

RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

ERNESTO LAURA

La teoria delle matrici e il metodo dell' n . edro mobile

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 1 (1930), p. 85-109

[<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1930__1__85_0>](http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1930__1__85_0)

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1930, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

LA TEORIA DELLE MATRICI E IL METODO DELL' n . EDRO MOBILE

Memoria 1^a di ERNESTO LAURA.

Il metodo dell' n . edro mobile, applicato alla teoria delle varietà riemanniane, acquista particolare semplicità allorchando è sviluppato sfruttando sistematicamente l'algoritmo di sostituzione lineare o di matrice, questa considerata come segno di funzione lineare.

Questo concetto, già stato largamente applicato da diversi autori, si presta bene alla rappresentazione di una rotazione istantanea in uno spazio a più dimensioni (Cfr. il § III dove è introdotto il concetto di matrice rotazione). Valendomi poi delle ricerche del VOLTERRA riprendo il concetto, come già ho fatto in altre pubblicazioni, di derivata parziale a destra (o a sinistra) di una matrice, i cui elementi sono fuzioni di due o più variabili e quello di integrale a destra (o a sinistra) lungo una linea di una espressione differenziale del tipo

$$\sum_i \sigma_i du^i,$$

nella quale le σ_i sono matrici funzioni delle u^i . Questa integrazione eseguita lungo un cammino chiuso infinitesimo, e posta in relazione con il trasporto per parallelismo del LEVI-CIVITA, induce, con facili considerazioni, alla formula di RIEMANN della curvatura di un V_n relativa ad una orientazione. Di questo argomento, come della relazione dei simboli σ'_i introdotti con i simboli di RIEMANN, mi occuperò in una Memoria susseguente.

Il metodo, di carattere essenzialmente cinematico, seguito per la rappresentazione di una V_n immersa in un S_{m+n} è in ultima analisi il seguente. È considerato il moto rigido di un $(m+n)$ edro ortogonale dipendente da n variabili ed è mostrato come esso

possa rappresentarsi in modo completo (a meno ben si intende di un moto rigido) a mezzo di n vettori (che dico *traslazioni*) e di n matrici (che dico *rotazioni*), riferiti all' $n + m$. edro mobile. Questo è supposto, per ragioni ovvie di semplicità, disposto in modo che l' n . edro, facente parte di esso, $x_1 x_2 \dots x_n$ sia costantemente tangente alla V_n descritta dalla sua origine. Si assumono allora come elementi rappresentativi della data V_n i detti n vettori e le suddette n matrici-rotazione. Questi elementi sono determinati per ogni V_n a meno di rotazioni dell' S_n tangente e a meno di rotazioni dell' S_n normale. Converrà però in un primo tempo lasciare arbitrari sia l' n . edro cui è riferito l' S_n tangente, sia l' m . edro cui è riferito l' S_n normale, riservando la particolareizzazione di questi riferimenti solo in vista dello studio di particolari V_n .

Gli n vettori traslazione e le n matrici rotazione non sono però qualunque; esse sono legate da condizioni di monodromia che costituiscono la naturale generalizzazione di quelle equazioni date da DARBOUX nel caso delle superficie ordinarie e che tengono luogo delle equazioni di GAUSS CODAZZI.

Dalle matrici-rotazione (che sono di ordine $m + n$) si possono estrarre delle matrici di ordine n , che si possono interpretare come le loro proiezioni sopra l' S_n tangente. Queste si dimostra che sono determinate (a meno di una rotazione dell' S_n tangente) quando sia nota la metrica (e quindi gli n vettori traslazione) della V_n considerata. Il trasporto per parallelismo di LEVI-CIVITA dipende da questa possibilità ed è legato in modo semplice con queste matrici proiezioni delle matrici sopra l' S_n tangente. Queste n matrici di ordine n tengono il posto, in questa teoria, dei simboli di CHRISTOFFEL; esse però, a differenza di questi, costituiscono un sistema covariante semplice.

Saranno pure estratte dalle matrici rotazione le matrici proiezione sull' S_n normale. Le rotazioni che avvengono nei piani $x_i x_k$ ($i = 1, 2, \dots, n$ $k = 1, 2, \dots, m$) danno luogo a n gruppi di m vettori legati ai vettori traslazione da relazioni di reciprocità. Discende quasi immediatamente la possibilità di formare m quadriche differenziali invarianti per le rotazioni dell' S_n tangente e per trasformazioni di coordinate, le quali individuano una direzione nell' S_m normale. Si ha per tal modo una corrispondenza tra

le direzioni du^i dell' S_n tangente e le direzioni dell' S_{n-1} normale, corrispondenza suscettibile di una semplice interpretazione geometrica a cagione del teorema di MEUSNIER generalizzato.

La ricerca in questa 1^a Memoria è limitata alla rappresentazione cinematica di una V_n e allo studio degli elementi del 1° ordine delle linee tracciate sulla V_n .

Circa la Bibliografia dell'argomento, senza voler dare momentaneamente una lista completa delle memorie che direttamente si riattaccano all'argomento studiato, citerò, oltre la *Théorie de surfaces* di G. DARBOUX :

THOMAS CRAIG - *Displacements depending on One, Two and Three parameters in a Space of Four Dimensions* - American Journal of Math. 1898 - Vol. XV.

F. N. COLE - *On Rotations of Four Dimensions* - Ibidem, Vol. XXI.

HATZIKADIS - *Displacements depending on One, Two, k parameters in a Space of n Dimensions* - Ibidem, 1900, Vol. XXII.

TONOLO - *Una generalizzazione della teoria del triedro mobile* - Atti del R. Istituto Veneto - Tomo LXXII - Parte 2^a - 1912.

Relativamente alla teoria delle sostituzioni lineari o matrici nell'aspetto da me considerato, rimando a :

G. PEANO - *Calcolo geometrico secondo l'Ausdehnung lehre di H. Grassmann* - Torino, F.lli Bocca, 1888.

G. PEANO - *Integrazione per serie delle equazioni differenziali lineari* - Atti R. Accademia di Scienze di Torino - Vol. XXII, pagg. 437-446.

V. VOLTERRA - *Sui fondamenti della teoria delle equazioni differenziali lineari* - Società dei XL, Serie 3^a, t. VI e VII.

V. VOLTERRA - *Leçons sur les fonctions de lignes* - Paris, 1914, pag. 38 e segg.

Gli elementi della teoria delle matrici si trovano esposti, ad es., in :

H. HILTON - *Homogeneous linear substitutions* - Oxford, 1914.

M. BORN e P. JORDAN - *Elementare Quanten Mechanik* - Berlin, Springer, 1930.

Quanto infine alla teoria delle varietà riemanniane rimando

solamente alle due opere originali (e fondamentali insieme per il loro punto di vista) :

T. LEVI-CIVITA - *The absolute differential Calculus*. - Londra, 1927.

CARTAN - *La Géométrie des espaces de Riemann* - Paris, 1925, non essendo possibile far cenno, senza commettere dimenticanze, della ampia bibliografia riguardante l'argomento.

