RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

ANNIBALE COMESSATTI

Sulle superficie multiple cicliche

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 1 (1930), p. 1-45

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1930__1__1_0>

SULLE SUPERFICIE MULTIPLE CICLICHE

di ANNIBALE COMESSATTI

Una recente conversazione epistolare col prof. BERZOLARI intorno alle superficie doppie, ha indirizzato verso un tema più complesso il corso di antiche meditazioni [1].

Come per le curve, così per le *superficie multiple cicliche* Φ, rappresentate sopra una data F con o senza curva di diramazione, il problema principale è quello relativo al numero di famiglie birazionalmente distinte (di Φ *irriducibili*). Ed analogamente esso può affrontarsi per due vie; la prima delle quali, che può dirsi *algebrico-geometrica,* porta spontaneamente nell'ambito della *divisione dei sistemi lineari (divisione lineare)* sulla F, mentre la seconda via *topologico-funzionale* fa entrare in gioco il *gruppo fondamentale (gruppo topologico)* della corrispondente riemanniana V.

La struttura precisa di questo gruppo non è oggi conosciuta; ma in grazia del fatto che il *gruppo di monodromia* M delle nostre Φ è *abeliano*, si trova, che, almeno nel caso delle Φ *non diramate*, è lecito sostituirvi il corrispondente *gruppo commutativo*, cioè surrogare ogni *equivalenza* colla corrispondente *omologia* (§ 5). E così la discussione del problema può affidarsi a solidi fondamenti.

È chiaro che qualora le due vie accennate vengano percorse *indipendentemente*, l'identità del punto d'arrivo deve condurre ad

[1] Che rimontano all'epoca della mia dissertazione di laurea, *Sulle curve doppie di genere qualunque,* ecc. [Mem. Accad. Torino, (2) T. IX (1909) pp. 313-350]. Sul tema delle curve multiple cicliche, di cui al § 1, cfr. ancora O. CHISINI, *Sulle superficie di Riemann multiple prive di punti di diramazione* [Rendic. Acc. Lincei (5) T. XXIV (1915) pp. 153-158], F. ENRIQUES-O. CHISINI, *Teoria geometrica delle equazioni* [Bologna, Zanichelli], T. III, nn. 38, 39, e la memoria dell'A. citata in [11].

interessanti ravvicinamenti. È quel che qui vien fatto per il caso delle Φ *non diramate;* e ne risulta, per una via, a dir vero, alquanto indiretta, una nuova dimostrazione dell'*isomorfismo* fra il *gruppo della divisione di* SEVERI, ed il *gruppo della torsione* (lineare) relativi alle F, V.

Saremo paghi che si ritrovi in ciò almeno un'illustrazione dei rapporti tra quelle nozioni fondamentali, annotando a suo credito l'indipendenza dalla nozione di *cicli algebrici*, e dal teorema di LEFSCHETZ che ne precisa la caratterizzazione trascendente.

A render possibile tale illustrazione, conferisce principalmente la circostanza che il *teorema d'esistenza* indispensabile alle conclusioni del secondo indirizzo, vien qui dimostrato indipendentemente dal ricordato isomorfismo (§ 6).

Più complesso è il caso delle Φ per cui esiste su F una effettiva *curva di diramazione* D, finora neppur completamente trattato per le curve (2). La risoluzione del relativo problema fondamentale vien raggiunta, in questo lavoro, per la sola via algebrico-geometrica (§ 4); nondimeno vogliamo richiamarvi l'attenzione del lettore, segnalandogli la funzione ed il significato di due caratteri *(esponente* e *moltiplicatore)* della curva di diramazione, il secondo dei quali è particolarmente notevole, e dà motivo ad osservazioni nuove sui *problemi della divisione*, raccolte con altre, parzialmente sistematiche, in apposita premessa (§ 2).

La discussione topologico-funzionale di questo caso, che indubbiamente rivelerà interessanti connessioni, si annuncia difficile, ed apparisce collegata alla considerazione del gruppo topologico inerente alla varietà $V - D$ (considerandosi ora D come riemanniana in V) nell'ordine d'idee di ENRIQUES-ZARISKI (3).

Non va taciuto che il problema fondamentale relativo alle Φ *non diramate*, era già stato risolto dal DE FRANCHIS (4); ma

(2) Perciò anche il caso delle curve è qui rielaborato. Vedasi il § 1, e le osservazioni sull'argomento al § 4.

(3) F. ENRIQUES, *Sulla costruzione delle funzioni algebriche di due variabili possedenti una data curva di diramazione* [Annali di Mat. (4) T. 1° (1923-24) pp. 185-198] O. ZARISKI, *On the problem of the existence of algebraic functions of two variables, possessing a given branch curve* [American Journal of Math. T. LI (1929) pp. 305-328].

(4) M. DE FRANCHIS, *Intorno alle varietà multiple cicliche senza dira-*

tal precedente, sfuggitoci nella fase costruttiva, non sembra conferisca alcunchè a menomare lo considerazioni di questo lavoro. Invero il DE FRANCHIS si appoggia ad argomentazioni sostanzialmente diverse dalle nostre nei punti essenziali, separando il caso delle varietà *prive di torsione* (elegantemente risolto col ricorso alle funzioni ϑ) dal caso generale, e discutendo quest' ultimo sul fondamento di quell'isomorfismo che qui viene volutamente ignorato. Inoltre l'impostazione dell'A., che a posteriori si riconosce pienamente legittima, si affida ad un assunto cui forse non nuocciono le nostre più precise cautele (5).

§ 1. - Considerazioni preliminari sul caso delle curve.

1. Allo scopo di alleggerire in alcuni punti la trattazione seguente, e di favorirne l' interpretazione, vogliam premettere un rapido sguardo alle questioni riguardanti le *curve multiple cicliche*. In parte, e principalmente su quel che riguarda le rappresentazioni non diramate, ci richiameremo ad osservazioni note, mentre il caso nuovo in cui interviene un effettivo gruppo di diramazione, sarà sviluppato sol quanto basti a porgere, per la via più rapida, le conclusioni fondamentali, ed a favorire la presentazione di taluni concetti importanti.

Sia f una curva algebrica di genere p, e C una curva rappresentata in modo ciclico sulla f n-pla, cioè contenente una trasformazione birazionale τ, di periodo n, che genera un'involuzione I_n birazionalmente identica ad f. Assieme alla τ hanno

mazioni, e Complementi alla Nota « Intorno... [Rend. Palermo T. XLVIII (1924) pp. 384-388 e 420-422].

(5) L'assunto è sostanzialmente quello di sostituire senz'altro al *gruppo topologico* il *gruppo commutativo* (*omologie* ad *equivalenze*) il che equivale a presupporre che due cicli *omologhi* (anche se non equivalenti) operino sui rami di Φ la stessa sostituzione. Ora *tal presupposto non è legittimo in generale*, mentre, come qui si prova, (§ 5) lo è quando il gruppo di monodromia M sia abeliano. Esempî di rappresentazioni non diramate in relazione alle quali due cicli omologhi *non* operano la stessa sostituzione, si costruiscono facilmente nel caso delle curve: cfr. ad es. quello indicato da ENRIQUES-CHISINI, loco cit. (1) T. III, pag. 455.

pure periodo n le sue potenze d'esponente i *primo con* n, ed esse generano alla stessa guisa l'involuzione I_n.

Se la f si concreta con un modello privo di punti multipli d'uno spazio S_r, nel quale siano $(x_1, x_2, \ldots, x_r)$ coordinate non omogenee, è noto che la C, mediante una trasformazione birazionale, può ricondursi alla curva dello S_{r+1} $(x_1, x_2, \ldots, x_r, z)$ avente per equazione

$$z^n = R(x), \tag{1}$$

dove $R(x)$ è un polinomio nelle $x_1, x_2, \ldots, x_r$, *i cui valori vanno considerati sulla* f; se di più si esclude, com'è lecito a meno d'un'omografia di S_r, che i punti all'infinito della f sian di diramazione per la corrispondenza $(1, n)$ tra f e C, l'ordine del polinomio R risulta multiplo di n.

I *punti di diramazione* (effettiva) della predetta corrispondenza, cadono nelle intersezioni di f colla forma $R(x) = 0$, escluse quelle dove la molteplicità d'intersezione è multipla di n, alle quali si dà il nome di *diramazioni apparenti.*

Giova fin d'ora osservare che, se i è un intero *primo con* n, la curva C' determinata, analogamente a C, dall'equazione

$$z^n = R^i(x), \tag{2}$$

è birazionalmente identica alla C; il passaggio dall'una all'altra potendo effettuarsi mediante la trasformazione

$$x' = x^i; \quad z = \frac{z'^j}{R^t(x')}, \quad (x'_h = x_h), \tag{3}$$

dove j è uno degl'interi (primi con n) per cui $ij \equiv 1 \pmod n$, e t è l'intero associato ad j dalla $ij = tn + 1$. Aggiungasi che se s'indicano con τ, τ' le trasformazioni birazionali delle C, C' in sè medesime rappresentate dalle $x' = \varepsilon x$ $(\varepsilon = e^{2\pi i/n})$ la (3) trasforma τ in τ'^i e (quindi) τ' in τ^j.

2. Incominciamo dal richiamare i tratti essenziali della discussione relativa al caso delle C *non diramate.* Allora il gruppo delle intersezioni di f colla forma $R(x) = 0$ (computate colla debita molteplicità) risulta dal contare n volte un certo gruppo Γ

che dicesi il *gruppo di diramazione apparente* relativo alla particolare rappresentazione (1).

Sulla riemanniana f_0 relativa ad f sia fissato un punto O, e si dicano O_1, O_2,..., O_n i punti corrispondenti della C presi nell'ordine in cui sono associati da una delle τ a periodo n, ad esempio, con riferimento alla (1) dalla $x' = \varepsilon x$. Allora è noto che per una circolazione qualunque effettuata sulla f_0 a partire da O, quei punti si permutano fra di loro a norma d'una sostituzione ch'è una potenza del ciclo $s = (1\,.\,2 \ldots n)$. In particolare quando, come attualmente, non esistono punti di diramazione, la sostituzione prodotta da un ciclo *equivalente a zero* è identica [6].

È pur noto che la sostituzione relativa ad una delle circolazioni considerate si esprime mediante quelle prodotte da $2p$ cicli (orientati) α_i, β_i tracciati per O e formanti nell'insieme un sistema di retrosezioni; in quanto gli α_i, β_i danno una *base per le equivalenze* sulla f_0 [7]. Nel caso attuale tutto si riduce quindi alla conoscenza dei $2p$ esponenti che spettano alle potenze di s relative agli α_i, β_i; onde alla C, nelle condizioni di riferimento fissate, resta collegata una *caratteristica*

$$[g_1, g_2, \cdots, g_{2p}], \tag{4}$$

(cioè un $2p$-intero considerato, mod n) che la determina compiutamente. Viceversa, data ad arbitrio la caratteristica (4) ne resta determinata a meno di trasformazioni birazionali la C [8] (che però *non è necessariamente irriducibile*).

Dopo ciò la determinazione delle C *irriducibili* e birazionalmente distinte, si ricava dalle osservazioni seguenti:

a) Condizione necessaria e sufficiente affinchè una (4) determini una C *irriducibile* è che quella caratteristica sia *prima con* n (cioè che il m. c. d. dai g_i e di n sia 1), giacchè allora

[6] Basta anzi che il ciclo sia *omologo a zero*, perchè l'attuale gruppo di monodromia è *ciclico*. Cfr. nota prec. e § 5.

