RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

GIANFRANCO CIMMINO

Sulle estremanti degli integrali doppi in forma ordinaria

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 8 (1937), p. 110-119

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1937__8__110_0>

SULLE ESTREMANTI DEGLI INTEGRALI DOPPI IN FORMA ORDINARIA

di GIANFRANCO CIMMINO a *Napoli*.

Scopo della presente ricerca è la determinazione di proprietà di derivabilità per le funzioni $z(x, y)$ estremanti un integrale doppio di forma non parametrica

$$I_D[z] = \iint_D F(x, y, z, p, q)\, dx\, dy. \tag{1}$$

Precisamente, in analogia a un noto risultato relativo agli integrali semplici [1], il teorema al quale qui si perviene si riferisce a funzioni $z(x, y)$ annullanti la variazione prima – in particolare a estremanti –, che sono supposte soltanto lipschitziane.

Naturalmente, le difficoltà che si incontrano in tale studio sono, in confronto al caso analogo degli integrali semplici, assai maggiori; e infatti, mentre si posseggono risultati molto generali, anche nel caso degl' integrali doppi, sull' esistenza delle $z(x, y)$ estremanti [2], per contro sulle proprietà di derivabilità di esse non sono stati conseguiti finora, per quanto mi è noto, che risultati incompleti. Così ricorderò che la continuità delle derivate

[1] L. TONELLI, *Fondamenti di Calcolo delle Variazioni*, Vol. II, n. 96.

[2] L. TONELLI, *L' estremo assoluto degli integrali doppi* [Annali della R. Scuola Norm. Sup. di Pisa, Serie II, Vol. II, p. 89-130, (1933)]. Un risultato relativo all' esistenza dell' estremo è stato pure annunciato in una nota, apparsa in questi giorni, P. GILLIS, *Sur les intégrales multiples du calcul des variations* [Comptes Rendus de l' Acad. des Sciences de Paris, t. 206, p. 32–34, (1938)].

seconde per $z(x, y)$ viene dimostrata da E. Hopf ([3]) in base all' ipotesi che le derivate prime siano hölderiane; da R. Caccioppoli ([4]) l'ipotesi di E. Hopf sulle derivate prime viene ridotta a quella della semplice continuità, con F indipendente da z, oppure anche ([5]), come qui, a quella che $z(x, y)$ sia lipschitziana, ma, in tal caso, con F funzione delle sole p, q.

Nel presente lavoro, riesco allo scopo indicato, poggiando sulla moderna teoria delle equazioni a derivate parziali non lineari del second' ordine di tipo ellittico. Le ipotesi di regolarità sulla funzione F a ciò occorrenti sono di natura assai generale. Peraltro, rileverò che il caso più interessante è quello in cui F riesce, in particolare, analitica, perchè allora la continuità delle derivate seconde porta di conseguenza addirittura la analiticità per $z(x, y)$, e si ha quindi una estensione del noto teorema di D. Hilbert sul carattere analitico delle estremali.

1. Nell' integrale doppio $I_D[z]$ supporremo: a) che D sia un insieme aperto e limitato del piano xy, b) che F sia dotata di derivate parziali dei primi tre ordini continue per xy in D e z, p, q qualunque, c) che sia verificata la condizione di Legendre

$$(2) \qquad F_{pp} > 0\,, \qquad F_{pp}F_{qq} - F_{pq}^2 > 0\,,$$

cioè che l'integrale sia regolare positivo.

Inoltre, considereremo l'integrale $I_D[z]$ soltanto per funzioni $z(x, y)$ lipschitziane, cioè a rapporti incrementali limitati in D. Nel campo di queste funzioni, tanto $I_D[z]$ che la sua variazione

([3]) E. Hopf, *Zum analytischen Charakter der Lösungen regulärer zweidimensionaler Variationsprobleme* [Math. Zeitschrift, Bd. 30, p. 404–413, (1929)].

([4]) R. Caccioppoli, *Sulle equazioni ellittiche a derivate parziali con due variabili indipendenti e sui problemi regolari di Calcolo delle Variazioni* [Rend. della R. Acc. dei Lincei, serie 6ª, vol. XXII, p. 305–310, 376–379, (1935)].

([5]) R. Caccioppoli, *Sul carattere analitico delle soluzioni di una classe di problemi del Calcolo delle Variazioni* [Rend. della R. Acc. dei Lincei, serie 6ª, vol. XXV, p. 24–26, (1937)].

prima hanno sempre certamente senso e l' annullarsi della variazione prima è condizione necessaria affinchè si abbia un estremo ([6]).