§ 1. - Derivate parziali ed integrale di Volterra di una matrice ⁽¹⁾.

Sia S una matrice, i cui elementi sono funzioni di più variabili indipendenti $u^1 u^2 \dots u^n$ derivabili rispetto a queste variabili quelle tante volte che sarà richiesto dalla validità delle formule che si stabiliscono. Con

$$\frac{\partial S}{\partial u^i}$$

intenderemo la matrice, i cui elementi sono le derivate parziali rispetto ad u^i degli elementi della matrice S . Seguendo il VOLTERRA e supponendo che il determinante della matrice S non sia nullo e quindi esista la matrice inversa S^{-1} , considereremo le due matrici :

$$S^{-1} \frac{\partial S}{\partial u^i}, \quad \frac{\partial S}{\partial u^i} S^{-1}$$

che indicheremo rispettivamente come derivata parziale di Volterra a sinistra (o a destra) della sostituzione S .

Si ponga :

$$(1) \quad \sigma_i = S^{-1} \frac{\partial S}{\partial u^i}.$$

(¹) Per una esposizione meno sommaria dell'argomento rimando alle mie due Note: *Sulle derivate parziali di Volterra di una sostituzione lineare - Integrale di Volterra* ecc. - Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, Vol. LV, 1922.

Le σ_i soddisfano allora a condizioni che si ricavano facilmente. Dalle (1) discende inverso :

$$(2) \quad S \sigma_i = \frac{\partial S}{\partial u^i}.$$

Da cui :

$$\frac{\partial}{\partial u^k} (S \sigma_i) - \frac{\partial}{\partial u^i} (S \sigma_k) = 0.$$

Esplicitando e valendosi della (2) si ha poi :

$$S \sigma_k \sigma_i + S \frac{\partial \sigma_i}{\partial u^k} - S \sigma_i \sigma_k - S \frac{\partial \sigma_k}{\partial u^i} = 0.$$

Operando con S^{-1} si ottiene infine :

$$(3) \quad \frac{\partial \sigma_i}{\partial u^k} - \frac{\partial \sigma_k}{\partial u^i} - \sigma_i \sigma_k + \sigma_k \sigma_i = 0.$$

Se queste $\frac{n(n-1)}{2}$ relazioni tra matrici sussistono, allora esiste una matrice S , riducendosi ad una matrice data S_0 quando le u^i assumono i valori u_0^i , e che inoltre verifica le n equazioni

$$S^{-1} \frac{\partial S}{\partial u^i} = \sigma_i.$$

Per la dimostrazione rimando alle mie due note citate a pag. 88.

La matrice S così determinata si dirà l'integrale di Volterra a sinistra del differenziale

$$\sum_i \sigma_i du^i;$$

le relazioni (3) rappresentano inoltre le condizioni di completa integrabilità del differenziale stesso. Se esse non sono verificate e se il punto u^i percorre la linea AB

$$u^i = u^i(t),$$

diremo integrale di Volterra (a sinistra) lungo la linea AB , la matrice S che soddisfa nei punti di AB all'equazione (sistema differenziale lineare) :

$$\frac{dS}{dt} = S \sum_i \sigma_i \frac{du^i}{dt} dt$$

e che si riduce ad un'assegnata matrice S_0 nel punto A . Il valore di S in B dipende allora dal cammino di integrazione; le condizioni (3) possono quindi chiamarsi condizioni di monodromia del dato differenziale.

Possiamo ora procedere, nel caso in cui non sono verificate le (3), alla integrazione lungo un cammino infinitesimo chiuso poligonale $PP_1P_2P_3P$, il punto P essendo di coordinate u^i , P_1 di coordinate $u^i + du^i$, P_2 di coordinate $u^i + du^i + \delta u^i$, P_3 di $u^i + \delta u^i$.

La matrice S debba coincidere con la matrice unità U (matrice i cui elementi sono tutti nulli, esclusi quelli della diagonale principale che sono uguali all'unità); integrando lungo PP_1 , la matrice S acquisterà in P_1 il valore

$$U + \sum_i \sigma_i du^i.$$

Integriamo allora lungo P_1P_2 e notiamo che nei punti di questo segmento le u^i vanno sostituite con $u^i + du^i$ e le matrici σ_i con $\sigma_i + \sum_k \frac{\partial \sigma_i}{\partial u^k} du^k$. La matrice S , che in P_1 ha il valore $U + \sum_i \sigma_i du^i$, avrà allora in P_2 il valore:

$$\begin{aligned} & U + \sum_i \sigma_i du^i + \left(U + \sum_i \sigma_i du^i \right) \left(\sum_i \sigma_i \delta u^i + \sum_{ik} \frac{\partial \sigma_i}{\partial u^k} du^k \delta u^i \right) = \\ & = U + \sum_i (\sigma_i du^i + \sigma_i \delta u^i) + \sum_{ik} \left(\sigma_i \sigma_k du^i \delta u^k + \frac{\partial \sigma_i}{\partial u^k} du^k \delta u^i \right) = \\ (4) \quad & = U + \sum_i \sigma_i (du^i + \delta u^i) + \frac{1}{2} \sum_{ik} \left[\left(\frac{\partial \sigma_i}{\partial u^k} + \sigma_k \sigma_i \right) du^k \delta u^i + \right. \\ & \left. + \left(\frac{\partial \sigma_k}{\partial u^i} + \sigma_i \sigma_k \right) du^i \delta u^k \right]. \end{aligned}$$

Integrando lungo il cammino $P P_3 P_2$ e prendendo ancora come valore iniziale di S in P la sostituzione unità U , otterremo come valore di S in P_2 :

$$\begin{aligned}
 & U + \sum_i \sigma_i (d u^i + \delta u^i) + \frac{1}{2} \sum_{ik} \left[\left(\frac{\partial \sigma_i}{\partial u^k} + \sigma_k \sigma_i \right) d u^i \delta u^k + \right. \\
 (5) \quad & \left. + \left(\frac{\partial \sigma_k}{\partial u^i} + \sigma_i \sigma_k \right) \delta u^i d u^k \right].
 \end{aligned}$$

Discende evidentemente che l'integrazione lungo il cammino chiuso $P P_1 P_2 P_3 P$ dà in P alla matrice S come valore il prodotto della matrice (4) per l'inversa della matrice (5).