[7] Cfr. p. es. A. Comessatti, *Curve algebriche e funzioni fucksiane* [Atti Ist. Veneto T. LXXXVIII (1928-29) pp. 771-834] n. 2.

[8] Per il *teorema d'esistenza di* Riemann-Hurwitz. Si noti che gli esponenti g_i non son legati da alcuna relazione, giacchè l'unica equivalenza fra i cicli α_i, β_i (identità fondamentale) è automaticamente verificata stante la permutabilità delle s^{g_i}.

e soltanto il gruppo generato dalle s^{g_i} è *transitivo* sugl'indici $1, 2, \ldots, n$ e coincide col gruppo ciclico $[1, s, \ldots, s^{n-1}]$. Invero affinchè quel gruppo contenga la s occorre e basta che la congruenza $\lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2 + \ldots + \lambda_{2p} g_{2p} \equiv 1 \pmod{n}$ ammetta soluzioni per le λ_i, il che riporta alla condizione enunciata.

Aggiungasi che se il m. c. d $(g_1, g_2, \ldots, g_{2p}, n)$ è $\nu > 1$, e si pone $n = \mu\nu$, la C si spezza in ν parti birazionalmente equivalenti tra di loro, ciascuna delle quali è μ-pla sulla f e può collegarsi alla caratteristica dedotta dalla (4) dividendone gli elementi per ν (considerata, mod. μ).

b) La caratteristica (4) non dipende soltanto dalla C, ma anche dalla scelta della τ a cui è affidato l'ordinamento degl'indici $1, 2, \ldots, n$ per i punti del gruppo corrispondente ad O. Se alla τ si sostituisce una τ^j pure di periodo n, la caratteristica (4) vien sostituita dalla $[ig_1, ig_2, \ldots, ig_{2p}]$, essendo i individuato $(\text{mod}\, n)$ dalla congruenza $ij \equiv 1 \pmod{n}$. Ad una stessa C *irriducibile* restano così associate $\varphi(n)$ caratteristiche distinte $(\text{mod}\, n)$, e non se ne dànno altre, perchè se una C' corrispondente alla caratteristica $[g'_1, g'_2, \ldots, g'_{2p}]$ è birazionalmente identica a C, [9] e τ' è la relativa trasformazione, analoga a τ, in base alla quale è stato fissato l'ordinamento degl'indici per i punti $O'_1, O'_2, \ldots, O'_n$ corrispondenti ad O, nel passare da C a C' la τ si muterà in τ'^i e quindi viceversa la τ' in τ^j [10], onde la caratteristica inerente a C' s'identificherà con quella relativa a C ed a τ^j, talchè sarà $g'_h \equiv ig_h \pmod{n}$.

Abbiamo poc'anzi affermato che le $\varphi(n)$ caratteristiche ig_h sono *distinte* $(\text{mod}\, n)$; ed invero se fosse $ig_h \equiv jg_h \pmod{n}$ (con i, j minori di n e $i > j$) quindi $(i-j)g_h \equiv 0 \pmod{n}$, detto μ il m. c. d $(i-j, n)$, certo minore di n, tutte le g_h sarebbero divisibili per $\nu = \frac{n}{\mu}$, contrariamente all'ipotesi che C sia *irriducibile*.

In conclusione *il numero delle famiglie birazionalmente di-*

[9] Ponendoci dal punto di vista corrente in materia, supponiamo che la trasformazione birazionale tra C e C' sia rappresentata su f dall'identità, come accade quando la f è a *moduli generali. Tale ipotesi sarà sempre sottintesa nel seguito anche a proposito delle superficie.*

[10] Se σ è una trasformazione birazionale tra C e C', tali sono anche le $\tau^h\sigma$, $\sigma\tau'^h$, ma tutte mutano τ nella stessa τ'^i.

stinte di curve n-ple cicliche C (irriducibili) rappresentate sopra una data f senza diramazioni, è eguale a quello delle caratteristiche (4) *distinte (mod n) e prime con n diviso per* $\varphi(n)$.

In particolare se n è primo, si trova così il valor noto $\frac{n^{2p}-1}{n-1}$.

3. Alla stessa conclusione si può pervenire movendo dalla particolare rappresentazione (1) della C e poggiando sulle osservazioni seguenti:

1) Premessa una opportuna trasformazione birazionale si può far assumere al polinomio $R(x)$ l'ordine mn, m essendo un intero arbitrario purchè abbastanza elevato. Il gruppo di diramazione apparente Γ resta così localizzato entro ad una delle n^{2p} serie lineari submultiple secondo n della serie $|nmA|$, indicandosi con A una sezione iperpiana di f.

2) Condizione affinchè la C sia irriducibile, è che il relativo Γ sia un *divisore puro d'indice n* della serie $|nmA|$ cioè che n sia il *minimo* intero per cui $n\Gamma \equiv nmA$.

3) Condizione affinchè due curve C, C' (irriducibili) relative ai gruppi Γ, Γ' siano birazionalmeute equivalenti, è che per un opportuno i primo con n il gruppo $\Gamma' - i\Gamma$ (quindi anche $\Gamma - j\Gamma'$) sia equivalente ad un multiplo di A.

Dopo ciò, e tenuto conto che nella determinazione delle n^{2p} serie di cui in 1) intervengono le parti n-esime dei periodi degli integrali di 1ª specie della f, si vede che ad ogni C (irriducibile o no) può collegarsi un sistema di caratteristiche analoghe alle (4), per quanto di diverso significato. E la discussione mostra che di fronte alle due questioni essenziali (riducibilità ed identità birazionale) le nuove caratteristiche si comportano come le antiche; ed infine, come ha mostrato il Chisini (loco cit. [1]) possono addirittura identificarsi con quelle, purchè i periodi primitivi degli integrali sian presi lungo i cicli α_i, β_i a cui è riferita la (4) e per τ si assuma la trasformazione $x' = \varepsilon x$ del modello (1) al quale è relativo il gruppo di diramazione apparente Γ.

4. Veniamo ora al caso delle C *effettivamente diramate* in punti di f; ed indichiamo questi punti con $D_1, D_2, \ldots, D_r$ tanto sul modello di f a cui è relativa la (1), quanto sulla riemanniana f_0.

Fissata come al n. prec. la τ, e conseguentemente l'ordina-

mento degl'indici per i punti $O_1, O_2, \ldots, O_n$, una circolazione eseguita lungo un cappio σ_i coll'origine in O, che circondi il punto D_i, produrrà una certa sostituzione s^{m_i} $(m_i < n)$, d'altronde indipendente dalla direttrice del cappio (perchè il gruppo di monodromia della rappresentazione è abeliano). Inoltre se, come supporremo, i cappî σ_i sono tutti *concordemente orientati* sulla f_0, la condizione d'esistenza di C esige che risulti $m_1 + m_2 + \ldots + m_r \equiv 0 \pmod{n}$ [11].

Si vede poi facilmente, che, se τ è la $x' = \varepsilon x$ del modello (1), premessa eventualmente un'inversione del verso su tutti i cappî σ_i (il che equivale a sostituire m_i con $n - m_i$), la molteplicità dello zero di $R(x)$ in D_i, cioè la relativa molteplicità di intersezione di f con $R(x) = 0$ è congrua ad $m_i \pmod{n}$; talchè posto $G = m_1 D_1 + m_2 D_2 + \ldots + m_r D_r$, il gruppo delle intersezioni di f con $R(x) = 0$ potrà, su f, indicarsi con $G + n\Gamma$. I due gruppi G e Γ diconsi *gruppo di diramazione effettiva* ed *apparente* relativi alla rappresentazione (1); ed $(m_1, m_2, \ldots, m_r)$ si dirà la *segnatura del gruppo G.*

Sostituendo alla τ la τ^j (j primo con n) si vede come al n. 2 che la segnatura cambia, ogni suo elemento restando moltiplicato per i $(ij \equiv 1)$ (e ridotto al resto, mod n); e ciò è confermato dal fatto che la trasformazione $x' = \varepsilon x$ della (2) (ivi indicata con τ') è precisamente la τ^j della (1), mentre nel passaggio dalla (1) alla (2) ad $R(x)$ si sostituisce $R^i(x)$.

Due gruppi G formati dallo stesso numero di punti ed aventi le segnature legate nel modo predetto $(m'_h \equiv i m_h \pmod{n})$ si diranno *equipollenti,* e si equivalgono del tutto di fronte ai nostri problemi. Avvertasi che, sul complesso di tali segnature, non ha alcuna influenza un cambiamento simultaneo di verso in tutti i cappî σ_i, giacchè $-m_h \equiv (n-1) m_h \pmod{n}$ ed $n - 1$ è primo con n.

Sono *elementi invarianti* di fronte all'equipollenza, cioè *caratteri essenziali del gruppo G*, determinati dalla C indipenden-

[11] Vedasi la Memoria dell'A. *Sulle trasformazioni biraxionali delle curve algebriche interpretate come rotazioni del piano iperbolico* [Annali di Mat. (4) T. VIII (1930) pp. 1-27] formula (2) dove per m_h sta scritto $\lambda_h \mu_h$, μ_h avendo il significato di cui sotto in *a).*

temente da qualsiasi elemento convenzionale (punto O incluso):

a) Gl'interi $\mu_h = \text{m.c.d}(m_h, n)$. Posto $n = \mu_h \nu_h$, ν_h è il *periodo* della sostituzione relativa a D_h; secondo denominazioni altrove introdotte chiameremo ν_h *l'indice*, e μ_h *l'esponente* della diramazione che ha sede in quel punto.

b) Il m.c.d μ degl'interi $(m_1, m_2, \ldots, m_r, n)$ cioè dei μ_h; esso si dirà *l'esponente del gruppo di diramazione* G ed ha influenza essenziale per le conclusioni del seguito ([12]). Avvertiamo, nell'occasione, che porremo sempre $n = \mu.\nu$.

5. Supponiamo ora dato il gruppo G colla relativa segnatura (soddisfacente alla condizione $m_1 + m_2 + \ldots + m_r \equiv 0 \pmod{n}$) e proponiamoci di determinare il numero delle C *irriducibili* e birazionalmente distinte corrispondenti all'assegnato G, quindi anche ad ogni altro gruppo di diramazione equipollente.

L'ipotesi che la segnatura $(m_1, m_2, \ldots, m_r)$ di G sia fissata, implica che nel considerare la rappresentazione delle nostre C, la relativa τ sia pur fissata in modo che la sostituzione prodotta dal cappio σ_h sia s^{m_h} (non $s^{t^{m_h}}$).

Indichiamo come precedentemente con $[g_1, g_2, \ldots, g_{2p}]$ gli esponenti delle potenze di s relative ai cicli α_i, β_i; per il teorema d'esistenza essi sono arbitrarî, e in unione cogli $(m_1, m_2, \ldots, m_r)$ determinano una classe di curve C.

