

RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

LEOPOLDO CAVALLUCCI

**Riduzione di una matrice alla forma canonica
nel suo campo di razionalità**

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 8 (1937), p. 92-109

[<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1937__8__92_0>](http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1937__8__92_0)

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1937, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

RIDUZIONE DI UNA MATRICE ALLA FORMA CANONICA NEL SUO CAMPO DI RAZIONALITÀ

di LEOPOLDO CAVALLUCCI a Volterra

In questa Nota ci prefiggiamo di dare un mezzo per ridurre a forma canonica una matrice assegnata A qualsiasi, senza uscire dal campo di razionalità cui appartengono i suoi elementi ⁽¹⁾. E per forma canonica della matrice A intenderemo una matrice C , nella quale siano immediatamente riconoscibili i divisori elementari di $(A - xI)$ coincidenti con quelli di $C - xI$. Con che vogliamo anche dire che fra A e C si ha una relazione del tipo

$$C = T A T^{-1},$$

ove T è una matrice non degenera i cui elementi si costruiscono razionalmente mediante quelli di A . La nostra forma canonica risulterà *composta* mediante una o più matrici del tipo

$$M = \left\| \begin{array}{cccccc} 0 & 1 & . & . & . & 0 & 0 \\ 0 & 0 & . & . & . & 0 & 0 \\ . & . & & & & . & . \\ . & . & & & & . & . \\ . & . & & & & . & . \\ . & . & & & & . & . \\ 0 & 0 & . & . & . & 0 & 1 \\ -a_m & -a_{m-1} & . & . & . & -a_2 & -a_1 \end{array} \right\|,$$

⁽¹⁾ Il che esprimeremo dicendo che effettueremo la riduzione «razionalmente».

cioè assumerà l'aspetto

$$C = \left\| \begin{array}{c|c|c|c} \hline M_1 & 0 & . & 0 \\ \hline 0 & M_2 & . & 0 \\ \hline . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ \hline 0 & 0 & . & M_r \\ \hline \end{array} \right\| ,$$

ove $M_1, M_2, \dots, M_r$ ($r \geq 1$) sono matrici del tipo M indicato.

Inoltre, posto

$$f(x) = (-1)^m (x^m + a_1 x_{m-1} + \dots + a_{m-1} x + a_m),$$

si ha

$$f(x) = |M - xI|,$$

e si ha che $f_i(x) = |M_i - xI|$ è divisibile per $f_{i+1}(x) = |M_{i+1} - xI|$.
($i = 1, 2, \dots, r-1$).

Le matrici componenti M potrebbero anche costituirsi con altrettante di tipo

$$M^* = \left\| \begin{array}{cccccc} -a_1 & 1 & . & . & 0 & 0 \\ -a_2 & 0 & & & 0 & 0 \\ . & & & & . & . \\ . & & & & . & . \\ -a_{m-1} & 0 & & & 0 & 1 \\ -a_m & 0 & & & 0 & 0 \end{array} \right\| ,$$

ottenute da esse ruotandole di 180° intorno alla diagonale secondaria. Per queste oltre ad avere

$$|M - xI| = |M^* - xI|,$$

si ha anche

$$M^* = P M P^{-1} ,$$

$$P = \left\| \begin{array}{cccccc} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ a_2 & a_1 & \dots & 0 & 0 \\ . & . & \dots & . & . \\ . & . & \dots & . & . \\ a_{m-2} & a_{m-3} & & 1 & 0 \\ a_{m-1} & a_{m-2} & & a_1 & 1 \end{array} \right\|$$

Come si è già fatto, per le notazioni ci serviremo frequentemente di quelle adottate dal Prof. CHERUBINO nei suoi recenti lavori sulle matrici ⁽²⁾ le quali ci sono state di grande ausilio per la più chiara e compatta esposizione degli algoritmi impiegati.

§ 1 - Lemmi fondamentali.

1. - LEMMA I. — *Se la matrice $A = \|a_{ij}\|$ ($ij = 1, 2, \dots, n$) ha la forma*

$$A = \left(\frac{M}{D} \middle| \frac{0}{A_1} \right),$$

dove M è del tipo noto e $A_1 = \|a_{ij}\|$ ($i, j = m+1, m+2, \dots, n$), $D = \|a_{ij}\|$ ($i = m+1, m+2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, m$) si può trasformarla razionalmente nella A' avente la forma

$$A' = \left(\frac{M}{D'} \middle| \frac{0}{A_1} \right),$$

dove $D' = (D^{(1)} | 0 | \dots | 0)$.