Notiamo ora che se h_1 è infinitesimo del 1° ordine e h_2, k'_2 sono infinitesimi del 2° ordine, a meno di infinitesimi del 3° ordine si ha:

$$(1 + h_1 + k_2)(1 + h_1 + k'_2)^2 = 1 + k_2 - k'_2,$$

e che inoltre la stessa relazione vale se 1 è sostituito con la matrice unità U , e le h_1, k_2, k'_2 sono sostituite con matrici infinitesime di 1° e 2° ordine rispettivamente.

Integrando dunque il differenziale

$$\sum_i \sigma_i d u^i,$$

lungo il cammino chiuso $P P_1 P_2 P_3 P$, con la condizione che S acquisti inizialmente il valore U , si otterrà per S l'espressione:

$$U + \frac{1}{2} \sum_{ik} \left(\frac{\partial \sigma_i}{\partial u^k} - \frac{\partial \sigma_k}{\partial u^i} - \sigma_i \sigma_k + \sigma_k \sigma_i \right) (d u^i \delta u^k - d u^k \delta u^i).$$

Poniamo:

$$(6) \quad \sigma_{ik} = \frac{\partial \sigma_i}{\partial u^k} - \frac{\partial \sigma_k}{\partial u^i} - \sigma_i \sigma_k + \sigma_k \sigma_i.$$

Si deduce, conformemente a quanto precede, che

$$\sigma_{ik} = 0$$

sono le condizioni di monodromia del differenziale

$$\sum_i \sigma_i d u^i.$$

Sopra le matrici σ_{ik} si possono poi fare le osservazioni seguenti: 1° Le matrici σ_i formano un sistema semplice covariante

di matrici; le σ_{ik} formano un sistema doppio covariante. La Dm è pressochè evidente data la definizione (6) delle σ_{ik} .

2° Se poniamo (indicando con A una matrice a determinante non nullo):

$$\sigma'_i = A^{-1} \sigma_i A + A^{-1} \frac{\partial A}{\partial u^i}$$

e indichiamo con σ'_{ik} delle matrici formate con le σ'_i al modo stesso con cui le σ_{ik} sono formate con le σ_i , si ha:

$$\sigma'_{ik} = A^{-1} \sigma_{ik} A;$$

cioè le σ'_{ik} sono le trasformate delle σ_{ik} a mezzo della matrice A .

La dimostrazione è immediata se si osserva che:

$$A^{-1} \frac{\partial A}{\partial u^k} = - \frac{\partial A^{-1}}{\partial u^k} A$$

e che inoltre, poichè le $A^{-1} \frac{\partial A}{\partial u^i}$ sono le derivate a sinistra di A , vale l'identità:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u^i} \left(A^{-1} \frac{\partial A}{\partial u^k} \right) - \frac{\partial}{\partial u^k} \left(A^{-1} \frac{\partial A}{\partial u^i} \right) - A^{-1} \frac{\partial A}{\partial u^k} A^{-1} \frac{\partial A}{\partial u^i} + \\ + A^{-1} \frac{\partial A}{\partial u^i} A^{-1} \frac{\partial A}{\partial u^k} = 0. \end{aligned}$$

In particolare se A è costante, si ha contemporaneamente

$$\begin{cases} \sigma'_i = A^{-1} \sigma_i A \\ \sigma'_{ik} = A^{-1} \sigma_{ik} A \end{cases}$$

3° Se i, h, k sono tre indici diversi, si formi l'espressione

$$\frac{\partial \sigma_{ih}}{\partial u^k} + \frac{\partial \sigma_{hk}}{\partial u^i} + \frac{\partial \sigma_{ki}}{\partial u^h} = \frac{\partial}{\partial u^k} (\sigma_i \sigma_h - \sigma_h \sigma_i) + \dots$$

Raccogliendo nel 2° membro a fattore comune a sinistra σ_i , o poscia a destra pure σ_i , si hanno i termini:

$$\sigma_i \left(\frac{\partial \sigma_h}{\partial u^k} - \frac{\partial \sigma_k}{\partial u^h} \right) - \left(\frac{\partial \sigma_h}{\partial u^k} - \frac{\partial \sigma_k}{\partial u^h} \right) \sigma_i.$$

Questa espressione, quando si tenga conto delle equazioni di definizione delle σ_{hk} , diventa:

$$\sigma_i (\sigma_{hk} + \sigma_h \sigma_k - \sigma_k \sigma_h) - (\sigma_{hk} + \sigma_h \sigma_k - \sigma_k \sigma_h) \sigma_i.$$

Permutando ciclicamente gli indici i, h, k si perviene quindi facilmente alla identità:

$$\frac{\partial \sigma_{ih}}{\partial u^k} + \frac{\partial \sigma_{hk}}{\partial u^i} + \frac{\partial \sigma_{ki}}{\partial u^h} = \sigma_i \sigma_{hk} - \sigma_{hk} \sigma_i + \sigma_h \sigma_{ki} - \sigma_{ki} \sigma_h + \sigma_k \sigma_{ih} - \sigma_{ih} \sigma_k,$$

la quale, come discenderà nel seguito (II^a Memoria), ha una stretta affinità con le identità del BIANCHI.

§ 2. — Vettore-traslazione e matrice-rotazione.

Consideriamo un moto rigido di uno spazio a $(n+m)$ dimensioni dipendente da n variabili indipendenti $u^1 u^2 \dots u^n$. Sia S una matrice ortogonale funzione delle stesse variabili, $(X_1 X_2 \dots X_{n+m})$ un sistema di assi ortogonali fissi, $(x_1 x_2 \dots x_{n+m})$ un sistema di assi ortogonali mobili; indichi inoltre X un complesso di ordine $(n+m)$ i cui elementi si possano interpretare come coordinate di un punto P riferito agli assi fissi $(X_1 X_2 \dots X_{n+m})$, o come le componenti di un vettore riferito agli assi stessi; x indichi lo stesso vettore, quando le sue componenti sono calcolate rispetto agli assi mobili; infine X_0 sia un vettore ⁽¹⁾ funzione delle u^i e riferito agli assi fissi.

Una equazione del tipo:

$$(1) \quad X = X_0 + Sx$$

rappresenterà un moto rigido di un S_{n+m} , dipendente dalle n variabili $u^1 \dots u^n$.

Si potranno considerare n diversi vettori velocità del punto P in corrispondenza della variazione corrispondente delle $u^1 u^2 \dots u^n$.

(¹) Nel seguito un complesso $(a_1 \dots a_{n+m})$ si dirà un vettore riferito agli assi $(x_1 \dots x_{n+m})$, quando le componenti $(a'_1 \dots a'_{n+m})$ dello stesso complesso riferite a nuovi assi $(x'_1 \dots x'_{n+m})$ sono legate alle $(a_1 \dots a_{n+m})$ dalle formule di passaggio dai primitivi assi agli assi nuovi (supposta comune l'origine di entrambi).