Il teorema che vogliamo dimostrare è il seguente:

Se $z_0(x, y)$ è una funzione lipschitziana in D, per la quale si annulla la variazione prima di $I_D[z]$, esisteranno e saranno continue (anzi hölderiane) le derivate parziali seconde di $z_0(x, y)$, e sarà verificata, per questa funzione, l'equazione di LAGRANGE

$$\frac{\partial}{\partial x} F_p + \frac{\partial}{\partial y} F_q - F_z = 0 . \tag{3}$$

2. Sia Δ un insieme aperto contenuto in D e sia Γ la sua frontiera. Indicando ancora con $z_0(x, y)$ una funzione lipschitziana annullante la variazione prima di $I_D[z]$, proviamo anzitutto che:

Quando le derivate seconde di F rispetto a z, p, q sono limitate e il campo Δ è contenuto in un quadrato di lato sufficientemente piccolo, la funzione $z_0(x, y)$ fornisce per $I_\Delta[z]$ un valore minore di quello fornito da qualunque altra, assumente gli stessi valori su Γ, e quindi è necessariamente unica, per quei valori al contorno.

Sia infatti $z_1(x, y)$ un' altra funzione, anch' essa lipschitziana, coincidente con $z_0(x, y)$ su Γ. La differenza $I_\Delta[z_1] - I_\Delta[z_0]$ si potrà scrivere, tenendo conto del fatto che, per $z = z_0$, si annulla la variazione prima di $I_\Delta[z]$,

$$I_\Delta[z_1] - I_\Delta[z_0] = \iint_\Delta [F(x, y, z_1, p_1, q_1) - F(x, y, z_0, p_0, q_0)]\, dx dy =$$

$$= \iint_\Delta [\overline{F}_{pp} \cdot (p_1 - p_0)^2 + 2\, \overline{F}_{pq} \cdot (p_1 - p_0)(q_1 - q_0) + \overline{F}_{qq} \cdot (q_1 - q_0)^2 +$$

$$+ 2\, \overline{F}_{pz} \cdot (p_1 - p_0)(z_1 - z_0) + 2\, \overline{F}_{qz} \cdot (q_1 - q_0)(z_1 - z_0) +$$

$$+ \overline{F}_{zz} \cdot (z_1 - z_0)^2]\, dx dy ,$$

([6]) A. HAAR, *Zur Variationsrechnung* [Abhandlungen aus dem Math. Sem. der Hamburgischen Univ., Bd. 8, Heft. 1, (1930)].

dove col soprasegno abbiamo inteso indicare che le derivate seconde di F rispetto a z, p, q vanno prese negli argomenti x, y, $z_0 + \theta(z_1 - z_0)$, $p_0 + \theta(p_1 - p_0)$, $q_0 + \theta(q_1 - q_0)$, essendo θ un certo numero compreso fra zero e uno.

Teniamo presente, d'altra parte, che, per una funzione $g(t)$, nulla negli estremi dell'intervallo $a \leq t \leq a + l$ e dotata ivi quasi ovunque di derivata di quadrato sommabile, sussiste la disuguaglianza

$$\int_a^{a+l} |g(t)|^2 dt \leq \frac{l^2}{\pi^2} \int_a^{a+l} |g'(t)|^2 dt .$$

Se supponiamo allora che Δ sia contenuto in un quadrato di lato l, ed estendiamo la definizione di $z_1 - z_0$ (che è nulla, per ipotesi, sulla frontiera di Δ) a tutto il quadrato ponendola zero fuori di Δ, applicando la detta disuguaglianza e indicando con M un numero che superi i valori assoluti di tutte le derivate seconde di F rispetto a z, p, q, otteniamo

$$\Big| \iint_\Delta [\overline{F}_{zz} \cdot (z_1 - z_0)^2 + 2\,\overline{F}_{pz} \cdot (p_1 - p_0)(z_1 - z_0) +$$

$$+ 2\,\overline{F}_{qz} \cdot (q_1 - q_0)(z_1 - z_0)]\, dx\, dy \Big| \leq$$

$$\leq M \cdot \left(\frac{l^2}{2\pi^2} + \frac{2l}{\pi}\right) \iint_\Delta [(p_1 - p_0)^2 + (q_1 - q_0)^2]\, dx\, dy .$$