⁽²⁾ Cfr. in particolare: S. CHERUBINO - *Sulla riduzione delle matrici a forma canonica* - [Rend. Acc. Lincei, Vol. XXXIII, serie 6^a, 1936] Note I e II.

Essendo $D = (D^{(1)} | D^{(2)} | \dots | D^{(m)})$ poniamo

$$E_m = D^{(m)}; E_{m-1} = D^{(m-1)} + A_1 E_m; E_i = D^{(i)} + A_1 E_{i+1}; (1 \leq i < m)$$

$$E = (E_1 | E_2 | \dots | E_m | 0),$$

e trasformiamo A con

$$F = \left(\begin{array}{c|c} I_m & 0 \\ \hline -E & I_{n-m} \end{array} \right); F^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} I_m & 0 \\ \hline E & I_{n-m} \end{array} \right),$$

otteniamo

$$FAF^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} I_m & 0 \\ \hline -E & I_{n-m} \end{array} \right) \cdot \left(\begin{array}{c|c} M & 0 \\ \hline D & A \end{array} \right) \cdot \left(\begin{array}{c|c} I_m & 0 \\ \hline E & I_{n-m} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} M & 0 \\ \hline D + A_1 E - EM & A_1 \end{array} \right).$$

Osserviamo ora che

$$EM = (0 | E_2 | \dots | E_m)$$

$$A_1 E = (A_1 E_1 | A_1 E_2 | \dots | A_1 E_m | 0)$$

$$\begin{aligned} A_1 E - EM &= (A_1 E_1 | A_1 E_2 - E_2 | \dots | A_1 E_m - E_{m-1} | -E_m) = \\ &= (A_1 E_1 | -D^{(2)} | \dots | -D^{(m-1)} | -D^{(m)}), \end{aligned}$$

quindi

$$D + A_1 E - EM = (D^{(1)} + A_1 E_1 | 0 | \dots | 0) = (E_1 | 0 | \dots | 0).$$

Ponendo $D' = D + A_1 E - EM$ la F trasforma la A nella

$$A' = \left(\begin{array}{c|c} M & 0 \\ \hline D' & A_1 \end{array} \right)$$

con che il lemma è dimostrato.

2. - LEMMA I bis. — In maniera perfettamente analoga si dimostra che, se la A ha la forma

$$A = \left(\begin{array}{c|c} A'_1 & 0 \\ \hline D_1 & M^* \end{array} \right)$$

operando, anzichè sulle colonne, sulle righe, si può trasformarla razionalmente nella

$$A' = \left(\frac{A'_1}{D'_1} \middle| \frac{0}{M^*} \right)$$

dove

$$D'_1 = \left\| \begin{array}{c} 0 \\ \hline \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \hline 0 \\ \hline D'_{(m)} \end{array} \right\|.$$

3. - LEMMA II. — Se la matrice $A = \|a_{ij}\|$ ($i, j = 1, 2, \dots, n$) ha la forma

$$A = \left(\frac{M_1}{0} \middle| \frac{0}{M_2} \right),$$

dove M_1, M_2 sono del tipo noto e di ordine m_1, m_2 ($m_1 \geq m_2$), si può trasformarla razionalmente nella

$$A = \left(\frac{M_1}{0} \middle| \frac{R}{M_2} \right) \quad R = \left\| \begin{array}{c} 0 \\ \hline \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \hline 0 \\ \hline R_{(m_1)} \end{array} \right\|,$$

dove $R_{(m_1)} = (-1)^{m_1} (r_{m_2}, r_{m_2-1}, \dots, r_2, r_1)$ ed $r_1 x^{m_2-1} + r_2 x^{m_2-2} + \dots + r_{m_2-1} x + r_{m_2} = R(x)$ è il resto della divisione $f_1(x) = (-1)^{m_1} |M_1 - x I|$ per $f_2(x) = (-1)^{m_2} |M_2 - x I|$.