Queste n velocità, riferite agli assi fissi, saranno rappresentate dagli r complessi:

$$\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial u^i} \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Dalla (1) discende poi:

$$(2) \quad \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial u^i} = \frac{\partial \mathbf{X}_0}{\partial u^i} + \frac{\partial S}{\partial u^i} \mathbf{x}.$$

Gli stessi vettori velocità riferiti agli assi mobili saranno rappresentati dai complessi:

$$S^{-1} \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial u^i}.$$

Avremo pertanto per la (2):

$$(3) \quad S^{-1} \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial u^i} = S^{-1} \frac{\partial \mathbf{X}_0}{\partial u^i} + S^{-1} \frac{\partial S}{\partial u^i} \mathbf{x}.$$

Sicchè: lo stato di velocità dei punti del sistema (moto istantaneo) si compone di un vettore che non varia al variare del punto $\mathbf{x}$ e di un vettore che dipende linearmente dal punto $\mathbf{x}$ stesso.

Si dimostra facilmente che $S^{-1} \frac{\partial S}{\partial u^i}$, cioè la derivata di VOLTERRA a sinistra di una matrice ortogonale, è una matrice emisimmetrica. Si ha invero

$$S^{-1} S = U$$

dove U è la matrice unità; derivando rispetto ad u^i , si ha:

$$(4) \quad \frac{\partial S^{-1}}{\partial u^i} S + S^{-1} \frac{\partial S}{\partial u^i} = 0.$$

Poichè S è una matrice ortogonale, S^{-1} è la sua trasposta (cioè la matrice il cui determinante è quello di S nel quale le verticali sono sostituite con le orizzontali). E poichè la trasposta di $\frac{\partial S^{-1}}{\partial u^i} S$ è $S^{-1} \frac{\partial S}{\partial u^i}$, discende dalla (4) quanto si è asserito.

Porremo

$$(5) \quad \sigma_i = S^{-1} \frac{\partial S}{\partial u^i}$$

e indicheremo questa matrice (a determinante emisimmetrico) con il nome di *matrice-rotazione* per l'analogia che il vettore $\sigma_i x$ presenta con la velocità dovuta ad una rotazione istantanea nella Cinematica dei sistemi rigidi dello spazio ordinario.

Porremo inoltre :

$$(6) \quad \alpha_i = S^{-1} \frac{\partial X_0}{\partial u^i}$$

ed indicheremo questi vettori con il nome di *vettori-traslazione*.

Consegue: il moto istantaneo di un sistema rigido dipendente da n variabili indipendenti è completamente rappresentato da n vettori-traslazione e da n matrici-rotazione (a determinante emisimmetrico).

Questi n vettori e queste n matrici non sono però indipendenti, ma sono legati da relazioni che si ricavano agevolmente.

Le σ_i , essendo le derivate di Volterra di una matrice (ortogonale), soddisferanno alle relazioni:

$$(7) \quad \frac{\partial \sigma_i}{\partial u^k} - \frac{\partial \sigma_k}{\partial u^i} - \sigma_i \sigma_k + \sigma_k \sigma_i = 0.$$

Dalle equazioni di definizione (6) dei vettori α_i discende poi :

$$\frac{\partial}{\partial u^k} (S \alpha_i) - \frac{\partial}{\partial u^i} (S \alpha_k) = 0.$$

Da cui :

$$S \left(\frac{\partial \alpha_i}{\partial u^k} - \frac{\partial \alpha_k}{\partial u^i} \right) + \frac{\partial S}{\partial u^k} \alpha_i - \frac{\partial S}{\partial u^i} \alpha_k = 0.$$

Operando a sinistra con S^{-1} e tenendo conto delle equazioni di definizione delle σ_i , si ottiene :

$$(8) \quad \frac{\partial \alpha_i}{\partial u^k} - \frac{\partial \alpha_k}{\partial u^i} + \sigma_k \alpha_i - \sigma_i \alpha_k = 0.$$

Le (7) e (8) costituiscono le relazioni necessarie e sufficienti,

cui devono soddisfare i vettori α_i e le matrici emisimmetriche σ_i , affinchè esista un moto rigido dipendente da n variabili, che ammette come vettori traslazione i vettori α_i e come matrici-rotazione le matrici σ_i .

Soddisfatte invero le (7), si potrà determinare una matrice S , le cui derivate parziali a sinistra siano le σ_i e che si riduca per $u^i = u_0^i$ ad una matrice ortogonale costante, assegnata arbitrariamente, S_0 . La S sarà allora, per il fatto che le σ_i sono emisimmetriche, una matrice ortogonale.

Le (8) inoltre assicurano che il differenziale:

$$\sum_i S \alpha_i d u^i,$$

è un differenziale esatto (nel senso ordinario della parola): per quadrature perciò si potrà determinare il vettore X_0 tale che:

$$d X_0 = \sum_i S \alpha_i d u^i$$

e che inoltre si riduca ad un vettore arbitrariamente dato per $u^i = u_0^i$.

Per individuare un moto rigido dipendente da n variabili, basterà dunque dare n vettori α_i e n matrici σ_i , legate dalle relazioni (7) e (8), e fissare la posizione iniziale dell' $m+n$. edro mobile di riferimento.

§ 3. - Rappresentazione intrinseca di una V_n immersa in un S_{m+n} .

Ogni punto di un S_{m+n} che si muove di moto rigido dipendente da n variabili, descrive una V_n . Consideriamo in particolare la V_n descritta dall'origine dell' $m+n$. edro mobile.

Per rappresentare questa V_n potremo valerci delle considerazioni del n. precedente. Gioverà però, invece che considerare un $m+n$. edro generico, scegliere un $m+n$. edro di cui gli assi $x_1 x_2 \dots x_n$ giacciono nell' S_n tangente alla V_n considerata e di cui perciò, gli assi rimanenti $x_{n+1} \dots x_{m+n}$ nell' S_n normale.

Il moto rigido sarà individuato a mezzo delle n traslazioni α_i e delle n rotazioni σ_i legate dalle relazioni:

$$(A) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \mathbf{a}_i}{\partial u^k} - \frac{\partial \mathbf{a}_k}{\partial u^i} = \sigma_i \mathbf{a}_k - \sigma_k \mathbf{a}_i \\ \frac{\partial \sigma_i}{\partial u^k} - \frac{\partial \sigma_k}{\partial u^i} = \sigma_i \sigma_k - \sigma_k \sigma_i. \end{array} \right.$$

Per l'ipotesi posta, i vettori $\mathbf{a}_i$ appartengono all' S_n $x_1 x_2 \dots x_u$, quindi le componenti $n+1$.esima $\dots$ $n+m$.esima di questi n vettori saranno nulle. Nel seguito i vettori $\mathbf{a}_i$ si penseranno in generale rappresentati da complessi di ordine n .