Detto, d'altra parte, μ l'estremo inferiore dei valori assunti dalla più piccola delle radici caratteristiche della forma quadratica definita positiva

$$\overline{F}_{pp}\,\xi^2 + 2\,\overline{F}_{pq}\,\xi\eta + \overline{F}_{qq}\,\eta^2 ,$$

al variare di xy in Δ e di θ fra zero e uno, sarà pure

$$\iint\limits_{\Delta} [\overline{F}_{pp} \cdot (p_1 - p_0)^2 + 2\, \overline{F}_{pq} (p_1 - p_0)(q_1 - q_0) + \overline{F}_{qq} \cdot (q_1 - q_0)^2] dx dy \geq$$

$$\geq \mu \iint\limits_{\Delta} [(p_1 - p_0)^2 + (q_1 - q_0)^2]\, dx\, dy\,.$$

Pertanto è chiaro che la differenza $I_\Delta[z_1] - I_\Delta[z_0]$ riuscirà certamente positiva, ove risulti verificata la disuguaglianza

$$M \cdot \left(\frac{l^2}{2\pi^2} + \frac{2l}{\pi} \right) < \mu\,.$$

Resta così provato che, almeno quando Δ è contenuto in un quadrato di lato sufficientemente piccolo, una funzione $z_0(x, y)$ lipschitziana, che annulli la variazione prima di $I_\Delta[z]$, fornisce, per dati valori al contorno, il minimo assoluto per tale integrale.

3. Supponiamo, in particolare, che $z_0(x, y)$ sia una soluzione dell'equazione di Lagrange (3). Poichè ogni tale soluzione annulla la variazione prima di $I_\Delta[z]$, dal teorema del n. precedente risulta che, se è possibile racchiudere Δ in un quadrato di lato l così piccolo da rendere verificata l'ultima disuguaglianza scritta, non potrà esservi più di una funzione $z_0(x, y)$ verificante l'equazione di Lagrange e assumente dati valori su Γ.

Ricordiamo ora che, quando Γ si compone di una o più curve semplici chiuse, aventi curvatura continua e dotata di derivata prima continua rispetto all'arco, sussiste il seguente teorema [7] :

Se, nell' equazione

$$(4) \qquad Ar + 2Bs + Ct + D = 0\,, \qquad (AC - B^2 > a > 0)\,,$$

i coefficienti A, B, C, D sono funzioni di x, y, p, q continue e limitate con le loro derivate prime, il problema di Dirichlet

[7] Loc. cit. in [4], p. 377.

è risolubile, per ogni sistema di valori al contorno lipschitziani rispetto all'arco, mediante funzioni a derivate seconde hölderiane internamente a Δ.

Questo teorema non sarebbe più valido, in generale, se i coefficienti fossero supposti dipendenti anche da z. Peraltro, l'ipotesi che i coefficienti non dipendano da z gioca, nella dimostrazione, soltanto attraverso il fatto che, per l'equazione a variazioni relativa alla (4), il problema di DIRICHLET deve essere sempre risolubile. Ora, affinchè ciò si verifichi, basta notoriamente che (come nel caso contemplato dal citato teorema) l'equazione a variazioni sia priva del termine in z; ma, anche quando questo termine non manca (come nel caso generale che i coefficienti A, B, C, D non siano indipendenti da z), sussiste certamente l'illimitata risolubilità dell'equazione a variazioni, purchè il campo per il quale si vuole risolvere il problema di DIRICHLET sia sufficientemente ristretto.

Supponiamo ora che la (4) sia l'equazione di LAGRANGE (3), scritta in forma esplicita. Da quanto abbiamo detto risulta che:

Se, per ogni punto xy di D, sono continue, e riescono limitate rispetto a z, p, q la F_z insieme con le sue derivate del prim'ordine e le F_p, F_q insieme con le loro derivate dei primi due ordini, preso a piacere il dominio $\Delta + \Gamma$ in D, e supposto che esso possa racchiudersi in un quadrato di lato sufficientemente piccolo, il problema di DIRICHLET *relativo a Δ per la* (3) *ammette, per ogni sistema di valori al contorno lipschitziani rispetto all'arco, una ed una sola soluzione, a derivate seconde hölderiane internamente a* Δ.

4. Torniamo adesso alle ipotesi del n. 1 per F, senza l'ulteriore restrizione, occorrente nell'ultimo enunciato, che siano limitate la F_z e le dette derivate seconde e terze. Notiamo, però, che, data la funzione $z_0(x, y)$ lipschitziana, annullante la variazione prima di $I_D[z]$, le p_0, q_0 (esistenti quasi ovunque in D) saranno limitate in valor assoluto in Δ. Se modifichiamo la F per valori di z, p, q esterni ai limiti entro cui variano z_0, p_0, q_0, al variare di xy in Δ, la variazione prima dell'integrale $I_\Delta[z]$ così modificato si annullerà ancora per $z = z_0$.