Poniamo

$$N_1 = (-a_{m_1}^{(1)}, -a_{m_1-1}^{(1)}, \dots, -a_2^{(1)}, -a_1^{(1)})$$

$$N_2 = (-a_{m_2}^{(2)}, -a_{m_2-1}^{(2)}, \dots, -a_2^{(2)}, -a_1^{(2)})$$

$$N_i^{(2)} = (0, -a_{m_2}^{(2)}, \dots, -a_3^{(2)}, -a_2^{(2)})$$

$$N_i^{(i)} = (0, \dots, 0, -a_{m_2}^{(2)}, \dots, -a_{i-1}^{(2)}, -a_i^{(2)}) \quad (i \leq m_2)$$

$$N_j^{(j)} = (0, \dots, \dots, \dots, 0), \quad (j > m_2)$$

ed ancora

$$V_1 = N_2$$

$$V_2 = N_2^{(2)} - a_1^{(2)} N_2 = N_2^{(2)} - a_1^{(2)} V_1$$

$$V_i = N_2^{(i)} - a_1^{(2)} V_{i-1} - a_2^{(2)} V_{i-2} - \dots - a_{i-1}^{(2)} V_1,$$

essendo $a_i^{(2)} = 0$ per $i > m_2$. Da queste ultime si ha

$$N_2 = V_1$$

$$N_2^{(2)} = a_1^{(2)} V_1 + V_2$$

$$N_2^{(i)} = a_{i-1}^{(2)} V_1 + a_{i-2}^{(2)} V_2 + \dots + a_1^{(2)} V_{i-1} + V_i,$$

che si compendiano nell'unica relazione

$$\left\| \begin{array}{c} \frac{N_2}{N_2^{(2)}} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \frac{N_2^{(i)}}{N_2^{(i)}} \end{array} \right\| = P_i \left\| \begin{array}{c} \frac{V_1}{V_2} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \frac{V_i}{V_i} \end{array} \right\| \quad P_i = \left\| \begin{array}{ccccc} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_1^{(2)} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ a_{i-1}^{(2)} & a_{i-2}^{(2)} & \dots & 1 & 0 \\ a_{i-1}^{(2)} & a_{i-2}^{(2)} & \dots & a_1^{(2)} & 1 \end{array} \right\|.$$

Ricordando la forma di M_2 si ha

$$N_2^{(i)} M_2 = N_2^{(i+1)} - a_i^{(2)} N_2 = N_2^{(i+1)} - a_i^{(2)} V_1,$$

e da questa segue subito

$$V_i = V_{i-1} M_2;$$

infatti la cosa è immediata per $i=2$ e per induzione si dimostra per $i > 2$. Poniamo

$$H_i = (0, \dots, 0, \overset{1}{1}, \overset{i-1}{0}, \overset{i}{1}, \overset{i+1}{0}, \dots, \overset{m_2}{0}) ,$$

quindi

$$H_i M_2 = H_{i+1} \quad (1 \leq i < m_2)$$

$$H_{m_2} M_2 = N_2 = V_1,$$

$$W_t = \left\| \begin{array}{c} \frac{H_1}{\cdot} \\ \cdot \\ \cdot \\ \frac{H_{m_2}}{V_1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \frac{V_t}{V_t} \end{array} \right\|, \quad t = m_1 - m_2$$

e trasformiamo A con

$$K = \left(\frac{I_1}{0} \middle| \frac{-W_t}{I_2} \right), \quad K^{-1} = \left(\frac{I_1}{0} \middle| \frac{W_t}{I_2} \right),$$

otteniamo

$$\begin{aligned} K A K^{-1} &= \left(\frac{I_1}{0} \middle| \frac{-W_t}{I_2} \right) \cdot \left(\frac{M_1}{0} \middle| \frac{0}{M_2} \right) \cdot \left(\frac{I_1}{0} \middle| \frac{W_t}{I_2} \right) = \\ &= \left(\frac{M_1}{0} \middle| \frac{M_1 W_t - W_t M_2}{M_2} \right) = \left(\frac{M_1}{0} \middle| \frac{R}{M_2} \right), \end{aligned}$$

avendo posto $R = M_1 W_t - W_t M_2$.