Gli n vettori $\mathbf{a}_i$ e le n matrici σ_i legate dalle (A) si potranno assumere per rappresentare la V_n descritta dall'origine degli assi mobili. Questa rappresentazione della V_n è però largamente arbitraria.

Diamo invero nell' S_n tangente una rotazione A (A è dunque una matrice ortogonale di ordine n) all' n .edro $x_1 x_2 \dots x_u$ e nell' S_m normale una rotazione B all' m .edro $x_{n+m} \dots x_{n+n}$.

La A si può pensare matrice d'ordine $n+m$, basterà aggiungere m colonne e altrettante orizzontali di elementi tutti nulli esclusi gli elementi diagonali uguali ad 1; così pure B si potrà immaginare come matrice di ordine $(m+n)$.

Se $\mathbf{x}'$ sono i complessi rappresentativi dei vettori $\mathbf{x}$ a rotazione avvenuta, si ha:

$$\mathbf{x}' = A B \mathbf{x}; \quad \mathbf{x} = B^{-1} A^{-1} \mathbf{x}'.$$

L'equazione del moto rigido diviene ora:

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}_0 + S B^{-1} A^{-1} \mathbf{x}';$$

per modo che se $\mathbf{a}'_i, \sigma'_i$ rappresentano i nuovi vettori traslazione e le nuove matrici-rotazione avremo:

$$\mathbf{a}'_i = (S B^{-1} A^{-1})^{-1} \frac{\partial \mathbf{X}_0}{\partial u^i} = A B S^{-1} \frac{\partial \mathbf{X}_0}{\partial u^i} = A B \mathbf{a}_i = A \mathbf{a}_i$$

poichè la rotazione B lascia inalterato lo spazio tangente, cui appartengono i vettori $\mathbf{a}_i$.

Si ha inoltre:

$$\sigma'_i = (S B^{-1} A^{-1})^{-1} \frac{\partial}{\partial u^i} (S B^{-1} A^{-1}) = A B S^{-1} \frac{\partial}{\partial u^i} (S B^{-1} A^{-1}) =$$

$$\begin{aligned}
 &= A B S^{-1} \left[\frac{\partial S}{\partial u^i} B^{-1} A^{-1} + S \frac{\partial B^{-1}}{\partial u^i} A^{-1} + S B^{-1} \frac{\partial A^{-1}}{\partial u^i} \right] = \\
 &= A B S^{-1} \frac{\partial S}{\partial u^i} B^{-1} A^{-1} + A B \frac{\partial B^{-1}}{\partial u^i} A^{-1} + A \frac{\partial A^{-1}}{\partial u^i}.
 \end{aligned}$$

Ponendo :

$$A \frac{\partial A^{-1}}{\partial u^i} = \alpha_i, \quad B \frac{\partial B^{-1}}{\partial u^i} = \beta_i;$$

indicando cioè con α_i, β_i le rotazioni istantanee corrispondenti alle rotazioni finite A^{-1}, B^{-1} e notando che le β_i operano sull' S_m normale e quindi $A \beta_i A^{-1} = \beta_i$, avremo

$$\sigma'_i = A B \sigma_i B^{-1} A^{-1} + \alpha_i + \beta_i.$$

Le formule di passaggio dai vettori e matrici α_i, σ_i ai vettori e matrici α'_i, σ'_i divengono :

$$(B) \quad \begin{cases} \alpha'_i = A \alpha_i \\ \sigma'_i = A B \sigma_i B^{-1} A^{-1} + \alpha_i + \beta_i. \end{cases}$$

Si conclude quindi: n vettori α_i e n matrici σ_i a determinante emisimmetrico verificanti le relazioni (A), individuano, a meno di moti rigidi, una V_n , quella descritta dall'origine degli assi cui sono riferiti i dati vettori e le date matrici. Se A, B sono rotazioni rispettivamente dello spazio tangente e dello spazio normale, le formule (B) forniscono n vettori-traslazione e n matrici-rotazione atte a rappresentare la stessa V_n .

È poi ovvio che le α'_i e le σ'_i soddisfano ancora alle relazioni (A).

Per il passaggio dalle variabili indipendenti u^i ad un sistema di nuove variabili v^i , valgono le formule seguenti, semplici deduzioni delle equazioni di definizione dei simboli α_i, σ_i :

$$\alpha'_i = \sum_j \alpha_j \frac{\partial u_j}{\partial v^i}, \quad \sigma'_i = \sum_j \sigma_j \frac{\partial u_j}{\partial v^i}.$$

Queste formole mettono in evidenza il carattere covariante degli n vettori α_i e delle n matrici σ_i .

§ 4. - Il teorema fondamentale nella teoria dell'n.edro mobile.

Le componenti del vettore α_i saranno indicate con

$$\alpha_{(r)i} \quad r = 1, 2, \dots n \quad i = 1, 2 \dots u$$

lasciando fuor parentesi l'indice di covarianza. Analogamente gli elementi delle matrici σ_i saranno indicati con

$$p_{(r,s)i} \quad \begin{array}{l} r = \text{numero d'ordine dell'orizzontale} \\ s = \text{» » della verticale.} \end{array}$$

Agli accrescimenti du^i delle variabili u^i corrisponde lo spostamento del punto sulla V_n rappresentato dal vettore

$$\sum_i \alpha_i du^i.$$

Consegue che l'elemento lineare della V_n sarà rappresentato da :

$$ds^2 = \sum_i (\alpha_i du^i)^2 = \sum_i \alpha_i \times \alpha_k du^i du^k.$$

Porremo sempre nel seguito :

$$\alpha_{ik} = \alpha_i \times \alpha_k.$$

I coefficienti α_{ik} di questa forma sono evidentemente invarianti per una rotazione qualunque dello spazio tangente.

Nota la 1^a forma fondamentale, note cioè le α_{ik} , i vettori α_i restano individuati a meno di rotazioni dello spazio tangente.

Se, ad es., non tutte le α_{ii} sono nulle, si potrà porre :

$$\begin{aligned} \alpha_{(1)1} &= \sqrt{\alpha_{11}} & \alpha_{(2)1} &= \dots = \alpha_{(n)1} = 0 \\ \alpha_{(1)2} &= \frac{\alpha_{12}}{\sqrt{\alpha_{11}}} & \alpha_{(2)2} &= \sqrt{\frac{\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}^2}{\alpha_{11}}} & \alpha_{(3)2} &= \dots = \alpha_{(n)2} = 0 \\ & & \text{ecc.} & \end{aligned}$$

Decomponiamo ora le σ_i in tre matrici che diremo rispettivamente σ'_i , σ''_i , σ'''_i definite nel seguente modo.