Ciò premesso la risoluzione del problema fondamentale del caso, si desume dalle osservazioni seguenti, che si dimostrano sostanzialmente come le *a)*, *b)* del n. 2:

1) Condizione affinchè la C relativa alla caratteristica $[g_1, g_2, \ldots, g_{2p}]$ sia irriducibile, è che il gruppo d'interi $(g_1, g_2, \ldots, g_{2p} | m_1, m_2, \ldots, m_r)$ sia primo con n, cioè che quella caratteristica sia *prima coll'esponente* μ.

2) Condizione affinchè due curve C, C' relative alle caratteristiche $[g_1, g_2, \ldots, g_{2p}]$ $[g'_1, g'_2, \ldots, g'_{2p}]$ ed irriducibili, siano

([12]) Si badi che il gruppo degli esponenti $(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_r)$ non individua completamente la natura della diramazione nei punti di G, cioè la classe dei gruppi equipollenti legata a quella diramazione. Per convincersene basta osservare che, ad esempio, i gruppi corrispondenti agli stessi punti D_h ed alle segnature $(1, 1, \ldots, 1)$ $(1, 1, \ldots, 2)$ non sono equipollenti, per quanto. *se n è dispari*, dian luogo agli stessi μ_h.

birazionalmente equivalenti, è che per un opportuno intero i, primo con n, sia $g'_h \equiv i g_h$, $m'_k \equiv i m_k \pmod n$. Dal secondo gruppo di relazioni si trae $(i-1)m_k \equiv 0 \pmod n$, e siccome, per opportuni valori di $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ è $\lambda_1 m_1 + \lambda_2 m_2 + \ldots + \lambda_r m_r \equiv \mu \pmod n$ così ne segue $(i-1)\mu \equiv 0 \pmod n$, cioè $i-1 \equiv 0 \pmod \nu$; e viceversa se tal condizione è soddisfatta, si vede subito che lo son pure le relazioni $m_k \equiv i m_k \pmod n$ dalle quali deriva. Pertanto *l'intero i è da ricercarsi tra gli elementi della successione*

$$(5) \qquad 1,\ \nu+1,\ 2\nu+1,\ \ldots,\ (\mu-1)\nu+1$$

che son primi con $n = \mu\nu$. Il numero di tali elementi s'indicherà con $\psi(n, \mu)$.

Avvertasi che le $\psi(n, \mu)$ caratteristiche dedotte, nel modo predetto, da una stessa caratteristica $[g_1, g_2, \ldots, g_{2p}]$ prima con μ sono tutte *distinte*, giacchè se per due valori $i = h\nu + 1$, $i_1 = h_1\nu + 1$ della successione (5) $(h > h_1)$ risultasse $i g_h \equiv i_1 g_h \pmod n$, verrebbe $(h - h_1) g_h \equiv 0 \pmod \mu$, e quindi, posto eguale a δ il m. c. d di $h - h_1$ e μ (certo minor di μ perchè lo è $h - h_1$) tutte le g_h risulterebbero divisibili per $\frac{\mu}{\delta}$, contro l'ipotesi che la data caratteristica sia prima con μ.

Si perviene così a concludere che:

Il numero delle famiglie birazionalmente distinte di curve n-ple cicliche C (irriducibili) rappresentate sopra una data f di genere p con assegnato gruppo di diramazione d'esponente μ, è eguale a quello delle caratteristiche $[g_1, g_2, \ldots, g_{2p}]$ distinte (mod. n) e prime con μ, diviso per $\psi(n, \mu)$.

La conclusione si precisa notando che:

Il valore di $\psi(n, \mu)$ è dato da $\frac{\mu}{\mu_0}\varphi(\mu_0)$ dove μ_0 è il massimo divisore di μ primo con $\nu = \frac{n}{\mu}$, e φ il solito indicatore gaussiano.

Invero ogni elemento $h\nu + 1$ della successione (5) è primo con ν, quindi affinchè lo sia con n, basta che risulti primo con μ, anzi con μ_0, giacchè posto $\mu = \mu_0 \delta$, ogni divisore di δ lo è anche di ν, talchè $h\nu + 1$ è primo anche con δ.

D'altronde essendo μ_0 primo con ν, gli elementi $1, \nu + 1,$

$2\nu+1, \ldots, (\mu_0-1)\nu+1$ sono a due a due incongrui (mod μ_0), quindi tra essi ve n'ha precisamente $\varphi(\mu_0)$ che son primi con μ_0. La vicenda si ripete per i successivi gruppi di μ_0 elementi consecutivi estratti dalla (5), d'onde la conclusione dell'enunciato.

In particolare *se manca il gruppo di diramazione devesi porre* $\mu = n$, ed allora si ricade sulla conclusione del n. 2. Invece se $\mu = 1$ risulta anche $\psi(n, \mu) = 1$, ed il numero dello famiglie distinte è $n^{2p}-1$.

Le conclusioni ricavate posson anche raggiungersi per via algebrico-geometrica con riferimento alle rappresentazioni (1) ed ai relativi gruppi G e Γ. Ma atteso che tale indirizzo verrà esaurientemente sviluppato per le superficie, ci riserviamo di notare in quell'occasione quanto può conferire all'adattamento.

§ 2. – Osservazioni intorno alla divisione lineare sopra una superficie algebrica.

6. Il problema della *divisione lineare,* di cui andiamo ad occuparci in questo § rientra in quelli risoluti dal SEVERI nella sua *teoria della base* ([13]). Il nostro proposito è di completarne e precisarne in alcuni punti le conclusioni, colla mira delle applicazioni prossime, e di sviluppare alcune osservazioni che ci sembrano nuove e di qualche interesse.

Precisiamo anzitutto il significato delle espressioni e notazioni adottate.

Se A e B son due curve, effettive o virtuali, d'una superficie algebrica F, tali che sia $nB \equiv A$ ([14]) si dirà che la curva B è un *divisore algebrico*, o semplicemente un *divisore d'indice n* della curva A. Quando poi sia addirittura $nB \equiv A$, diremo che la B è un *divisore lineare* della A.

([13]) F. SEVERI, *Complementi alla teoria della base per la totalità delle curve d'una superficie algebrica* [Rendic. Palermo, T. XXX (1910) pp. 265-288] n. 3.

([14]) Scrivendo che tra due curve, effettive o virtuali C, D ha luogo la relazione $C \equiv D$, intendiamo esprimere (secondo il punto di vista oggi corrente) che si può trovare una curva E della superficie, siffatta che i sistemi lineari $|E+C|$ $|E+D|$ sono effettivi, ed appartengono ad uno stesso sistema continuo *irriducibile come totalità di sistemi lineari.*

È chiaro che un divisore lineare è sempre un divisore algebrico, ma non reciprocamente.

Se A è una curva qualunque della F la curva virtuale $A - A$ (indipendente da A) si dirà la *curva zero*. Si dirà invece *algebricamente zero* (o *nulla*) una curva virtuale $A_1 - A$ quando sia $A_1 \equiv A$ senza che di necessità si abbia $A_1 \equiv A$. Sopra una F d'irregolarità p esistono ∞^p curve algebricamente nulle e tra di loro linearmente distinte; una di esse è la curva zero.

Quando si paragonano le curve d'una superficie F di fronte all'*equivalenza algebrica*, è naturale che lo stesso si faccia per i divisori, e che di conseguenza il *problema della divisione algebrica* d'una curva A per un intero n si faccia consistere nella ricerca delle curve B *algebricamente distinte*, per cui $nB \equiv A$; mentre invece è chiaro che se il paragone s'istituisce di fronte all'*equivalenza lineare*, anche il problema della divisione dovrà conformarvisi, e di conseguenza saran da riguardarsi come distinti due divisori lineari, anche se algebricamente equivalenti, quando sono *linearmente distinti*. Cosicchè uno stesso divisore algebrico potrà dar luogo a più divisori lineari, ed anzi è noto che, ove non si prescinda da curve virtuali, tali divisori sono in numero di n^{2p} ([15]). Ma in proposito ci converrà esser più precisi.

7. Il problema della divisione, algebrica o lineare, relativo ad una curva A, dipende essenzialmente dall'analogo relativo alla curva zero, cioè dai cosidetti *divisori dello zero*. Nel caso della divisione algebrica come curva zero può intendersi una qualunque curva algebricamente nulla.

Incominciamo col ricordare le conclusioni relative ai *divisori algebrici dello zero* ([16]). Il loro numero σ è finito, ed è un invariante (assoluto) della superficie; inoltre quei divisori, preceduti dal segno $+$, acquistano il significato di operatori d'un *gruppo abeliano* G_σ che il SEVERI ha chiamato *gruppo fondamentale della divisione*. Dalla teoria dei gruppi abeliani e delle relative basi, si desume la possibilità di fissare certi divisori distinti $M_1, M_2, \ldots, M_q$ tali che:

([15]) F. SEVERI, loco cit. ([13]).

([16]) Oltre al lavoro citato in ([13]) vedi anche F. SEVERI, *Conferenze di geometria algebrica* [Roma (1927-29)], nn. 138-149.

a) Ad ogni M_i è legato un intero t_i (*periodo* dell'operatore $+M_i$) ch'è il minimo per cui $t_i M_i \equiv 0$, per guisa che si hanno le *equivalenze fondamentali.*

$$(6) \qquad t_1 M_1 \equiv 0,\ t_2 M_2 \equiv 0,\ \ldots .\ t_q M_q \equiv 0 .$$

b) Gl' interi t_i sono invarianti della superficie e diconsi i *coefficienti della divisione;* ciascuno di essi è un divisore di tutti i successivi, e il loro prodotto è eguale al carattere σ.

c) Ogni divisore dello zero algebricamente non nullo è algebricamente equivalente ad una combinazione lineare degli M_i.

d) Ogni relazione d' equivalenza algebrica tra gli M_i è *conseguenza* delle (6), vale a dire non può aversi $\lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2 + \ldots . + \lambda_q M_q \equiv 0$, senza che ogni λ_i non sia divisibile per il corrispondente t_i.

Ciascuna delle curve virtuali M_i è definita a meno d' un' equivalenza algebrica, vale a dire, di fronte ai problemi di quel campo, può surrogarsi con una curva che le sia algebricamente equivalente. Ora è facile vedere, che, disponendo di tale arbitrarietà *si possono convertire le* (6) *in equivalenze lineari*, cioè ottenere che $M_1, M_2, \ldots M_q$ siano anche *divisori lineari dello zero.*

Prendasi sulla superficie una curva effettiva A che stia in un sistema continuo $\{A\}$ composto di ∞^p sistemi lineari, e sia A_1 una curva variabile in $\{A\}$. Le due curve $t_i(M_i + A_1), t_i A$ sono algebricamente equivalenti, quindi il sistema lineare $|t_i(M_i + A_1)|$ appartiene al sistema continuo $\{t_i A\}$ ch'è pure formato da ∞^p sistemi lineari. Al variare di A_1 in $\{A\}$ quel sistema lineare assume, come $|A_1|$, ∞^p posizioni, giacchè, come si vedrà, al n. seguente, uno stesso sistema lineare $|t_i(M_i + A_1)|$ può provenire solo da un *numero finito* di sistemi $|A_1|$; dunque esso descrive l' intero sistema continuo $\{t_i A\}$ (che come insieme di sistemi lineari è *irriducibile*). Segue che per una posizione opportuna di A_1 è $t_i(M_i + A_1) \equiv t_i A$, quindi $t_i(M_i + A_1 - A) \equiv 0$ ed infine che la curva $M_i + A_1 - A$ algebricamente equivalente ad M_i è un divisore lineare dello zero, come si voleva.