Ricordando la forma di M_1 e M_2 si ha

$$M_1 W_t = \left\| \begin{array}{c} \frac{H_2}{\cdot} \\ \cdot \\ \cdot \\ \frac{H_{m_2}}{V_1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \frac{V_t}{N_1 W_t} \end{array} \right\|, \quad W_t M_2 = \left\| \begin{array}{c} \frac{H_2}{\cdot} \\ \cdot \\ \cdot \\ \frac{H_{m_2}}{V_1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \frac{V_t}{V_{t+1}} \end{array} \right\|,$$

quindi

$$R = M_1 W_t - W_t M_t = \left\| \begin{array}{c} 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ \hline N_1 W_t - V_{t+1} \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c} 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ \hline R_{(m_1)} \end{array} \right\| ,$$

avendo posto

$$R_{(m_1)} = N_1 W_t - V_{t+1} = (-a_{m_1}^{(1)}, -a_{m_1-1}^{(1)}, \dots, -a_1^{(1)}, -1) W_{t+1} \quad \text{ove}$$

$$W_{t+1} = \left\| \begin{array}{c} H_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \hline H_{m_2} \\ \hline V_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \hline V_{t+1} \end{array} \right\| .$$

Per dimostrare che l' m_2 - complesso $R_{(m_1)}$ è formato coi coefficienti di $R(x)$ moltiplicati per $(-1)^{m_1}$ basta osservare quanto segue. Detto $Q(x)$ il quoziente di $f_1(x)$ per $f_2(x)$, tra i coefficienti di $f_1(x)$, $f_2(x)$, $Q(x)$, $R(x)$ esistono $m_1 + 1$ relazioni che si compendiano brevemente nella relazione

$$(r_{m_2}, r_{m_2-1}, \dots, r_1, q_t, \dots, q_1, q_0) \cdot D = (a_{m_1}^{(1)}, a_{m_1-1}^{(1)}, \dots, a_1, 1) ,$$

$$\text{essendo} \quad D = \left(\frac{I}{-N} \middle| \frac{0}{P_{t+1}} \right) ,$$

ove

$$N = \left\| \begin{array}{c} N_2 \\ \hline \frac{N_2^{(2)}}{N_2^{(2)}} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \hline N_2^{(t+1)} \end{array} \right\| ,$$

e P_{i+1} ha il solito significato. Poichè $|D| = 1$, la relazione precedente si può anche scrivere

$$(r_{m_2}, r_{m_2-1}, \dots, r_1, q_i, \dots, q_1, q_0) = (a_{m_1}^{(1)}, \dots, a_1^{(1)}, 1) D^{-1},$$

$$D^{-1} = \left(\frac{I}{P_{i+1}^{-1} N} \middle| \frac{0}{P_{i+1}^{-1}} \right),$$

ma per le relazioni tra le $N_i^{(s)}$ e le V_i si ha

$$P_{i+1}^{-1} N = \left\| \begin{array}{c} \frac{V_1}{\vdots} \\ \frac{\vdots}{V_{i+1}} \end{array} \right\|,$$

quindi posto

$$P = \left(\frac{0}{P_{i+1}^{-1}} \right); \quad D^{-1} = (W_{i+1} | P),$$

l'ultima relazione si può spezzare nelle due

$$(r_{m_2}, r_{m_2-1}, \dots, r_1) = (a_{m_1}^{(1)}, a_{m_1-1}^{(1)}, \dots, a_1^{(1)}, 1) W_{i+1}$$

$$(q_i, q_{i+1}, \dots, q_1, q_0) = (a_{m_1}^{(1)}, a_{m_1-1}^{(1)}, \dots, a_1^{(1)}, 1) P.$$

La prima di queste ci dice appunto che l' m_2 - complesso $R_{(m_1)}$ moltiplicato per $(-1)^{m_1}$ coincide con l' m_2 - complesso $(r_{m_2}, r_{m_2-1}, \dots, r_1) \cdot c \cdot v \cdot d$.

§ 2. - Riduzione a forma canonica.

4. - Vediamo ora il procedimento per calcolare la forma canonica.