Supponiamo che, sulla superficie $z = z_0(x, y)$, per xy contenuto in Δ, sia sempre

$$z^2 + p^2 + q^2 \leq R^2 .$$

Vogliamo sostituire alla F una funzione $\Phi(x, y, z, p, q)$, che, per ogni xy in Δ e z, p, q verificanti la disuguaglianza ora scritta, coincida con F, e che, oltre alle ipotesi indicate nel n. 1 relativamente a F, verifichi pure la ulteriore condizione di avere la derivata prima rispetto a z, nonchè le derivate seconde e terze limitate.

A ciò, posto, per brevità,

$$\rho^2 = p^2 + q^2 ,$$

e detto h un numero positivo da determinarsi in seguito, fissiamo anzitutto una funzione $\gamma(\tau)$ (che potrebbe essere, in particolare, un polinomio) dotata di derivate dei primi tre ordini continue per $0 \leq \tau \leq h$, positiva nell' interno di tale intervallo e per la quale sia

$$\gamma(0) = 1,\ \gamma'(0) = \gamma''(0) = \gamma'''(0) = 0 ,$$
$$\gamma(h) = \gamma'(h) = \gamma''(h) = \gamma'''(h) = 0 .$$

Indi poniamo

$$G \begin{cases} \equiv F, & \text{per} \quad \rho \leq R + h, \\ \equiv \gamma(\rho - R - h) \cdot F + \gamma(R + 2h - \rho) \cdot \rho^2, & \text{per} \quad R + h \leq \rho \leq R + 2h, \\ \equiv \rho^2, & \text{per} \quad R + 2h \leq \rho . \end{cases}$$

Questa funzione $G(x, y, z, p, q)$ avrà quindi le derivate dei primi tre ordini continue; non verificherà, però, in generale, la condizione (2) di Legendre, pei valori di p, q, per cui $R + h < \rho < R + 2h$.

Formiamo allora il polinomio $g(\rho)$ di settimo grado in ρ, per cui

$$g(R) = g'(R) = g''(R) = g'''(R) = 0\,,$$
$$g(R+h) = (R+h)^2, \quad g'(R+h) = 2(R+h)\,,$$
$$g''(R+h) = 2, \quad g'''(R+h) = 0\,;$$

un facile calcolo mostra che questo polinomio, almeno quando $\frac{R}{h}$ è abbastanza prossimo a zero, ha le derivate dei primi due ordini sempre positive per $R < \rho \leq R + h$. Fissato h in maniera che ciò si verifichi e detto c un altro numero positivo, definiremo una nuova funzione $H(x, y, z, p, q)$, ponendo

$$H \begin{cases} \equiv G \equiv F, & \text{per} \quad \rho \leq R\,, \\ \equiv G + cg\,, & \text{per} \quad R \leq \rho \leq R + h\,, \\ \equiv G + c\rho^2, & \text{per} \quad R + h \leq \rho \leq R + 2h\,, \\ \equiv G + c\rho^2 \equiv (c+1)\rho^2, & \text{per} \quad R + 2h \leq \rho\,. \end{cases}$$

Evidentemente, questa funzione ha ancora le derivate dei primi tre ordini continue. Inoltre, se c è sufficientemente grande, essa verificherà pure la condizione (2) di Legendre. Infatti, tale condizione equivale all' altra che, nel piano pq, la derivata seconda, eseguita secondo una qualunque direzione e per ogni punto, riesca sempre positiva. Ora, come abbiamo detto, ciò potrà non esser verificato per G, quando p, q assumono valori per cui ρ sia interno all' intervallo $R + h \leq \rho \leq R + 2h$, cioè il minimo m delle derivate seconde rispetto al punto pq, in qualunque direzione, della funzione G, in tale campo limitato, potrà essere un numero negativo; però, essendo sempre eguali a 2 le derivate seconde di ρ^2, basterà prendere $c > \frac{|m|}{2}$, perchè risultino ovunque positive quelle di $G + c\rho^2$ nel detto campo. La condizione di Legendre è poi verificata, per $R \leq \rho \leq R + h$, dalla $G + cg$, qualunque sia la costante positiva c, giacchè essa è verificata in tale campo sia dalla G (che coincide ivi con F), sia – almeno in senso debole – dalla g, come subito si riconosce in base al fatto che g', g'' sono positive o nulle.