Le σ'_i applicate ad un vettore dell' S_n tangente danno un vettore ancora dell' S_n tangente; applicate ad un vettore dell' S_m normale danno un vettore nullo. Le σ'_i si possono considerare come le proiezioni delle σ_i sopra l' S_n tangente. I determinanti di queste matrici sono :

$$\begin{vmatrix} p_{(11)i} \dots p_{(1n)i} 0 \dots 0 \\ p_{(n1)i} \dots p_{(nn)i} 0 \dots 0 \\ 0 \dots 0 0 \dots 0 \\ 0 \dots 0 0 \dots 0 \end{vmatrix}$$

Le σ'_i saranno nel seguito considerate come matrici di ordine n .

Le σ'''_i trasformano vettori dell' S_m normale in vettori ancora dell' S_m normale; applicate a vettori dell' S_n tang. danno vettori nulli. Le σ'''_i si possono considerare come le proiezioni delle matrici σ_i sopra l' S_m normale. I determinanti di queste matrici sono :

$$\begin{vmatrix} 0 \dots 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 \dots 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 \dots 0 & p_{(n+1, n+1)i} & p_{(n+1, n+2)i} \dots p_{(n+1, n+m)i} \\ 0 \dots 0 & p_{(n+2, n+1)i} & p_{(n+2, n+2)i} \dots p_{(n+2, n+m)i} \\ 0 \dots 0 & p_{(n+m, n+1)i} & p_{(n+m, n+2)i} \dots p_{(n+m, n+m)i} \end{vmatrix}$$

Le σ'''_i saranno nel seguito considerate come matrici di ordine m .

Le matrici σ'_i infine trasformano i vettori dell' S_n tangente in vettori dell' S_m normale e viceversa. Queste matrici saranno nel seguito eliminate e sostituite con gruppi di vettori.

Si ha ora il seguente teorema :

Le matrici σ'_i sono univocamente determinate, tosto che siano fissati gli n vettori-traslazione; sono cioè determinate, a meno di rotazioni dello spazio tangente dalla metrica della varietà. Gli elementi delle σ'_i dipendono bilinearmente dagli n vettoritraslazione e da n matrici simmetriche.

La 1^a delle relazioni fondamentali (A), si scinde in base alla definizione delle σ'_i e al fatto che i vettori $\mathbf{a}_i$ appartengono all' S_n tangente nelle due relazioni:

$$(1) \quad \frac{\partial \mathbf{a}_i}{\partial u^k} - \frac{\partial \mathbf{a}_k}{\partial u^i} = \sigma'_i \mathbf{a}_k - \sigma'_k \mathbf{a}_i$$

$$(2) \quad 0 = \sigma''_i \mathbf{a}_k - \sigma''_k \mathbf{a}_i.$$

Dalla 1^a di queste relazioni, nell'ipotesi tacitamente fatta dell'indipendenza dei vettori $\mathbf{a}_i$, discende la 1^a parte del teorema. La (1) esplicitata dà luogo a $n \frac{n(n-1)}{2}$ relazioni e gli elementi delle $\sigma_i (i = 1, 2 \dots n)$, poichè queste matrici sono a determinante emisimmetrico, sono altrettanti. Discende da quanto segue che il determinante di questo sistema è diverso da zero, anzi è una potenza del determinante E i cui elementi sono le componenti dei vettori $\mathbf{a}_i$.

Siano i, j, k diversi. Dalle tre relazioni:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \mathbf{a}_i}{\partial u^h} - \frac{\partial \mathbf{a}_h}{\partial u^i} = \sigma'_i \mathbf{a}_h - \sigma'_h \mathbf{a}_i \\ \frac{\partial \mathbf{a}_h}{\partial u^k} - \frac{\partial \mathbf{a}_k}{\partial u^h} = \sigma'_h \mathbf{a}_k - \sigma'_k \mathbf{a}_h \\ \frac{\partial \mathbf{a}_k}{\partial u^i} - \frac{\partial \mathbf{a}_i}{\partial u^k} = \sigma'_k \mathbf{a}_i - \sigma'_i \mathbf{a}_k \end{array} \right.$$

si ricava, moltiplicando internamente la 1^a per $\mathbf{a}_k$, la 2^a per $-\mathbf{a}_i$, la 3^a per $-\mathbf{a}_h$ e tenendo conto dell'identità (con $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ vettori):

$$\mathbf{a} \times \sigma'_i \mathbf{b} = -\sigma'_i \mathbf{a} \times \mathbf{b},$$

dedotta dal fatto che σ' è una matrice a determinante emisimmetrico:

$$2\sigma'_k \mathbf{a}_h \times \mathbf{a}_i = \frac{\partial a_{ik}}{\partial u^h} - \frac{\partial a_{hk}}{\partial u^i} + \frac{\partial a_{ih}}{\partial u^k} - 2\mathbf{a}_i \times \frac{\partial \mathbf{a}_h}{\partial u^k}.$$

Introducendo i simboli di CHRISTOFFEL di 1^a specie:

$$2[hk, i] = \frac{\partial a_{ik}}{\partial u^k} + \frac{\partial a_{ki}}{\partial u^h} - \frac{\partial a_{kh}}{\partial u^i},$$

si ha infine:

$$(3) \quad \sigma'_k a_h \times a_i = [hk, i] - a_i \times \frac{\partial a_h}{\partial u^k}.$$

Questa identità mette in relazione i simboli di CHRIFFOFFEL con le matrici σ'_i introdotte; essa vale anche se due dei tre indici i, h, k sono uguali.

Consideriamo allora le n identità:

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sigma'_k a_h \times a_1 = [hk, 1] - a_1 \times \frac{\partial a_h}{\partial u^k} \\ \sigma'_k a_h \times a_2 = [hk, 2] - a_2 \times \frac{\partial a_h}{\partial u^k} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \sigma'_k a_h \times a_n = [hk, n] - a_n \times \frac{\partial a_h}{\partial u^k} \end{array} \right.$$

e diciamo E la matrice il cui determinante ha come orizzontali le componenti dei vettori $a_1 \dots a_n$. Diciamo inoltre E^* la matrice trasposta di E (cioè quella il cui determinante ha come verticali le componenti degli stessi vettori a_i).

Le relazioni (4) si possono porre sotto la forma:

$$(5) \quad E \sigma'_k a_h = b_{hk}$$

dove b_{hk} è un vettore la cui r -esima componente è

$$[hk, r] - a_r \times \frac{\partial a_h}{\partial u^k}.$$

Facendo variare nella (5) l'indice h , le identità che si ottengono si possono raggruppare nella relazione tra matrici:

$$(6) \quad E \sigma'_k E^* = B_k$$

dove B_k è una matrice la cui r -esima orizzontale ha come elementi, le componenti del vettore b_{rk} . Dalla (6) poichè il modulo di E è diverso zero, consegue la 1ª parte del teorema fondamentale.

