, q_n$  in  $I$  e della convergenza uniforme delle  $y_{m_r}(x), z_{m_r}(x)$  ( $r = 1, 2, 3, \dots$ ) verso le funzioni  $Y(x), Z(x)$  rispettivamente, si hanno le relazioni, valide uniformemente,

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow \infty} [p_{m_r}(x, y_{m_r}(x), z_{m_r}(x)) - f(x, Y(x), Z(x))] &= 0, \\ \lim_{r \rightarrow \infty} [q_{m_r}(x, y_{m_r}(x), z_{m_r}(x)) - g(x, Y(x), Z(x))] &= 0 \\ & \quad (r = 1, 2, 3, \dots). \end{aligned}$$

Passando al limite, per  $r \rightarrow \infty$ , nelle (7), otteniamo le eguaglianze

$$\begin{aligned} Y(x) &= y_0 + \int_a^x f(t, Y(t), Z(t)) dt, \\ Z(x) &= z_0 + \int_b^x g(t, Y(t), Z(t)) dt; \end{aligned}$$

da cui, derivando, segue il teorema.

3. - Mostriamo ora che il problema (1) è risolubile anche se le funzioni  $f(x, y, z)$ ,  $g(x, y, z)$  sono continue e lipschitziane rispetto ad  $y$  e  $z$  in ogni porzione limitata dello strato  $S$  e se, posto  $\omega = |y| + |z|$ , riesce uniformemente rispetto alla  $x$

$$(8) \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{f(x, y, z)}{\omega} = 0, \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{g(x, y, z)}{\omega} = 0.$$

Siano  $\bar{y}(x)$ ,  $\bar{z}(x)$  soluzioni delle  $y' = f$ ,  $z' = g$  verificanti le  $\bar{y}(a) = y_0$ ,  $\bar{z}(a) = z_0$  e sia  $J$  il massimo intorno destro di  $a$  in cui le funzioni  $\bar{y}(x)$ ,  $\bar{z}(x)$  si possono definire. Dico che  $J$  coincide coll'intervallo chiuso  $a \stackrel{H}{b}$ . A ciò sarà sufficiente mostrare che le funzioni  $\bar{y}(x)$ ,  $\bar{z}(x)$  si mantengono limitate in tutto  $J$ <sup>(6)</sup>.

Dalle (8) si ricavano le

$$|f(x, y, z)| \leq |y| + |z| + c, \quad |g(x, y, z)| \leq |y| + |z| + c$$

(ove  $c$  è una conveniente costante positiva); di guisa che in  $J$  è valida la

$$|\bar{y}'(x)| + |\bar{z}'(x)| \leq 2 \{ |\bar{y}(x)| + |\bar{z}(x)| \} + 2c;$$

ed applicando un noto lemma <sup>(7)</sup> si ha

$$|\bar{y}(x)| + |\bar{z}(x)| \leq \{ |\bar{y}(a)| + |\bar{z}(a)| \} e^{2(b-a)} + c(e^{2(b-a)} - 1)$$

ch'è quanto basta per la dimostrazione della prima parte.

Sia  $h$  una quantità da determinarsi e scegliamo il numero  $h$ , soddisfacente allè

$$h > |y_0|, \quad h > |z_0|,$$

<sup>(6)</sup> E KAMKE, *Differentialgleichungen reeller Funktionen* [Akademische Verlagsgesellschaft, Lipsia, 1930], n. 76.

<sup>(7)</sup> Loc. cit. nota prec., n. 85.

in modo tale che, per  $|z| \geq k$ , riesca

$$(9) \quad |f(x, y, z)| + |g(x, y, z)| \leq h (|y| + |z|)$$

e  $y(x), z(x)$  sia una soluzione delle  $y' = f, z' = g$  verificante le  $y(a) = y_0, |z(a)| \geq 4k$  e

$$I: a \leq x \leq \tau$$

il più grande intorno destro di  $a$  in cui sia soddisfatta la

$$(10) \quad |z(x)| \geq k.$$

Si tratta di far vedere che, per  $h$  conveniente, dalla (10) discende la  $|z(x)| \geq 2k$  in  $I$ , di guisa che dovrà essere  $\tau = b$ ; e quindi, poichè per la (10)  $z(x)$  non si annulla mai in  $I$ ,  $z(b) > z_0$ , ovvero  $z(b) < z_0$  secondo che  $z(a) \geq 4k, z(a) \leq -4k$ .

In  $I$ , per le (9), (10), è

$$(11) \quad |y'(x)| + |z'(x)| \leq h (|y(x)| + |z(x)|)$$

e, per il lemma ricordato,

$$|y(x)| + |z(x)| \leq (|y_0| + |z(a)|) e^{h(\tau-a)} < 2|z(a)| e^{h(\tau-a)}$$

e perciò, se  $(b-a)h < \log 2$ ,

$$|y(x)| + |z(x)| < 4|z(a)|.$$

Quindi dalla (11) si ricava che in tutto  $I$  è

$$|z'(x)| < 4h|z(a)| < \frac{1}{2(b-a)}|z(a)|,$$

se  $h$  è tale da aversi  $8(b-a)h < 1$ .



Ma ora si ha

$$\begin{aligned} |z(x)| &= \left| z(a) + \int_a^x z'(t) dt \right| \geq \\ &\geq \left| |z(a)| - \left| \int_a^x z'(t) dt \right| \right|; \end{aligned}$$

da cui, poichè

$$\int_a^x z'(t) dt < \frac{1}{2} z(a),$$

si trae

$$|z(x)| > \frac{1}{2} |z(a)|;$$

cioè

$$|z(x)| > 2k,$$

come appunto volevamo.

Dopo di ciò il teorema segue dalla dipendenza continua delle soluzioni dai valori iniziali.