In primo luogo usando solo il primo lemma si può ottenere

per la matrice A la forma seguente

$$(1) \quad A = \left\| \begin{array}{c|c|c|c} \hline M_1 & 0 & & 0 \\ \hline 0 & M_2 & & 0 \\ \hline & & \ddots & \\ & & & \ddots & \\ \hline 0 & 0 & & M_h \\ \hline \end{array} \right\|, \quad (h \geq 1)$$

che in generale però non è la forma canonica, come vedremo in seguito. Basta per questo far vedere come si ottiene la prima matrice M_1 cioè per la A la forma

$$(2) \quad A = \left(\frac{M_1}{0} \middle| \frac{0}{B_1} \right), \quad B_1 = \|a_{r,s}\|, \\ (r, s = m_1 + 1, m_1 + 2, \dots, n)$$

poichè basta poi operare su B_1 come su A per ottenere M_2 e così di seguito finchè non si sia ottenuta la (1).

Se nella A tutti i termini fuori della diagonale principale sono nulli, cioè $a_{r,s} = 0$ per $r \neq s$, essa ha già la forma (1) essendo $h = n$ ed M_i di primo ordine ($i = 1, 2, \dots, n$).

Supponiamo quindi che in A vi sia un elemento $a_{i,k} \neq 0$ $i \neq k$ e con opportuni scambi fra righe e fra colonne portiamolo al posto $(1, 2)$, in modo che $a_{1,2} \neq 0$. Indicando allora con $A_{(1)}$ la prima riga di A cioè $A_{(1)} = (a_{1,1}, a_{1,2}, \dots, a_{1,n})$ e con H_i il solito n -complesso $H_i = (\overset{1}{0}, \dots, \overset{i-1}{0}, \overset{i}{1}, \overset{i+1}{0}, \dots, \overset{n}{0})$ trasformiamo A con

$$T_1 = \left\| \begin{array}{c} \hline H_1 \\ \hline A_{(1)} \\ \hline H_2 \\ \hline \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \hline H_n \\ \hline \end{array} \right\|, \quad |T_1| = a_{1,2} \neq 0$$

otteniamo

$$T_1 A T_1^{-1} = A' = \left\| \begin{array}{c} \frac{H_2}{A'_{(2)}} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \frac{A'_{(n)}}{A'_{(n)}} \end{array} \right\| ,$$

come si verifica facilmente.

In generale supponiamo che la A abbia questa forma

$$A'' = \left\| \begin{array}{c} \frac{H_s}{\cdot} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \frac{H_{s-1}}{A''_{(s-1)}} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \frac{A''_{(n)}}{A''_{(n)}} \end{array} \right\| , \quad (0 < s \leq n)$$

e che in $A''_{(s-1)}$ vi sia un elemento $a_{s-1, \bar{k}} \neq 0$ ($\bar{k} \geq s$). Con opportuni scambi fra colonne e fra righe possiamo portare $a_{s-1, \bar{k}}$ al posto $(s-1, s)$, in modo che $a_{s-1, s} \neq 0$. Trasformiamo quindi A'' con

$$T_2 = \left\| \begin{array}{c} \frac{H_1}{\cdot} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \frac{H_{s-1}}{A''_{(s-1)}} \\ \frac{H_{s+1}}{H_{s+1}} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \frac{H_n}{H_n} \end{array} \right\| , \quad |T_2| = a_{s-1, s} \neq 0$$

otteniamo

$$(3) \quad T_2 A'' T_2^{-1} = A''' = \left\| \begin{array}{c} \frac{H_2}{\cdot} \\ \cdot \\ \cdot \\ \frac{H_s}{A_{(s)}'''} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \frac{A_{(n)}'''}{\cdot} \end{array} \right\|.$$

Una trasformazione analoga alla (3) si può eseguire operando sulle colonne, cioè a destra, quando la A ha la forma seguente

$$A^* = (A^{(1)} | \dots | A^{(s+1)} | H^{(s+1)} | \dots | H^{(n-1)}),$$

essendo $A^{(i)}$ l' n -complesso verticale uguale all' i^{ma} colonna di A^* e $H^{(i)} = (H_i)_{-1}$, e in $A^{(s+1)}$ vi è un elemento $\alpha_{\bar{i}, s+1} \neq 0$ ($\bar{i} < s+1$). Infatti portato questo elemento al posto $(s, s+1)$, in modo che $\alpha_{s, s+1} \neq 0$ e posto

$$T_3 = (H^{(1)} | \dots | H^{(s-1)} | A^{(s+1)} | H^{(s+1)} | \dots | H^{(n)}), \quad |T_3| = \alpha_{s, s+1} \neq 0$$

trasformando A^* con T_3 a destra otteniamo

$$(4) \quad T_3^{-1} A^* T_3 = A^{**} = (A^{(1)} | \dots | A^{(s)} | H^{(s)} | \dots | H^{(n-1)}).$$

La (3) e la (4) sono le due trasformazioni fondamentali per il nostro calcolo.