Consideriamo ora le (2) e dimostriamo dapprima che gli elementi delle verticali delle matrici σ_i'' :

$$(7) \quad p_{(1, n+r)i} \cdots p_{(n, n+r)i}$$

sono le componenti di un vettore dell' S_n tangente (cioè la posizione e la grandezza del vettore le cui componenti sono le (7) non dipende dagli assi di riferimento $x_1 x_2 \dots x_n$).

Siano perciò m_{ik} ($i, k = 1, 2, \dots, n$) gli elementi di una matrice ortogonale m (caratterizzante una rotazione dello spazio tangente S_n) e siano

$$m_i = m^{-1} \frac{\partial m}{\partial u^i}$$

le n matrici rotazioni corrispondenti.

La matrice $\sigma_i' + \sigma_i''$ per effetto di questa rotazione, a norma delle (B) del prec. n., diviene:

$$m \sigma_i' m^{-1} + m_i + m \sigma_i'' m^{-1}.$$

Della matrice qui scritta i primi due termini rappresentano matrici che trasformano i vettori dell' S_n tangente in vettori dell' S_n tangente; il 3° termine invece rappresenta una matrice che trasforma vettori dell' S_n tangente in vettori dell' S_n normale e viceversa.

Indicando cioè con $\underline{\sigma}_i''$ le trasformate delle σ_i'' per effetto della rotazione m , si ha:

$$\underline{\sigma}_i'' = m \sigma_i'' m^{-1}$$

da cui discende, c. d. d.:

$$\underline{p}_{(r, n+s)i} = \sum_k m_{rk} p_{(k, n+s)i},$$

dove le p (sottolineate) sono gli elementi secondo i nuovi assi delle σ_i'' .

I vettori (dell' S_n tangente) le cui componenti sono

$$\begin{array}{ll} p_{(1, n+s)i} \cdots p_{(n, n+s)i} & s = 1, \dots, m \\ & i = 1, \dots, n \end{array}$$

saranno in seguito indicati con $P_{(s)i}$.

Si dimostra agevolmente che per una rotazione dell' S_n normale i suddetti vettori divengono

$$\sum_{s=1}^m n_{1s} P_{(s)i} \dots \sum_{s=1}^m n_{ms} P_{(s)i}$$

dove le n_{ik} sono gli elementi di una matrice ortogonale (di ordine m).

Per effetto delle posizioni ora fatte, le (2) divengono

$$P_{(s)i} \times a_k - P_{(s,k)} \times a_i = 0.$$

Ponendo quindi

$$a_{(s)ik} = P_{(s)i} \times a_k = P_{(s)k} \times a_i,$$

le m matrici che hanno come elemento variabile

$$a_{(1)ik} \dots a_{(m)ik}$$

sono simmetriche. Indicando, ad es., con $A_{(r)}$ la matrice i cui elementi sono $a_{(r)ik}$ discende dalle precedenti relazioni:

$$EP_{(s)} = A_{(s)},$$

dove E è la matrice di ordine n già stata considerata e $P_{(s)}$ è una matrice, gli elementi dell' r -esima verticale della quale sono le componenti del vettore $P_{(s)r}$.

Resta così pure dimostrata la 2^a parte del Teorema fondamentale.

Le $a_{(s)ik}$ sono invarianti per una rotazione dello spazio tangente, e gli indici i, k sono indici di covarianza. Ciò discende immediatamente dalle equazioni di definizione.

Converrà considerare le n quadriche differenziali

$$\varphi_i = \Sigma a_{(i)rs} du^r du^s \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

Esse sono invarianti sia per trasformazione di coordinate, sia per le rotazioni dell' S_m tangente.

Per effetto di una rotazione dell' S_m normale si trasformano come le componenti di un vettore (dell' S_m normale). Nasce così una corrispondenza tra le direzioni du^i dello spazio tangente (cioè le direzioni dei vettori $\Sigma a_i du^i$) e la direzione del vettore dello spazio normale di componenti $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m$.

La considerazione di questa direzione, la cui interpretazione

geometrica discende dalle considerazioni del n. seguente, può essere utile per la introduzione di speciali normali, suscettibili di una definizione assoluta.

§ 5. - Trasporto per parallelismo. - Elementi del I.^o ordine delle linee tracciate sulla V_n .

Il trasporto per parallelismo di LEVI-CIVITA è contenuto in ultima analisi nella 1^a parte del teorema precedente. Quando è nota la metrica della V_n , sono determinati, a meno di una rotazione dello spazio tangente, i vettori-traslazione α_i e per il precedente teorema le proiezioni σ'_i delle matrici rotazione sull' S_n tangente.

Integriamo, secondo VOLTERRA, il differenziale

$$\sum_i \sigma'_i du^i$$

lungo una linea l , appartenente alla V_n e congiungente due punti $P_1 Q_1$; determiniamo cioè una matrice ortogonale A , tale che soddisfi all'equazione

$$A^{-1} \frac{dA}{dt} = \sum_i \sigma'_i \frac{du^i}{dt},$$

dove t è il parametro che individua il punto sulla linea l e che nella posizione iniziale si riduce alla matrice unità.

Poichè le condizioni di completa integrabilità per le σ'_i non sono in generale soddisfatte (a meno che la V_n non sia euclidea), cioè non sono in generale nulle le

$$\sigma_{ik} = \frac{\partial \sigma'_i}{\partial u^k} - \frac{\partial \sigma'_k}{\partial u^i} - \sigma'_i \sigma'_k + \sigma'_k \sigma'_i,$$

la matrice A dipenderà dal cammino di integrazione. Ad ogni vettore α appartenente all' S_n tangente in P , possiamo associare in Q il vettore $A\alpha$ (dell' S_n tangente in Q), dove A è la matrice ortogonale prima determinata. Il vettore $A\alpha$ è il vettore dell' S_n tangente in Q ottenuto per parallelismo dal vettore α , quando il trasporto avviene lungo la linea PQ . Il vettore $A\alpha$

dipende poi, come la matrice A , dal cammino d'integrazione. La determinazione della matrice A dipende poi ovviamente dalla integrazione di un sistema lineare a determinante emissimmetrico.

Il significato cinematico del trasporto è poi dato dalla definizione delle matrici-rotazione σ'_i , considerate come proiezioni delle matrici σ_i sull' S_n tangente.

Siamo ora in grado di determinare gli elementi del 1° ordine delle linee tracciate sulla V'_n .

Consideriamo perciò il vettore unitario :

$$\sum_i \alpha_i \frac{du^i}{ds},$$

tangente alla linea tracciata sulla V'_n , il cui arco è s .