Poniamo infine

$$\Phi \begin{cases} \equiv H, & \text{per } |z| \leq R, \\ \equiv \gamma(z-R)\cdot H + (c+1)[1-\gamma(z-R)]\rho^2, & \text{per } R \leq z \leq R+h, \\ \equiv \gamma(-z-R)\cdot H + (c+1)[1-\gamma(-z-R)]\rho^2, & \text{per } -R-h \leq z \leq -R, \\ \equiv (c+1)\rho^2 & \text{per } R+h \leq |z|. \end{cases}$$

Dopo le considerazioni precedenti, è chiaro che questa funzione $\Phi(x, y, z, p, q)$, oltre ad avere le derivate parziali dei primi tre ordini continue, verifica la condizione di LEGENDRE. Di più, essa si riduce a $(c+1)(p^2+q^2)$, non appena risulti $|z| \geq R+h$, oppure $p^2+q^2 \geq (R+2h)^2$, onde è manifestamente verificata la voluta limitazione delle derivate parziali.

5. Come abbiamo osservato nel n. precedente, la superficie lipschitziana $z = z_0(x, y)$, annullando la variazione prima di $I_\Delta[z]$, annullerà pure quella dell'integrale $J_\Delta[z]$, che si ottiene da $I_\Delta[z]$ mutandovi F in Φ.

Fissiamo ora il campo Δ ad arbitrio (possiamo prendere, per esempio, un cerchio) in D, ma abbastanza piccolo perchè siano applicabili le proposizioni del n. 2 e del n. 3.

I valori assunti sul contorno Γ di Δ da $z_0(x, y)$ sono lipschitziani rispetto all'arco; sicchè, per $J_\Delta[z]$, esiste, in virtù del teorema del n. 3, una funzione verificante l'equazione di LAGRANGE, relativo ai valori al contorno assunti da z_0 su Γ.

Ove tale funzione sia lipschitziana in Δ, dal teorema di unicità del n. 2 si conclude senz'altro che $z_0(x, y)$ deve coincidere con la soluzione $z_1(x, y)$ del problema di DIRICHLET per l'equazione di LAGRANGE relativa a $J_\Delta[z]$ assumente gli stessi valori su Γ, ed ha quindi derivate seconde hölderiane internamente a Δ.

Però, in generale, non possiamo garantire che le derivate prime della soluzione $z_1(x, y)$ del problema di DIRICHLET si mantengano limitate (e quindi che sia verificata la condizione di LIPSCHITZ per z_1), quando ci si approssima alla frontiera di Δ. Ragioneremo allora come segue.

Sia, se è possibile, z_1 non coincidente con z_0: vi sia, per esempio, un punto di Δ, in cui $z_1 > z_0$; detta ε una quantità positiva abbastanza prossima a zero, consideriamo l'insieme aperto Δ_ε dei punti di Δ per cui $z_1 - z_0 > \varepsilon$. Sulla frontiera di Δ_ε sarà $z_1 = z_0 + \varepsilon$, e tale frontiera sarà contenuta nell'insieme aperto Δ. Pertanto, in Δ_ε, la z_1 è lipschitziana, e possiamo applicare la proposizione del n. 2. Da quanto ivi si è detto risulta che le differenze

$$J_{\Delta_\varepsilon}[z_1 - \varepsilon] - J_{\Delta_\varepsilon}[z_0], \qquad J_{\Delta_\varepsilon}[z_0 + \varepsilon] - J_{\Delta_\varepsilon}[z_1]$$

devono essere positive; anzi, esse si esprimono mediante un integrale esteso a Δ_ε, che supera il prodotto di una costante (indipendente da ε) per

$$\iint_{\Delta_\varepsilon} [(p_1 - p_0)^2 + (q_1 - q_0)]^2 dx\,dy.$$

Dunque, le differenze stesse, non coincidendo dappertutto z_1 con z_0, rimangono superiori a una quantità indipendente da ε, quando $\varepsilon \to 0$.

Ma ciò è impossibile, giacchè, per $\varepsilon \to 0$, è

$$J_{\Delta_\varepsilon}[z_1 - \varepsilon] - J_{\Delta_\varepsilon}[z_1] \to 0, \qquad J_{\Delta_\varepsilon}[z_0 + \varepsilon] - J_{\Delta_\varepsilon}[z_0] \to 0.$$

Ne segue che, in ogni caso, z_0 deve coincidere con z_1 in tutto Δ, e quindi, per l'arbitrarietà di Δ, resta provato il teorema enunciato nel n. 1.