5. - Applicando successivamente la (3) si determina un indice m in modo che la A abbia la forma

$$A_1 = \left\| \begin{array}{c} \frac{H_2}{\cdot} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \frac{H_m}{A_{(m)}} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \frac{A_{(n)}}{\cdot} \end{array} \right\|,$$

ed in $A_{(m)}$ sia $a_{m,k} = 0$ per $k > m$. La A_1 si può scrivere

$$A_1 = \left(\frac{M}{D} \middle| \frac{0}{B} \right),$$

ove

$$B = \|a_{r,s}\| \quad (r, s = m+1, \dots, n)$$

$$D = \|a_{r,s}\| \quad (r = m+1, \dots, n; s = 1, 2, \dots, m)$$

Se $D = 0$ A_1 ha la forma (2). Se $D \neq 0$ si applica il primo lemma e la D o si annulla od assume la forma

$$D = (D^{(1)} | 0 | \dots | 0).$$

Nel primo caso si ha ancora la forma (2). Nel secondo determinata la P_1 che trasforma M in M^* trasformiamo A_1 con

$$P = \left(\frac{P_1}{0} \middle| \frac{0}{I} \right), \quad P^{-1} = \left(\frac{P_1^{-1}}{0} \middle| \frac{0}{I} \right),$$

$$\begin{aligned} P A_1 P^{-1} &= \left(\frac{P_1}{0} \middle| \frac{0}{I} \right) \cdot \left(\frac{M}{D} \middle| \frac{0}{B} \right) \cdot \left(\frac{P_1^{-1}}{0} \middle| \frac{0}{I} \right) = \left(\frac{P_1 M P_1^{-1}}{D P^{-1}} \middle| \frac{0}{B} \right) = \\ &= \left(\frac{M^*}{D} \middle| \frac{0}{B} \right) = A_1^*, \end{aligned}$$

che si può anche scrivere con soli scambi di righe e di colonne.

$$A_1^* = \left(\frac{B}{0} \middle| \frac{D}{M^*} \right) = (A^{(1)} | A^{(2)} | \dots | A^{(n-m)} | H^{(n-m)} | \dots | H^{(n-1)}).$$

Ricordando che $D^{(1)} \neq 0$ e quindi in $A^{(n-m)}$ v'è almeno un elemento $a_{\bar{i}, n-m} \neq 0$, $\bar{i} < n-m$, alla A_1^* si può applicare la trasformazione (4) successivamente fino ad ottenere un nuovo indice $m' > m$ tale che sia

$$A_1^* = (A^{(1)} | A^{(2)} | \dots | A^{(n-m')} | H^{(n-m')} | \dots | H^{(n-1)}),$$

ed in $A^{(n-m')}$ sia $a_{i, n-m'} = 0$ per $i < n-m$.

A_2^* ha così la forma

$$A_2^* = \left(\frac{B'}{D'} \middle| \frac{0}{M_1^*} \right).$$

Se $D' = 0$ trasformando M_1^* nella corrispondente M' si avrebbe la forma (2) altrimenti si applica il lemma I bis e se con questo D' si annulla si ha ancora la forma (2). Se D' non si annulla assume la forma

$$D' = \left\| \begin{array}{c} 0 \\ \hline \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \hline 0 \\ \hline D'_{(m')} \end{array} \right\|.$$

Posto allora

$$P_2 M_1^* P_2^{-1} = M' \quad , \quad P_3 = \left(\frac{I}{0} \middle| \frac{0}{P_2} \right),$$

si ha

$$\begin{aligned} P_3 A_2^* P_3^{-1} &= \left(\frac{I}{0} \middle| \frac{0}{P_2} \right) \cdot \left(\frac{B'}{D'} \middle| \frac{0}{M_1^*} \right) \cdot \left(\frac{I}{0} \middle| \frac{0}{P_2^{-1}} \right) = \\ &= \left(\frac{B'}{P_2 D'} \middle| \frac{0}{P_2 M_1^* P_2^{-1}} \right) = \left(\frac{B'}{D'} \middle| \frac{0}{M'} \right) = A_2, \end{aligned}$$

che si può anche scrivere con soli scambi di righe e di colonne

$$A_2 = \left(\frac{M'_1}{0} \middle| \frac{D'}{B'} \right) = \left\| \begin{array}{c} H_2 \\ \hline \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \hline H_{m'} \\ \hline A_{(m')} \\ \hline \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \hline A_n \end{array} \right\|.$$