Diremo che i divisori $M_1, M_2, \ldots, M_q$ così costruiti costituiscono un *sistema fondamentale di divisori dello zero algebricamente non nulli.*

8. Cerchiamo ora i *divisori lineari dello zero algebricamente nulli.* Essi sono in numero infinito, e per isolarne un numero finito occorre fissare, come faremo, il valore dell'intero n secondo cui si divide.

È chiaro che per divisore lineare dello zero algebricamente nullo, dovrà intendersi una curva virtuale $N \equiv 0$ e tale che $nN \equiv 0$. Un tal divisore N si dirà *d'indice* n, mentre più specificamente si dirà che N *appartiene all'indice* n (o che è un *divisore puro d'indice* n) se quell'indice è il *minimo intero* per cui $nN \equiv 0$. Se N è un *divisore impuro* d'indice n ed appartiene all'indice m, questo sarà un *divisore di* n, giacchè altrimenti detto $\delta\,(<m)$ il m. c. d(m, n), per opportuni λ, μ sarebbe $\lambda m + \mu n = \delta$ quindi $\lambda m N + \mu n N = \delta N \equiv 0$; contro l'ipotesi che N appartenga all'indice m.

Sia A una curva effettiva della superficie che individui un sistema continuo $\{A\}$ composto di ∞^p sistemi lineari. Se N ha il significato precedente, poichè $N \equiv 0$ il sistema algebrico $\{A+N\}$ coinciderà con $\{A\}$, quindi $|A+N|$ sarà un sistema lineare $|A_1|$ di $\{A\}$. Si ha pertanto $N \equiv A_1 - A$, le A, A_1 essendo curve effettive, e siccome da $nN \equiv 0$ segue $nA_1 \equiv nA$, così si vede che la ricerca dei divisori N riducesi al problema seguente:

Data una curva A nelle condizioni precedenti, determinare nel sistema $\{A\}$ i sistemi lineari $|A_1|$ distinti, tali che $nA_1 \equiv nA$.

La determinazione in oggetto si raggiunge facilmente attraverso ad una *rappresentazione classica* di Castelnuovo [17], che vogliamo elaborare in rispondenza ai nostri scopi.

Sia V la *varietà di* Picard i cui punti sono in corrispondenza biunivoca coi sistemi lineari estratti dal sistema continuo $\{A\}$; ed $u_i\,(i = 1, 2, \ldots, p)$ p integrali semplici di 1ª specie della V, che, ad evitare complicazioni formali, designeremo in blocco con un unico simbolo u. Parlando del punto $u \equiv c$, intenderemo alludere a quello dove gli u_i assumono (modd. periodi) valori congrui ad un sistema di costanti c[4].

Supponiamo inoltre che al punto $u \equiv 0$ (origine delle integrazioni) corrisponda un certo sistema lineare $|A|$ di $\{A\}$; e

[17] G. Castelnuovo, *Sugl'integrali semplici appartenenti ad una superficie irregolare* [Rendic. Acc. Lincei, T. XIV (1905) pp. 544-556] n. 6.

siano poi $|A_1|$, $|A_2|$, ..., $|A_h|$ altri sistemi lineari sempre contenuti in $\{A\}$, c_1, c_2, ..., c_h i corrispondenti valori degli u. Sussiste allora il *lemma* seguente:

Le due relazioni a coefficienti interi

$$\lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2 + \ldots + \lambda_h c_h \equiv 0 \text{ (modd. periodi)},$$
$$\lambda_1 (A_1 - A) + \ldots + \lambda_h (A_h - A) \equiv 0 ,$$

sono equivalenti, cioè conseguenze l'una dell'altra.

Si considerino infatti sulla V i due punti $u \equiv 0$, $u \equiv c_i$ associati ai sistemi lineari $|A|$, $|A_i|$. Essi individuano una trasformazione birazionale τ_i della V in sè stessa ([18]) che ivi si rappresenta mediante le congruenze $u' \equiv u + c_i$, mentre come trasformazione fra i sistemi lineari di $\{A\}$ si realizza applicando l'operatore $+|A_i - A|$.

Ora la prima delle relazioni predette esprime che il prodotto $\tau_1^{\lambda_1} \tau_2^{\lambda_2} \ldots \tau_h^{\lambda_h}$ è l'identità. Dovrà quindi essere identico l'operatore $+\lambda_1 (A_1 - A) + \ldots + \lambda_h (A_h - A)$ corrispondente; e ciò, tenuto conto del significato di quell'operatore, porge l'asserita equivalenza. La reciproca è immediata.

In particolare se $nA' \equiv nA$, quindi $n(A' - A) \equiv 0$, detti u' i valori degli u corrispondenti ad A', sarà $nu' \equiv 0$ (modd. periodi), quindi, indicati con $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{2p}$ i periodi (d'un sistema primitivo) di u, u' potrà avere uno degli n^{2p} valori espressi dalla

$$(7) \qquad u' = g_1 \frac{\omega_1}{n} + g_2 \frac{\omega_2}{n} + \ldots + g_{2p} \frac{\omega_{2p}}{n} , \quad (g_i \text{ interi})$$

ed incongrui rispetto ai periodi, valori che son biunivocamente collegati a quelli della *caratteristica* $[g_1, g_2, \ldots g_{2p}]$ distinti (mod n).

In corrispondenza si ottengono, come già avvertito, n^{2p} divisori lineari $|A' - A|$ algebricamente nulli. E per essi una *base minima* si costruisce facilmente procedendo come segue:

Si considerino i $2p$ sistemi lineari $|A_1|, |A_2|, \ldots, |A_{2p}|$ corrispondenti alle caratteristiche $[1, 0, \ldots, 0]$ $[0, 1, \ldots, 0], \ldots,$ $[0, 0, \ldots, 1]$ e si ponga $N_i = A_i - A$ $(i = 1, 2, \ldots, 2p)$. Se

([18]) Trasformazione *di 2ª specie* secondo la terminologia oggi più in uso; *di 1ª specie* nella denominazione originaria di CASTELNUOVO.

$N = A' - A$ è un altro divisore dello zero algebricamente nullo, p. es. quello corrispondente al valore (7) di u, cioè alla caratteristica $[g_1, g_2, \ldots, g_{2p}]$, in forza del lemma premesso si ha subito che

$$N \equiv g_1 N_1 + g_2 N_2 + \ldots + g_{2p} N_{2p}, \tag{8}$$

d' onde emerge che *gli* $N_1, N_2, \ldots, N_{2p}$ *dànno una base minima per i divisori lineari dello zero, d' indice* n, *algebricamente nulli.*

Si noterà che fra gli N_i non può sussistere alcuna relazione d' equivalenza

$$\lambda_1 N_1 + \lambda_2 N_2 + \ldots + \lambda_{2p} N_{2p} \equiv 0, \tag{9}$$

senza che i λ_i siano divisibili per n, giacchè in forza del lemma ne seguirebbero le congruenze $\frac{\lambda_1}{n}\omega_1 + \frac{\lambda_2}{n}\omega_2 + \ldots + \frac{\lambda_{2p}}{n}\omega_{2p} \equiv 0$ (modd. periodi) che sono assurde se i coefficienti degli ω non sono interi, perchè quei p sistemi di periodi sono linearmente indipendenti (la caratteristica della loro matrice riemanniana è p).

9. Sia infine M un *divisore lineare qualunque* dello zero, d' indice n. Sarà intanto, perchè M è anche un divisore algebrico

$$M \equiv h_1 M_1 + h_2 M_2 + \ldots + h_q M_q, \tag{10}$$

quindi

$$n(h_1 M_1 + h_2 M_2 + \ldots + h_q M_q) \equiv 0,$$

che per la *d)* del n. 7 implica $h_i n \equiv 0 \pmod{t_i}$ ed $h_i n M_i \equiv 0$. Ma gli M_i sono *divisori lineari*, quindi in effetto si ha $h_i n M_i \equiv 0$, talchè il 2° membro della (10) è anch' esso un divisore lineare d' indice n. Lo è adunque anche la differenza $M - (h_1 M_1 + h_2 M_2 + \ldots + h_q M_q)$, e siccome essa è *algebricamente nulla*, così per la (8) si ha

$$M \equiv g_1 N_1 + g_2 N_2 + \ldots + g_{2p} N_{2p} + h_1 M_1 + \ldots + h_q M_q, \tag{11}$$

ed in definitiva *risulta determinata una base minima per tutti i divisori lineari, d' indice* n, *dello zero.*

Analogamente al n. prec. si osserverà che le sole relazioni d' equivalenza

$$\lambda_1 N_1 + \lambda_2 N_2 + \ldots + \lambda_{2p} N_{2p} + \mu_1 M_1 + \ldots + \mu_q M_q \equiv 0, \tag{12}$$

fra gli elementi della base, son quelle per cui $\lambda_i \equiv 0 \pmod{n}$, $\mu_j \equiv 0 \pmod{t_j}$, giacchè dalla (12) tenuto conto che gli N_i sono algebricamente nulli, scende

$$\mu_1 M_1 + \mu_2 M_2 + \ldots + \mu_2 M_q \equiv 0 ,$$

quindi per la *d)* del n. 7, $\mu_j \equiv 0 \pmod{t_j}$ e $\mu_j M_j \equiv 0$, dopo di che la (12) si riduce alla (9), ecc.

Se ne deduce che i divisori lineari d'indice n son collegati biunivocamente alle *caratteristiche* (*di* 1ª *specie*).

$$[g_1, g_2, \ldots, g_{2p} \mid h_1, h_2, \ldots, h_q] , \tag{13}$$

subordinatamente alle condizioni

$$h_i n \equiv 0 \pmod{t_i}, \qquad (i = 1, 2, \ldots, q) \tag{14}$$

ed a patto di non risguardare come distinte due caratteristiche $[g_i \mid h_j]$ $[g'_i \mid h'_j]$ per cui sia $g'_i \equiv g_i \pmod{n}$, $h'_j \equiv h_j \pmod{t_j}$, ovvero, il che è preferibile, limitando la considerazione alle sole caratteristiche i cui elementi non superano n, risp. t_j, che diremo *caratteristiche ridotte*.

I nostri divisori posson anche determinarsi mediante un altro tipo di *caratteristiche* (che diremo *di* 2ª *specie*), più comode per le applicazioni, e così definite:

Scritte le (14) sotto la forma

$$h_i n = r_i t_i \tag{15}$$

ad ogni h_i per cui la (13) abbia significato, resta associato un r_i, a due valori di h_i congrui $(\mathrm{mod}\, t_i)$ due valori di r_i congrui $(\mathrm{mod}\, n)$ ad un $h_i < t_i$ un $r_i < n$; cosicchè il simbolo (13) sotto le condizioni (14) determina un simbolo

$$[g_1, g_2, \ldots, g_{2p} \mid r_1, r_2, \ldots, r_q] \tag{16}$$

condizionato dalle

$$r_i t_i \equiv 0 \pmod{n}, \qquad (i = 1, 2, \ldots, q) \tag{17}$$

e viceversa; e se la prima caratteristica è ridotta lo è anche la seconda, cioè ha tutti gli elementi minori di n.