Lo spostamento subito dall'estremo di questo vettore (supposto spiccato dalla posizione attuale del punto sulla linea di coordinate curvilinee u^i), quando le u^i subiscono gli accrescimenti du^i , è

$$\frac{N}{\rho} ds,$$

dove N è un vettore unitario diretto lungo la 1ª normale principale alla linea e $\frac{1}{\rho}$ è la 1ª curvatura.

Questo spostamento si comporrà di due parti, l'una dovuta alla variazione del vettore $\sum_i \alpha_i \frac{du^i}{ds}$, considerati gli assi di riferimento come fissi (spostamento relativo) e l'altro dovuto al trascinamento degli assi.

Si avrà dunque :

$$(1) \quad \frac{N}{\rho} = \frac{d}{ds} \sum_i \alpha_i \frac{du^i}{ds} + \sum_i \sigma_i \frac{du^i}{ds} \sum_k \alpha_k \frac{du^k}{ds}.$$

Usiamo le notazioni del n. precedente; ricordando che i vettori α_i appartengono all' S_n tangente, si ricava facilmente:

$$\frac{N}{\rho} = \frac{d}{ds} \sum_i \alpha_i \frac{du^i}{ds} + \sum_{ik} \sigma'_i \alpha_k \frac{du^i}{ds} \frac{du^k}{ds} + \sum_{ik} \sigma''_{i'} \alpha_k \frac{du^i}{ds} \frac{du^k}{ds}.$$

I primi due termini del 2° membro di questa relazione rappresentano vettori dell' S_n tangente; l'ultimo termine è invece un vettore dell' S_m normale. Se N_1 , N_2 sono le proiezioni del vettore N rispettivamente sull' S_n tangente e sull' S_m normale, si hanno allora le equazioni:

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{N_1}{\rho} = \frac{d}{ds} \sum_i a_i \frac{du^i}{ds} + \sum_{ik} \sigma'_i a_k \frac{du^i}{ds} \frac{du^k}{ds} \\ \frac{N_2}{\rho} = \sum_{ik} \sigma'_i a_k \frac{du^i}{ds} \frac{du^k}{ds} \end{array} \right.$$

Nella 2ª di queste relazioni è contenuta la generalizzazione del teorema di MEUSNIER, il vettore $\frac{N_2}{\rho}$ dell' S_m normale riuscendo comune a tutte le linee della V_n aventi una stessa direzione du^i .

Si ha poi:

$$\begin{aligned} \sigma'_i a_k &= (0 \dots 0, -P_{(1)i} \times a_k, \dots, -P_{(m)i} \times a_k) = \\ &= (0 \dots 0, -a_{(1)ik}, \dots, -a_{(m)ik}), \end{aligned}$$

perciò il vettore $\frac{N_2}{\rho}$ è di componenti secondo gli assi $(x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{n+m})$

$$\frac{\varphi_1}{ds^2} \dots \frac{\varphi_m}{ds^2}$$

dove ho posto come precedentemente:

$$\varphi_i = \sum_{r,s} a_{(i)rs} du^r du^s.$$

La direzione del vettore N_2 è dunque la direzione dell' S_m normale che nel precedente n. ho chiamato associata alla direzione du^i .

Se la linea è geodetica si ha $N_1 = 0$; le equazioni delle geodetiche con le nostre notazioni assumono la forma:

$$(3) \quad \frac{d}{ds} \sum_i a_i \frac{du^i}{ds} + \sum_{ik} \sigma'_i a_k \frac{du^i}{ds} \frac{du^k}{ds} = 0$$

e il passaggio da questa forma a quella data correntemente alle equazioni delle geodetiche è quasi immediato, se si moltiplica in-

ternamente per α_k il 1° membro delle (3) e si fa uso delle formule (4) del n. precedente.

Nella 1ª delle (2) è poi contenuta una osservazione del ЛИРКА (¹), poichè

$$(4) \quad d \sum_i \alpha_i \frac{du^i}{ds} + \sum_{ik} \sigma'_i \alpha_k \frac{du^i}{ds} \frac{du^k}{ds} = \frac{N_1}{\rho} ds$$

è lo spostamento dell'estremo del raggio vettore unitario

$$\sum_i \alpha_i \frac{du^i}{ds}$$

quando esso venga trasportato per parallelismo lungo l'arco ds .

Quando la linea è geodetica il vettore N_2 è unitario, e il vettore ρN_2 è di componente:

$$\frac{\varphi_i ds^2}{\varphi_1^2 + \dots + \varphi_m^2} \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

Ponendo cioè

$$(5) \quad \phi_i = \sum_{h,k} a_{(i)kh} \frac{du^h}{ds} \frac{du^k}{ds}$$

ed indicando con $(x_{n+1} \dots x_{n+m})$ le coordinate del centro di curvatura della geodetica di direzione $\frac{du_i}{ds}$, avremo come equazioni parametriche della V_{n-1} luogo di questi centri di curvatura

$$(6) \quad x_{n+r} = \frac{\phi_r}{\phi_1^2 + \dots + \phi_m^2} \quad r = 1, 2, \dots, m$$

e alle equazioni (5) di definizione delle ϕ_i , si deve aggiungere la seguente:

$$(7) \quad 1 = \sum_{h,k} a_{hk} \frac{du^h}{ds} \frac{du^k}{ds}.$$

Le (6) sono le equazioni di una trasformazione per raggi vettori reciproci. In luogo di considerare la V_{n-1} luogo dei cen-

(¹) *Sulla curvatura geodetica delle linee appartenenti ad una varietà qualunque* (Rendic. Acc. Lincei, Vol. XXXI).

tri di curvatura si può considerare la V_{n-1} luogo dei punti di coordinate $\psi_1 \dots \psi_m$, queste essendo legate dalle (5) e dalla (7). Per $n = m = 2$, ad es., il luogo di questo punto è una conica. Per $m = \frac{n(n-1)}{2}$, in generale, questa V_{n-1} giace in un S_{m-1} generico, per $m > \frac{n(n-1)}{2}$ giace in un S_{m-1} passante per l'origine. Si deduce che in questi casi la V_{n-1} luogo dei centri di curvatura delle geodetiche uscenti da un punto giace rispettivamente sopra una ipersfera o sopra un iperpiano. Questi risultati già furono dati dal VITALI ⁽¹⁾ come applicazione del metodo di ricerca da lui sviluppato.

Rimando ad una 2^a Memoria sia la considerazione della curvatura secondo una orientazione, fatta partendo dalle matrici σ'_{ik} considerate al n. 1, sia la riduzione delle equazioni di compatibilità cui soddisfano gli elementi caratteristici α_i, σ_i , come lo studio degli elementi di ordine superiore al 1° delle linee tracciate sulla varietà.

⁽¹⁾ G. VITALI, *Geometria dello spazio hilbertiano*, Bologna. N. Zanichelli, 1926, p. 286.