In $A_{(m')}$, essendo $D'_{(m')} \neq 0$, v' è almeno un elemento $a_{m', \bar{k}} \neq 0$ $\bar{k} > m'$, si può perciò applicare ad A_2 la trasformazione (3).

6. - Da quanto abbiamo detto risulta ormai chiaro come può determinarsi la forma (2). Infatti, applicata finchè era possibile la trasformazione (3), abbiamo ottenuto la A_1 che poteva coincidere colla forma (2) se $D = 0$. Se $D \neq 0$ si è applicato il lemma I e, se con questo la D non si annullava, il che ci avrebbe ricondotti alla (2), abbiamo veduto che si poteva con opportune trasformazioni ridurci ad applicare la (4) con la quale si è determinata la A_2^* . In questa il nuovo indice m' era maggiore di m , cioè l'ordine di M_1^* maggiore di quello di M .

Sulla A_2^* abbiamo ragionato come sulla A_1 ed abbiamo veduto che se $D' = 0$ si otteneva ancora la (2), se $D' \neq 0$, ma si annullava con il lemma I bis, si otteneva ancora la (2), se D' non si annullava nemmeno col lemma I bis, ci siamo ricondotti a poter applicare ancora la (3) e quindi a ripetere nell'ordine preciso il calcolo fatto prima.

Ora però ogni volta che si applica la (3) o la (4) l'ordine delle M aumenta, ma questo non può essere maggiore di n , quindi si presenterà certamente uno dei due casi, o determineremo una forma del tipo (2), oppure M diverrà di ordine n , cioè si avrà $A = M$, che è già una forma del tipo (1).

Se si ottiene la (2), come da questa si ottenga la forma (1) è cosa troppo ovvia per insistervi.

7. - Vediamo piuttosto, poichè la (1) non è in generale la forma canonica, come si arrivi a determinare questa. Intanto la (1) sarebbe la forma canonica se in essa $|M_i - xI|$ ($0 < i < r$) fosse divisibile per $|M_{i+j} - xI|$ ($0 < j < r - i$). Facciamo quindi vedere come questo si possa ottenere applicando il lemma II.

In primo luogo possiamo supporre che nella (1) gli ordini delle M_i siano non crescenti, poichè in caso contrario si possono ordinare queste in modo che ciò avvenga.

Sia allora $M_{\frac{r}{2}}$ la prima delle M il cui determinante caratteristico non divide quello di M_1 e portiamo $M_{\frac{r}{2}}$ al secondo posto se già non v' è. Considerando le prime due M , abbiamo

la matrice

$$\left(\begin{array}{c|c} M_1 & 0 \\ \hline 0 & M_2 \end{array} \right),$$

A questa, per le ipotesi fatte, è applicabile il lemma II in modo da ottenere la matrice

$$\left(\begin{array}{c|c} M_1 & R \\ \hline 0 & M_2 \end{array} \right), \quad R = \left\| \begin{array}{c} 0 \\ \hline \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \hline 0 \\ \hline R_{(m_1)} \end{array} \right\|, \quad (R_{(m_1)} \neq 0)$$

che si scrive anche

$$\left(\begin{array}{c|c} M_1 & R \\ \hline 0 & M_2 \end{array} \right) = \left\| \begin{array}{c} H_2 \\ \hline \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \hline H_{m_1} \\ \hline A_{(m_1)} \\ \hline \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \hline A_{(m_1+m_2)} \end{array} \right\|.$$

In $A_{(m_1)}$, poichè $R_{(m_1)} \neq 0$, v'è almeno un $a_m, \bar{k} \neq 0$ ($\bar{k} > m_1$), è quindi applicabile la trasformazione (3) un certo numero ≥ 1 di volte anzi si potranno applicare tutti i calcoli già esposti fino ad ottenere od una sola M od una forma analoga alla (2), cioè

$$\left(\begin{array}{c|c} M'_1 & 0 \\ \hline 0 & B_1 \end{array} \right),$$

e da questa, con procedimenti già noti, la forma

$$\left(\begin{array}{c|c} M'_1 & 0 \\ \hline 0 & M'_2 \end{array} \right).$$

Osserviamo ora che, avendo applicato almeno una volta la trasformazione (3), l'ordine di M'_1 è maggiore di quello di M_1 e quello di M'_2 minore di quello di M_2 .