10. L'enumerazione delle caratteristiche ridotte (13) conduce poi a precisare che:

Il numero dei divisori lineari d'indice n dello zero è

$$\delta(n) = n^{2p}\,\delta_1\,\delta_2 \ldots \delta_q\,, \tag{18}$$

dove p è l'irregolarità della superficie, e δ_i il m. c. d fra n ed il coefficiente di divisione t_i [19].

Intanto i sistemi di valori dei g_i sono n^{2p}. Per vedere quali e quanti valori ($<t_i$) possa assumere h_i, pongasi $n = n'_i\,\delta_i$, $t_i = t'_i\,\delta_i$, e, conformemente, si scriva al posto della (15) la $h_i n'_i = r_i t'_i$; poichè n'_i e t'_i son primi tra di loro, risulterà r_i divisibile per n'_i, ed h_i per t'_i. Viceversa se $h_i = \lambda t'_i$ si vede ch'è soddisfatta la (15) con $r_i = \lambda_i n'_i$.

In conclusione i valori possibili per h_i sono tutti i multipli di t'_i (0 incluso) minori di t_i, in numero di δ_i, d'onde la (18).

Vediamo ora come restino caratterizzati i *divisori puri*. Se il divisore (11) è impuro ed appartiene all'indice μ, sarà (n. 8) μ divisore di $n\,(n = \mu\nu)$ e da $\mu M \equiv 0$ si dedurrà $\mu g_i \equiv 0 \pmod n$ $\mu h_j \equiv 0 \pmod{t_j}$ onde intanto tutte le g_i saranno divisibili per ν. Dal secondo gruppo di congruenze, scritte nella forma $\mu h_j = \sigma_j t_j$, moltiplicando per ν si deduce $h_j n = \sigma_j \nu t_j$, quindi, per la (15) $r_j = \nu\sigma_j$, onde anche gli r_j son divisibili per ν. Viceversa se tutti gli elementi della (16) son divisibili per ν (e naturalmente son soddisfatte le (17)) si trova subito $\mu M \equiv 0$. Dopo ciò evidenti osservazioni portano a concludere che:

Condizione necessaria e sufficiente affinchè un divisore lineare d'indice n sia puro è che la sua caratteristica di 2ª specie sia prima con n. Se invece il m. c. d fra quella caratteristica ed n è ν, il divisore stesso appartiene all'indice $\frac{n}{\nu}$.

11. Terminiamo questo § con uno sguardo ad una questione interessante che si presenterà nel seguito.

Premettasi che, com'è naturale, una curva D (effettiva o virtuale) d'una superficie algebrica, si dirà *divisibile per un intero n*, se esiste (almeno) una D_0, tale che $D \equiv n D_0$; e si avverta

[19] Il numero $\delta_1\,\delta_2 \ldots \delta_q$ (numero dei divisori algebrici d'indice n) è poi l'ordine del sottogruppo formato dalle operazioni di G_σ il cui periodo è n od un suo divisore. Cfr. Severi, loco cit. [12] n. 2.

che, nei riguardi della divisibilità, non ha luogo a farsi distinzione tra divisione algebrica e lineare, giacchè se una D è divisibile algebricamente per n lo è anche linearmente, e viceversa, onde risulta lecito, come noi faremo, riferirsi sempre alla *divisione algebrica.*

Si noti ancora che una D è divisibile per n se lo è il *ciclo algebrico* corrispondente entro alla riemanniana V della superficie considerata, cioè se quel ciclo è omologo al multiplo secondo n di qualche altro ciclo della V ([20]).

Ora sia D una curva della superficie, divisibile per μ, e D_0 uno dei relativi divisori, per guisa che $D \equiv \mu D_0$. Suppongasi inoltre che D sia divisibile per un multiplo $\mu\nu$ di μ; si potrà dedurne che D_0 è divisibile per ν?

Vogliam far vedere con un esempio che *tal deduzione non è lecita* ([21]).

A titolo preparatorio risolviamo il problema seguente: *Può un divisore dello zero appartenente al sistema fondamentale* $M_1, M_2, \ldots, M_q$ *essere a sua volta divisibile, e per quali interi?*

Sia Θ un divisore d'indice n di M_i, quindi $n\Theta \equiv M_i$; anche Θ sarà un divisore (algebrico) dello zero, e pertanto si esprimerà mediante un' equivalenza

$$\Theta \equiv \lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2 + \ldots + \lambda_i M_i + \ldots \lambda_q M_q$$

dalla quale, combinata colla $n\Theta \equiv M_i$ discende

$$n\lambda_1 M_1 + \ldots + (n\lambda_i - 1) M_i + \ldots + n\lambda_q M_q \equiv 0\,,$$

quindi, per l'osservazione *d)* del n. 7, $n\lambda_i \equiv 1 \pmod{t_i}$. Viceversa se tal condizione è soddisfatta la curva (virtuale) $\Theta = \lambda_i M_i$ è un

([20]) Il quale è *necessariamente algebrico* in forza del teorema fondamentale di S. Lefschetz (cfr. *L'Analysis Situs et la géométrie algébrique* [Paris, Gauthier Villars] Cap. IV, § VII) a norma del quale i cicli algebrici son caratterizzati dall' annullarsi dei corrispondenti periodi degl' integrali doppî di 1ª specie, congiunto all' osservazione che quei periodi son *funzionali lineari* dei cicli bidimensionali di V. Cfr. Severi, loco cit ([16]), n. 123.

([21]) Mentre (includendo nella considerazione anche gruppi virtuali) lo è nel caso analogo delle curve, in quanto ogni gruppo, che, come D_0, contenga un numero di punti multiplo di ν è sempre divisibile per ν, e dà origine, per divisione a ν^{2p} gruppi (effettivi o virtuali).

divisore d'indice n di M_i, in quanto $n\Theta = n\lambda_i M_i \equiv M_i$; ma affinchè esista un λ_i siffatto è necessario e basta che n sia primo con t_i, dunque:

Un divisore M_i del sistema fondamentale $M_1, M_2, \ldots, M_q$ è divisibile per tutti e soltanto quegl'interi che son primi col relativo coefficiente di divisione t_i.

Ciò premesso sia Δ una curva arbitraria della superficie, ν un intero *non primo* con t_1 (ad es. $\nu = t_1$) e pongasi $D_0 \equiv \equiv \nu\Delta + M_1$, $D \equiv \mu D_0$ dove μ è *multiplo di* t_1. Sarà $D \equiv \mu\nu\Delta + + \mu M_1 \equiv \mu\nu\Delta$ (perchè $\mu M_1 \equiv 0$) onde D *è divisibile per* $\mu\nu$. Ma D_0 *non è divisibile per* ν, altrimenti lo sarebbe $M_1 \equiv D_0 - - \nu\Delta$, in contrasto colla conclusione precedente, dato che ν non è primo con t_1.

A complemento notiamo ancora quanto segue:

Sia ν un intero fisso, D_0 una curva effettiva o virtuale, e si consideri la classe di tutti gl'interi δ tali che δD_0 è divisibile per $\delta\nu$. Suppongasi che quella classe non sia vuota, e ne sia d l'elemento *minimo*; si vuol provare che ogni altro δ è divisibile per d.

Allo scopo dimostreremo che, nelle ipotesi fatte, detto t il m. c. d (d, δ), anche tD_0 è divisibile per $t\nu$, quindi si ha necessariamente $t = d$.

Pongasi $dD_0 \equiv d\nu D_0'$, $\delta D_0 \equiv \delta\nu D_0''$, $d = td'$, $\delta = t\delta'$, e si determinino, come possibile gl'interi xy per guisa che risulti $xd + y\delta = t$. Tutto si riduce ad osservare che la curva $xd' D_0' + + y\delta' D_0''$ è un divisore d'indice $t\nu$ di tD_0, giacchè

$$t\nu(xd' D_0' + y\delta' D_0'') = x\,d\nu D_0' + y\,\delta\nu D_0'' \equiv xdD_0 + y\delta D_0 \equiv tD_0.$$

Si osservi infine che le equivalenze algebriche posson surrogarsi con equivalenze lineari, purchè, com'è possibile, si determinino D_0' e D_0'' in modo che $dD_0 \equiv d\nu D_0'$, $\delta D_0 \equiv \delta\nu D_0''$.

§ 3. - Discussione algebrico-geometrica dei problemi fondamentali relativi alle Φ non diramate.

12. Mantenendo le notazioni dell'introduzione, indicheremo con Φ la superficie semplice, e con F la superficie multipla, cioè supporremo che Φ contenga una I_∞ ciclica birazionalmente iden-

tica ad F. Inoltre in questo § ci riferiremo costantemente ad un modello di F *privo di punti multipli* costruito in uno spazio $S_r(x_1, x_2, \ldots, x_r)$ e per le Φ ai modelli dello $S_{r+1}(x_1, x_2, \ldots, x_r, x)$ rappresentati aggiungendo alle equazioni di F, una

$$x^n = R(x), \tag{19}$$

(R polinomio) colle convenzioni abbreviative di scrittura del n. 1. Anche attualmente, se si esclude che la curva all'infinito di F sia di diramazione per la corrispondenza $(1, n)$ tra F e Φ, l'ordine di R risulta multiplo di n, e noi lo supporremo tale, indicandolo con mn. Indicheremo poi con τ la trasformazione ciclica $x' = \varepsilon x$, ammessa dalla Φ, (19).

Come al n. 1 si vede che se i è primo con n, la superficie $x^n = R^i(x)$ è birazionalmente identica alla (19), e che, nel passaggio dall'una all'altra la τ si muta in τ'^i, quindi τ' in $\tau'^j (ij \equiv 1, \mod n)$, indicandosi con τ' la $x' = \varepsilon x$ relativa alla seconda superficie.

Quando, come qui supponiamo, la rappresentazione di Φ sopra F avviene *senza diramazioni*, la F e la forma $R(x) = 0$ hanno in ogni loro punto comune molteplicità d'intersezione multipla di n, quindi l'intersezione delle due varietà risulta dal contare n volte una certa curva Γ di F, che si dirà la *curva di diramazione apparente* della rappresentazione considerata.

Poichè $n\Gamma$ è segata su F da una forma d'ordine nm, così, indicando con A una sezione iperpiana di F, sarà

$$n\Gamma \equiv nmA, \tag{20}$$

cioè $n(\Gamma - mA) \equiv 0$, e pertanto si potrà scrivere

$$\Gamma \equiv mA + M, \tag{21}$$

indicandosi con M un *divisore lineare dello zero*. Lo diremo il *divisore associato a* Φ, sempre intendendo di riferirci al particolare modello (19).

Viceversa assegnato ad arbitrio un divisore M esistono Φ ad esso associate. Difatti si può scegliere m così alto che la curva $mA + M$ sia aritmeticamente effettiva, ed inoltre che le forme d'ordine nm seghino su F un sistema lineare completo; allora

assunta come Γ una curva del sistema lineare $|mA+M|$, la $n\Gamma$ apparterrà al sistema $|nmA|$ quindi sarà staccata su F da una forma $R(x)$ d'ordine nm, ecc.

13. Andiamo ora a ricercare la *condizione d'irriducibilità* d'una Φ e la *condizione d'identità birazionale di due* Φ.

Suppongasi che Φ sia riducibile, e, scelto su F un punto O, s'indichino, come al n. 2, con $O_1, O_2, \ldots; O_n$ i punti corrispondenti di Φ nell'ordine determinato dalla τ. Sia Φ_1, la componente di Φ che contiene O_1, O_{l+1} il primo fra i punti predetti che appartiene a Φ_1; allora la trasformazione τ^l che muta O_1 in O_{l+1} muterà Φ_1 in sè stessa, e quindi l sarà un divisore di n, altrimenti fra i successivi trasformati di O_1 mediante τ^l vi sarebbe un O_t con $t<l+1$. Posto $n=kl$, ne discende facilmente che Φ si spezza in l componenti $\Phi_i (i=1,2,\ldots,l)$ birazionalmente identiche, e multiple secondo k su F, ciascuna delle quali contiene i punti d'indice congruo (mod. k) ad un $i \leqslant l$.

La funzione x^k assume lo stesso valore nei punti O_1, O_{l+1}, O_{2l+1}, ... di Φ_1, quindi, considerata sopra Φ_1, risulta una funzione razionale $S(x)$ del punto corrispondente di F. Pertanto la Φ_1, può rappresentarsi colla $x^k = S(x)$, mentre l'equazione $x^{kl} = S^l(x)$, cioè $x^n = S^l(x)$ rappresenta una superficie che contiene come parte la Φ_1 ed ammette la trasformazione ciclica $x' = \varepsilon x$, quindi la stessa F.

Tanto val dire che, nei punti di F si ha $R(x) = S^l(x)$, cioè posto $S(x) = \dfrac{U(x)}{V(x)}$ ($U(x)$, $V(x)$ polinomi) $R(x)V^l(x) = U_l(x)$, quindi, indicate con U, V le intersezioni di F colle forme $U(x)=0$, $V(x)=0$ risulta

$$n\Gamma + lV = lU \quad (22),$$

vale a dire

$$lk\Gamma = l(U - V), \tag{22}$$

(22) Se i due membri della $R(x)V^l(x) = U^l(x)$ non hanno lo stesso grado, occorrerà aggiungere dall' una o dall' altra parte un multiplo della curva all' infinito di F. Ma atteso che il grado di ciascuno di quei due membri è multiplo di l, tal componente aggiuntiva si può ritenere inclusa in U, V. La stessa osservazione va fatta più avanti per il passaggio dalla (26) alla (26').

ed infine [23]

$$k\Gamma = U - V . \tag{23}$$

D'altra parte U e V, quindi $U - V$, sono equivalenti a multipli della sezione iperpiana A, e pertanto, tenuto conto dell'ordine di Γ, dalla (23) segue l'equivalenza

$$k\Gamma \equiv k m A , \tag{24}$$

che, confronta colla (21) porge in definitiva

$$k M \equiv 0 . \tag{25}$$

Si conclude che se Φ è riducibile, il corrispondente divisore è *impuro*, e se l (divisore di n) è il numero di componenti *irriducibili* della Φ l'indice a cui appartiene M è $k = \frac{n}{l}$ o un suo divisore.

Ma quest' ultima circostanza è da escludersi, perchè ora proveremo che *la* (25) *è anche sufficiente* a garantire lo spezzamento di Φ in l componenti (non necessariamente irriducibili), talchè se l'esponente a cui appartiene M è un divisore h di k, Φ deve spezzarsi in un numero di parti eguale o multiplo di $\frac{n}{h}$, quindi $> l$.

Supposta verificata la (25), sia t un ordine così alto che le forme d'ordine $\geq t$ seghino su F sistemi lineari completi, V l'intersezione completa di F con una forma $V(x) = 0$ d'ordine t. Poichè dalla (25) per il tramite della (21) consegue la (24), così sarà $V + k\Gamma \equiv V + k m A \equiv (t + k m) A$, onde esisterà una forma $U(x) = 0$ d'ordine $t + km$ segante F in $V + k\Gamma$; quindi la forma $U^l(x) = 0$ segherà $l V + n\Gamma$. Ma questa curva è anche intersezione completa di F colla forma $R(x) V^l(x) = 0$, quindi, fissato opportunamente in $U(x)$ il fattore costante, si avrà su F, $R(x) V^l(x) = U^l(x)$, ed infine, posto $S(x) = \frac{U(x)}{V(x)}$, l'equazione $x^n = R(x)$ della Φ potrà surrogarsi colla $x^n = S^l(x)$. E questa

[23] Si ponga ben mente a ciò che la (22) è un' *eguaglianza*, cioè esprime che le curve dei due membri *coincidono*. Così più avanti in circostanze analoghe.

mostra appunto che Φ è spezzata in l componenti (irriducibili o no) una delle quali è la $z^k = S(x)$.

In conclusione:

Condizione necessaria e sufficiente affinchè una Φ sia irriducibile, è che il corrispondente divisore M sia puro. Se M è impuro ed appartiene all'indice k, Φ si spezza in $l = \frac{n}{k}$ componenti irriducibili (e birazionalmente equivalenti) ciascuna delle quali è k—pla sulla F.

14. Mantenendo per Φ le notazioni precedenti, sia Φ_1 un'altra fra le nostre superficie, $z^n = S(x)$ la sua equazione con S d'ordine nm_1, Γ_1, M_1 gli elementi analoghi a Γ, M, legati ad A dall'equivalenza

$$\Gamma_1 \equiv m_1 A + M_1 . \tag{21'}$$

Suppongasi che tra Φ, Φ_1 interceda una trasformazione birazionale γ (che muti una nell'altra le due I_n cicliche subordinando sulla F l'identità); essa trasformerà la $\tau (z' = \varepsilon z)$ di Φ in una potenza τ_1^i della τ_1 di Φ_1, d'esponente i primo con n; quindi se z, z_1 sono (colle stesse x) due punti omologhi in γ, al punto εz corrisponderà $\varepsilon^i z_1$, ad $\varepsilon^2 z$, $\varepsilon^{2i} z_1$, e così via. Ne consegue che il rapporto $\frac{z^i}{z_1}$ ha lo stesso valore in tutte quelle coppie, e quindi è una funzione razionale $\frac{H(x)}{K(x)}$ delle x. Si ha pertanto $\frac{z^{in}}{z_1^n} = \frac{H^n(x)}{K^n(x)}$ in tutti i punti di Φ, quindi su F

$$\frac{R^i(x)}{S(x)} = \frac{H^n(x)}{K^n(x)} ,$$

vale a dire

$$R^i(x) K^n(x) = S(x) H^n(x) , \tag{26}$$

da cui, indicando con H e K le intersezioni di F colle forme $H(x) = 0$, $K(x) = 0$, segue

$$in\Gamma + nK = n\Gamma_1 + nH , \tag{26'}$$

quindi

$$i\Gamma + K = \Gamma_1 + H , \tag{27}$$

ed infine per il tramite delle (21) (21′)

$$i\,M - M_1 \equiv (m_1 - i\,m)\,A + H - K\,.$$

Il secondo membro è equivalente ad un multiplo λA di A (perchè ciò è anche di H e K); ma il primo è algebricamente nullo (quindi ha l'ordine zero), dunque $\lambda = 0$, ed in definitiva *si conclude colla condizione*

$$M_1 \equiv i\,M \quad (^{24})\,. \tag{28}$$

Dimostriamone la *sufficienza.*

Anzitutto dalla (28), mediante le (21) (21′) si deduce

$$\Gamma_1 \equiv i\,\Gamma + \lambda A\,,$$

con $\lambda = m_1 - i\,m$, per guisa che indicandosi con E un' opportuna curva, le due curve

$$E + \Gamma_1\,,\quad E + i\,\Gamma + \lambda A\,,$$

saranno segate su F da due forme dello stesso ordine. Posto che λ sia positivo (nell'ipotesi contraria basta trasferire λA dall'uno all'altro membro) se alla prima forma si aggiunge l'iperpiano segante A contato λ volte, si avranno due forme $K(x) = 0$, $H(x) = 0$ seganti F nelle due curve

$$E + \Gamma_1 + \lambda A\,,\quad E + i\,\Gamma + \lambda A\,,$$

quindi le due forme $R^i(x)\,K^n(x) = 0$, $S(x)\,H^n(x) = 0$ segheranno entrambe F nella curva $n\,E + n\,\Gamma_1 + i\,n\,\Gamma + n\,\lambda A$; laonde fissato opportunamente in $H(x)$ o in $K(x)$ il fattore d'indeterminazione, si avrà nei punti di F

$$R^i(x)\,K^n(x) = S(x)\,H^n(x)\,,$$

vale a dire

$$R^i(x) = S(x)\,\frac{H^n(x)}{K^n(x)}\,.$$

Ne consegue che la superficie $x^n = R^i(x)$ birazionalmente equivalente a Φ, si muta nella $x^n = S(x)$, cioè in Φ_1, colla tras-

(24) La *disimmetria* della condizione è soltanto *apparente*, giacchè si può anche scrivere $M \equiv j\,M_1$, dove j è determinato (mod n) dalla $i\,j \equiv 1$ (mod n).

formazione $z = \dfrac{K(x)}{H(x)} z'$ (identica nelle x), quindi che Φ, Φ_1 sono birazionalmente equivalenti.

Tenendo conto che se Φ, e quindi Φ_1, è irriducibile, M ed M_1 son divisori puri, e quindi la (28) non può aver luogo che per un i primo con n, possiamo enunciare la conclusione sotto la forma:

Condizione necessaria e sufficiente affinchè due Φ irriducibili siano birazionalmente equivalenti, è che i corrispondenti divisori siano identici, o multipli l'uno dell'altro.

Dalla quale, tenuto conto che i valori possibili per i sono $\varphi(n)$ e che i corrispondenti divisori son tutti *distinti* (appunto perchè M è *puro*) discende senz'altro che:

Il numero delle famiglie birazionalmente distinte di superficie n-ple cicle Φ (irriducibili) rappresentate sopra una data F senza diramazioni, è eguale a quello dei divisori lineari dello zero, appartenenti all'indice n (e relativi ad F) diviso per $\varphi(n)$.

Ricordando il n. 9 si vede che tant'è contare quante sono le *caratteristiche di 2ª specie* $[g_1, g_2, \ldots, g_{2p} | r_1, r_2, \ldots, r_q]$ prime con n, e soddisfacenti alle condizioni $r_i t_i \equiv 0 \pmod n$, non risguardandosi come distinte due caratteristiche eguali o proporzionali $(\mathrm{mod}\, n)$ [25].

Indichiamo questo numero con ω_n, ed osserviamo che ad ogni divisore lineare dello zero appartenente all'indice k si può associare una classe di superficie Φ_k irriducibili e multiple (cicliche) sulla F secondo k; mentre viceversa ad una tal classe corrispondono, per quel che si è visto $\varphi(k)$ divisori distinti. Poichè se k è un divisore di n quei divisori son anche tali in relazione

[25] Cfr. coll'enunciato di DE FRANCHIS, nella 2ª nota citata in [4]; ivi però i t_i han già acquisito il significato di *coefficienti di torsione*. Noteremo ancora che nel risultato generale è in particolare contenuta l'osservazione di GODEAUX, secondo la quale se n è *primo* ed F regolare, l'esistenza d'una Φ irriducibile del tipo in discorso, implica che il carattere σ di SEVERI sia multiplo di n. Basta osservare che l'esistenza d'un divisore puro d'indice n, porta $\delta(n) > 1$, il che, essendo $p = 0$, implica che sia > 1 almeno una delle δ_i (n. 10), cioè che almeno uno dei t_i, e quindi σ, sia multiplo di n. Cfr. L. GODEAUX, *Sur certaines surfaces algébriques de diviseur supérieur à l'unité* [Bull. Acc. des Sc. de Cracovie (1914) pp. 362-368].

all'indice n, e viceversa ogni divisore d'indice n appartiene ad un indice k divisore di n, così si conclude che *il numero* $\delta(n)$ *dei divisori lineari d'indice n dello zero puo esprimersi sotto la forma*

$$\delta(n) = \Sigma \varphi(k)\,\omega_k \,, \tag{29}$$

la somma andando estesa a tutti i divisori k di n (1 ed n inclusi). Tale espressione ci sarà utile al § 5.