Se $|M'_1 - xI|$ non è divisibile per $|M'_2 - xI|$ operando ancora nel modo ora esposto, si ottiene dalla forma ultima o una sola M o la forma

$$\left(\frac{M''_1}{0} \middle| \frac{0}{M''_2} \right),$$

nella quale ancora l'ordine di M''_1 è maggiore di quello di M'_1 e quello di M''_2 minore di quello di M'_2 .

8. - Proseguendo così dopo un certo numero $s \geq 1$ di volte si deve verificare certamente uno dei due casi, od otterremo dalle M_1, M_2 una sola M oppure ne avremo due

$$\left(\frac{M^{(s)}_1}{0} \middle| \frac{0}{M^{(s)}_2} \right),$$

tali che $|M^{(s)}_1 - xI|$ sia divisibile per $|M^{(s)}_2 - xI|$.

Ritornando alla (1) si porrà $M^{(s)}_2$ al posto che le conviene perchè gli ordini delle M_i siano ancora non crescenti. Poi se v' è ancora qualche M_i il cui determinante caratteristico non divida quello della nuova M_1 , cioè di $M^{(s)}_1$, sulla prima di queste si opererà in modo perfettamente analogo a quello ora esposto. Questo procedimento si userà fino a che vi sia qualche M_i il cui determinante caratteristico non divida quello di M_1 . Che si debba giungere alla fine è presto provato, perchè, ogni volta che si applica il lemma II ed in conseguenza almeno una volta la trasformazione (3), l'ordine di M_1 aumenta, ma M_1 non può avere ordine maggiore di n , quindi al massimo dopo $n - m_1$ volte M_1 viene ad avere ordine n , cioè si ha $A = M_1$.

In generale si otterrà dunque una forma analoga alla (1) nella quale la prima delle M che indicheremo con $\bar{M}_0$ ha il determinante caratteristico divisibile per quello di M_i ($i > 0$). Operando su $M_2, M_3 \dots$ come su M_1 si ottiene in modo ormai chiaro la forma seguente per la A .

$$C = \left\| \begin{array}{c|c|c|c} M_0 & 0 & & 0 \\ \hline 0 & M_1 & & 0 \\ \hline & & \ddots & \\ \hline 0 & 0 & & M_r \end{array} \right\| ,$$

nella quale $|M_i - xI|$ è divisibile per $|M_{i+j} - xI|$ ($0 \leq i < r$; $0 < j \leq r - i$).

9. - La C è la forma canonica perchè è subito visto che i $M.C.D.$ dei minori di ordine $n - r - i$ ($0 < i < n - r$) della $(C - xI)$ e per conseguenza di $(A - xI)$ sono delle costanti mentre il $M.C.D.$ di quelli di ordine $n - r$ è $|M_r - xI|$ di quelli di ordine $n - r + 1$ è $|M_r - xI| \times |M_{r-1} - xI|$ e in generale di quelli di ordine $n - r + j$ ($0 \leq j \leq r$) è $|M_r - xI| \times \dots \times |M_{r-j} - xI|$. Quindi i divisori elementari di $(A - xI)$ essendo i rapporti fra questi $M.C.D.$ sono i seguenti; i primi $n - r - 1$ sono delle costanti l' $(n - r)^{\text{mo}}$ $D. E.$ è $|M_r - xI|$ l' $(n - r + 1)^{\text{mo}}$ è $|M_{r-1} - xI|$ e in generale l' $(n - r + j)^{\text{mo}}$ $D. E.$ ($0 \leq j \leq r$) è $|M_{r-j} - xI|$.

In particolare $|M_0 - xI|$ come rapporto fra $|A - xI|$ ed il massimo comun divisore dei minori di ordine $n - 1$ rappresenta il primo membro dell'equazione minima di A .