§ 4. – Continuazione. Caso delle Φ diramate.

15. Sempre con riferimento alla rappresentazione delle Φ nella forma (19), consideriamo la curva intersezione di F colla forma $R(x) = 0$, e, tenendo conto della molteplicità delle sue componenti, decomponiamola a norma della scrittura $D + n\Gamma$, colla condizione che in D ogni componente entri un numero di volte minore di n. Tale decomposizione è evidentemente unica, e determina le due curve D, Γ, che si diranno rispettivamente *curva di diramazione effettiva* ed *apparente* inerenti alla rappresentazione considerata.

La curva Γ ha notoriamente *carattere proiettivo*, essendo legata al prescelto modello della F ed alla particolare rappresentazione (19), mentre *la D è un ente invariante per trasformazioni birazionali,* almeno nel senso che ora preciseremo.

Indichiamo con $D_1, D_2, \ldots, D_r$ le componenti irriducibili della D, con $m_1, m_2, \ldots, m_r$ la moltiplicità con cui entrano nella composizione della D, espressa dalla scrittura $D = m_1 D_1 + m_2 D_2 + \ldots + m_r D_r$. Come al n. 4 diremo che $(m_1, m_2, \ldots, m_r)$ è la *segnatura* della curva D.

Si osserverà del pari che se alla superficie (19) si sostituisce la $x^n = R^i(x)$ (i primo con n) ad essa birazionalmente equivalente, la curva D vien sostituita dalla iD depurata da componenti n—ple, la cui segnatura si ottiene da quella di D moltiplicandone ogni elemento per i e prendendo il resto (mod n). Due curve di diramazione siffatte si diranno *equipollenti*.

Si vede facilmente per via algoritmica, o tenendo presente il significato degli m_k come esponenti di sostituzioni (riferito p. es. alle sezioni iperpiane di F) e le osservazioni dei nn. 4, 5,

che per l'equivalenza di due Φ, è anzitutto *condizione necessaria* che le corrispondenti D siano identiche od equipollenti. Cosicchè *in effetto l'ente invariante per trasformazioni birazionali* non è tanto la D, quanto *la classe di curve equipollenti* alla quale appartiene ([26]).

Pure analogamente al n. 4 si osserverà che sono invarianti gl'interi $\mu_h = \text{m. c. d. } (m_h, n)$ che si diranno gli esponenti delle D_h, ed il m. c. d. μ degl'interi $(m_1, m_2, \ldots, m_r, n)$ che si dirà *l'esponente della curva di diramazione* D.

16. D'ora in poi supporremo *fissata* su F la D colla relativa segnatura, e compatibilmente colla *condizione fondamentale* di cui tra poco; essendo d'altronde indifferente sostituire alla D una curva equipollente.

Converremo inoltre di chiamar *semplice* (assolutamente) una curva C della F (irriducibile o no) quando il m. c. d. della molteplicità delle sue componenti è l'unità, e *semplice rispetto al modulo* n, quando quel m. c. d. sia primo con n. Una C non semplice si dirà *multipla* (assolutamente, o mod. n) e la relativa *molteplicità* sarà l'intero λ per cui $C = \lambda C'$, C' essendo semplice.

Se μ è l'*esponente* della D, tutte le m_h son divisibili per μ, ed i relativi quozienti sono primi con n, quindi si ha $D = \mu D_0$, D_0 essendo semplice (mod n). Sostituendo alla D una curva equipollente si può ottenere che D_0 sia anche *assolutamente semplice;*

([26]) Si vede facilmente che se la F si assoggetta ad una trasformazione birazionale che muti un punto P di D in una *curva eccezionale*, questa va computata come parte della nuova curva di diramazione con molteplicità eguale a quella di P per D o con molteplicità *equipollente* (ridotta al resto, mod. n) quindi in particolare non entra a far parte della nuova curva, se quella molteplicità è multipla di n (ad es. se P è intersezione di due componenti di D la cui molteplicità dia per somma n). Sia nell'occasione avvertito che ad una componente D_h della D può corrispondere sulla Φ un punto semplice (in senso invariantivo), quando sia $m_h = 1$, o più in generale un sol gruppo di I_n con μ_h punti ν_h-pli, talchè la I_n di F può anche avere un *numero finito di coincidenze.* Tale è ad es. il caso notorio della I_2 generata da una trasf. di 1ª specie sopra una Φ di JACOBI; ai suoi 16 punti doppî corrispondono sulla F di KUMMER immagine della I_2 gl'intorni dei 16 punti doppî nodali, e sopra una trasformata di F priva di punti multipli 16 curve D_h (di genere virtuale 0 e grado virtuale -2).

ma ciò non ha importanza essenziale, e lo avvertiamo solo perchè può tornar comodo al lettore di raffigurarselo.

Poichè $D+n\Gamma$ è staccata su F da una forma d' ordine mn, così sarà

$$D+n\Gamma \equiv mnA, \tag{30}$$

quindi

$$D \equiv n(mA-\Gamma), \tag{31}$$

talchè *la curva di diramazione D è divisibile per n*. Si ha in ciò una *condizione necessaria per l'esistenza delle Φ relative a D* che fa riscontro alla $m_1+m_2+\ldots+m_r \equiv 0 \pmod n$ del n. 4, la quale esprime che il gruppo di diramazione G è divisibile per n (cfr. la nota [21]) [27].

La *sufficienza della condizione* predetta si prova facilmente; ma convien darle una portata più ampia, al che convengono le osservazioni e convenzioni seguenti.

Poichè $D=\mu D_0$ è divisibile per $n=\mu\nu$, sarà determinato il *minimo* intero d tale che dD_0 è divisibile per $d\nu=\nu_1$, il quale (n. 11) sarà un *divisore di* μ. Lo diremo il *moltiplicatore della curva di diramazione* D, e porremo $\mu=d\mu_1$ quindi $n=\mu_1\nu_1$.

Fissato una volta per sempre un divisore lineare Δ d'indice $d\nu$ di dD_0, talchè sia

$$dD_0 \equiv d\nu\Delta \tag{32}$$

avremo anche (moltiplicando per μ_1)

$$D \equiv n\Delta, \tag{33}$$

che confrontata colla (31) porge

$$\Gamma \equiv mA-\Delta+M, \tag{34}$$

[27] Dalla predetta condizione necessaria, segue che *D taglia ogni curva C di F in un numero di punti multiplo di n*, come d' altronde dev' essere, atteso che quei punti formano sulla C il relativo gruppo di diramazione G; ma è il caso di osservare che *da tal requisito aritmetico del numero di intersezioni, non consegue necessariamente la divisibilità per n della D*. Così sopra una F *generale* d' ordine n di S_3 una sezione piana D, in quanto è *base minima*, taglia tutte le curve di F in un numero di punti multiplo di n pur non essendo divisibile per alcun intero (appunto perchè base minima).

M essendo un divisore lineare d'indice n dello zero. Lo diremo, come al n. 12 il *divisore associato a* Φ.

Non v' ha ora che ripetere con lievi varianti, il ragionamento del n. precitato, per pervenire alla conclusione che, data una D divisibile per n ($D \equiv n\Delta$) e scelto ad arbitrio il divisore M, esistono Φ associate a quel divisore con che resta stabilita (colla maggior determinazione annunciata) la *sufficienza della condizione fondamentale.*

Osservazione. Nel caso analogo delle curve (sostituendosi a D il gruppo di diramazione $G = \mu G_0$) è sempre $d = 1$ (nota [21]).

17. Passiamo ora a considerare, analogamente ai nn. 13, 14 i due problemi fondamentali (*riducibilità ed equivalenza birazionale*) per le nostre Φ.

Se Φ è riducibile e si spezza in l parti *irriducibili*, posto $n = lk$, ragionando come al n. 13 si trova che dev' essere verificata la

$$D = l(U - V - k\Gamma), \tag{35}$$

che ora tiene il posto della (22) con analogo significato di U, V. Adunque intanto D dovrà essere una curva l — pla, e siccome l è un divisore di n, mentre D è μ — pla (mod n) così l *sarà un divisore di* μ; e posto $\mu = \delta l$, ricordando la $D = \mu D_0$ verrà

$$\delta D_0 = U - V - k\Gamma. \tag{36}$$

La differenza $U - V$ è equivalente ad un multiplo λA della sezione iperpiana A; moltiplicando i due membri della (36) per l e confrontando colla (31), si riconosce che $\lambda = km$, talchè (avendosi $k = \delta\nu$) la (35) si scrive

$$\delta D_0 \equiv k(mA - \Gamma) \equiv \delta\nu(mA - \Gamma). \tag{37}$$

Ne risulta che δD_0 è divisibile per $\delta\nu$, quindi, per l'osservazione del n. 11, che δ è multiplo di d; posto $\delta = td$ si avrà di conseguenza $\mu = tdl$, quindi $\mu_1 = tl$, onde l *sarà un divisore di* μ_1. D'altronde moltiplicando per t i due membri della (32) per t si ricava $\delta D_0 \equiv k\Delta$; tenuto conto di ciò la (37) combinata colla (34) porge in definitiva la condizione

(38) $$kM \equiv 0,$$

perfettamente analoga alla (25) del n. 13.

In definitiva *se la* Φ *è riducibile e si spezza in* l *componenti irriducibili,* l *è un divisore di* $\mu_1 = \frac{\mu}{d}$, *ed il divisore* M *associato a* Φ *soddisfa alla* (38) con $k = \frac{n}{l} = \nu_1 t$, quindi appartiene ad un indice η divisore di $\frac{n}{l}$.

La conclusione s' inverte nel senso che, se l è un divisore di μ_1, ed M soddisfa alla (38) con $k = \frac{n}{l}$, le Φ associate ad M sono riducibili e si spezzano in un numero di parti eguale ad l o multiplo di l. Allo scopo basta osservare che dalla (38) per il tramite della (34) e della $\delta D_0 \equiv k\Delta$, con $\delta = d\frac{\mu_1}{l}$ (verificata perchè δ è multiplo di d) si deduce la (37), indi ragionare come nella 2ª parte del n. 13 dando alla (37) la funzione ivi assolta dalla (24).

18. Perfezioniamo le conclusioni ottenute.

Anzitutto il *massimo valore* accettabile per l è μ_1; e tal valore è effettivamente raggiunto per tutte le Φ associate a divisori M che soddisfino alla (38) con $k = \nu_1$, come risulta senz'altro dall'ultima parte del n. precedente.

Sia poi M un divisore appartenente ad un indice η contenuto in uno dei $k = \nu_1 t$ a cui si riferisce la (38), e supponiamo che t sia il *minimo* intero (divisore di μ_1) per cui $\nu_1 t$ è multiplo di η. In forza delle conclusioni predette, ogni Φ associata ad M si spezza in $l = \frac{\mu_1}{t}$ componenti (almeno): dico che si tratta effettivamente di l componenti *irriducibili.*

Suppongasi invero che il numero di quelle parti irriducibili fosse $l_1 = \lambda l$; l_1 sarebbe un divisore di μ_1, e posto $\mu_1 = \delta_1 l_1 = \delta_1 \lambda l$, verrebbe $\delta_1 = \frac{\delta}{\lambda} = \frac{t}{\lambda} d = \tau d$, con τ intero, perchè, in forza di quanto precede, δ_1 dev' essere multiplo di d. Ma allora dovrebbe aversi $k_1 M \equiv 0$, con $k_1 = \frac{n}{l_1} = \nu_1 \tau$, contrariamente all'ipotesi di minimo relativa a t.

Andiamo infine a caratterizzare, mediante gli algoritmi del § 2, il divisore M; ed intanto, posto $\eta = \frac{\nu_1 t}{\sigma}$ osserviamo che σ sarà *primo con* t, altrimenti η sarebbe divisore di qualche $\nu_1 \tau$ con τ divisore di t. Ma la condizione affinchè M appartenga all'indice η, è (n. 10) che il m. c. d. fra la sua *caratteristica di* 2ª *specie* ed n sia $\frac{n}{\eta} = \frac{\mu_1 \sigma}{t}$; dunque quella caratteristica è divisibile per $\frac{\mu_1 \sigma}{t}$, anzi, essendo σ primo con t, il m. c. d. fra essa e μ_1 è $\frac{\mu_1}{t} = l$.

Viceversa se il m. c. d. fra la caratteristica d'un M e μ_1 è $l = \frac{\mu_1}{t}$, poichè μ_1 è un divisore di n, il m. c. d. fra quella caratteristica ed n sarà $\frac{\mu_1 \sigma}{t}$ dove σ è *primo con* t, quindi M apparterrà all'indice $\eta = n : \frac{\mu_1 \sigma}{t} = \frac{\nu_1 t}{\sigma}$ ed inoltre t sarà il minimo intero (divisore di μ_1) per cui $\nu_1 t$ contiene η; cosicchè in definitiva ogni Φ associata ad M si spezzerà in l parti *irriducibili*.

In conclusione:

Condizione necessaria e sufficiente affinchè una Φ *relativa alla curva di diramazione* D, *d'esponente* μ *e moltiplicatore* d *sia irriducibile, è che la caratteristica di* 2ª *specie del divisore associato a* Φ *sia prima con* $\frac{\mu}{d}$. *Se invece il m. c. d. fra quella caratteristica e* $\frac{\mu}{d}$ *è* $l > 1$, *la* Φ *si spezza in* l *componenti irriducibili (e birazionalmente identiche) ciascuna delle quali è* $\frac{n}{l}$ — pla *sopra* F.

In particolare se $\mu = 1$, cioè *se* D *è semplice* (mod n) *tutte le* Φ *sono irriducibili.* Ciò si verifica sempre per n *primo.*

Osservazione. Nel caso delle curve la caratteristica di 2ª specie si riduce a $[g_1, g_2, \ldots, g_{2p}]$ dove le g_i hanno significato analogo a quello del n. 8. Siccome allora è sempre $d = 1$ (n. 16 Oss.) così le caratteristiche associate a C irriducibili son quelle

prime con μ. Si trova così un' osservazione del n. 5, dovendosi però osservare che l'attuale caratteristica è diversamente definita.

19. Occupiamoci ora della *condizione d'identità birazionale* di due superficie Φ, Φ_1, che supporremo irriducibili. Gli elementi relativi a Φ_1 si contrassegneranno coll'indice 1.

Ragionando come al n. 14 per la (26') si trova ora che dev' essere

$$iD + in\Gamma + nK = D + n\Gamma_1 + nH , \tag{39}$$

i essendo primo con n, ed H, K designando le intersezioni di F con forme opportune; quindi, tenuto conto che $D = \mu D_0$

$$(i-1)\mu D_0 = n(\Gamma_1 - i\Gamma + H - K) , \tag{40}$$

d'onde, ricordando che D_0 è semplice (mod n) segue che $(i-1)\mu$ è divisibile per $n(=\mu\nu)$ cioè che $i - 1 \equiv 0 \pmod{\nu}$ ed infine che i può avere soltanto uno degli $\psi(n, \mu)$ valori della successione (5) (n. 5) primi con n.

Pertanto $\frac{i-1}{\nu}$ è intero, e la (40) può scriversi

$$\frac{i-1}{\nu} D_0 = \Gamma_1 - i\Gamma + H - K , \tag{41}$$

indi convertirsi in un' equivalenza esprimendo Γ e Γ_1 a norma della (34), e tenendo conto che $H - K$ è equivalente ad un multiplo della sezione iperpiana A. Il coefficiente relativo si calcola subito, ricorrendo p. es. alla (39), e tenendo presente la (30) (e l'analoga per Φ_1); esso è in $im - m_1$, onde a calcoli fatti A si elimina e rimane in definitiva

$$M_1 \equiv iM - (i-1)\Delta + \frac{i-1}{\nu} D_0 , \tag{42}$$

che porge, fra i divisori associati M, M_1 una *condizione necessaria per l'equivalenza birazionale delle due superficie* Φ, Φ_1, contenente in particolare la (28 [28].

[28] Anche ora la disimmetria della condizione è soltanto apparente, giacchè, moltiplicando i due membri della (42) per j ($ij \equiv 1$, mod n) e tenendo conto delle relazioni fondamentali, si trova

$$M \equiv jM_1 - (j-1)\Delta + \frac{j-1}{\nu} D_0 .$$

La condizione stessa è anche sufficiente, come prova un ragionamento strettamente analogo a quello istituito al n. 14 partendo dalla (28), e che perciò non val la pena di riferire in dettaglio.

In particolare per $i = 1$ ne risulta che tutte le Φ associate ad uno stesso divisore sono birazionalmente equivalenti.

20. Fissato il divisore M (corrispondente a Φ irriducibili) la (42) porge tutti i divisori M_1 associati a superficie birazionalmente identiche. Proviamo che *quei divisori sono distinti*, quindi in numero di $\psi(n, \mu)$.

Difatti se per due valori i, j (minori di n, primi con n, ed ordinati in modo che $i-j>0$) la (42) fornisse lo stesso M_1 risulterebbe

$$(43) \qquad (i-j)M \equiv (i-j)\Delta - \frac{i-j}{\nu} D_0 ,$$

con $\frac{i-j}{\nu} = \delta$ intero e minore di μ perchè $i-j<n$. La (43) può quindi scriversi

$$(44) \qquad \delta D_0 \equiv \delta\nu(\Delta - M) ,$$

ed il suo verificarsi esige, a norma del n. 11, che sia δ multiplo di d, $\delta = \tau d$; dopo di che, tenuto conto della $dD_0 \equiv d\nu\Delta$ la (44) si riduce alla $\tau\nu_1 M \equiv 0$. Ma è anche $nM \equiv 0$ cioè $\mu_1\nu_1 M \equiv 0$, quindi di conseguenza

$$(45) \qquad t\nu_1 M \equiv 0 ,$$

con $t = \text{m.c.d.}(\tau, \mu_1)$ quindi *divisore di* μ_1. Applicando le conclusioni del n. 17 se ne deduce la riducibilità di Φ, contradditoria all'ipotesi.

La conclusione definitiva è pertanto la seguente:

Condizione necessaria e sufficiente affinchè una curva D della superficie F (delle cui parti irriducibili sia assegnata la molteplicità) possa venir assunta qual curva di diramazione d'una superficie n—pla ciclica Φ, è che D sia divisibile per n. Verificata tal condizione, se μ e d sono l'esponente ed il moltiplicatore della D, il numero delle famiglie birazionalmente distinte di Φ irriducibili si ottiene dividendo per $\psi(n, \mu)$ quello che esprime quante fra le caratteristiche di 2ª specie (relative

ai divisori d'indice n dello zero, e ridotte) son prime con $\frac{\mu}{d}$.

Circa il numero $\psi(n, \mu)$ se ne ricordi l'espressione del n. 5.

In particolare se $\mu = 1$, cioè *se D è semplice* (*mod n*) *il numero predetto coincide con quello delle caratteristiche, cioè con* $\delta(n)$ (n. 10).

Osservazione. Nel caso delle curve $d = 1$, quindi il numero delle famiglie distinte è eguale a quello delle caratteristiche $[g_1, g_2, \ldots, g_{2p}]$ prime con μ, diviso per $\psi(n, \mu)$, conformemente al n. 5.

§ 5. – Determinazione topologico-funzionale delle Φ non diramate. – Isomorfismo fra il gruppo della divisione e quello della torsione lineare.

21. Le considerazioni di questo § si svolgeranno principalmente entro alla *riemanniana V* della nostra superficie F, con riferimento ad un punto O ivi fissato.

Sia φ una funzione algebrica ad n valori sulla F, e sia convenuta una volta per sempre la designazione degli n rami corrispondenti all'intorno di O cogl'indici $1, 2, \ldots, n$. Allora ad ogni ciclo (orientato) σ relativo ad O resta associata una sostituzione sui rami stessi, quindi sui relativi indici; e l'insieme di tali sostituzioni costituisce il *gruppo di monodromia M* della φ, che essenzialmente è indipendente dal punto O.

In particolare se la φ *non è diramata* sulla F, le sostituzioni prodotte da due cicli *equivalenti* [29] coincidono; talchè se, in relazione a φ, i cicli σ si voglion risguardare come *operatori di sostituzioni*, convien considerare due cicli equivalenti come operatori identici.

Le proprietà gruppali di tali operatori sono subordinate a quelle che governano (indipendentemente dalla φ) il comportamento dei cicli σ considerati come *operatori astratti* (definiti di fronte all'equivalenza) per i quali è definita, nel modo noto, la *legge di combinazione*. Con riguardo a tal legge, l'insieme di

[29] Per questa nozione ed altre dipendenti cfr. il lavoro dell'A, citato in (7), ed anche O. Veblen, *Analysis Situs (The Cambridge Colloquium* 1916) [New York (1922)], Cap. V.

quegli operatori è un *gruppo*; il cosidetto *gruppo topologico*, o *gruppo fondamentale* (di POINCARÉ) della riemanniana V, che indicheremo con G.

Converremo d'indicare il risultato della combinazione di due cicli σ_1, σ_2 col simbolo del *prodotto operatorio* $\sigma_2\sigma_1$ (che implica sia dato l'ordine secondo cui si considerano i due cicli) o con quello, $\sigma_1 + \sigma_2$ della *somma*, a seconda che i cicli stessi si considerano di fronte alla relazione d'*equivalenza*, od a quella d'*omologia*.

Se fra i cicli $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_r$ che producono sui rami di φ (non diramata) le sostituzioni $s_1, s_2, \ldots, s_r$, intercede un'*equivalenza*

$$(46) \qquad \sigma_1^{\alpha_1}\sigma_2^{\alpha_2}\ldots\sigma_r^{\alpha_r}\,\sigma_1^{\beta_1}\sigma_2^{\beta_2}\ldots\sigma_r^{\beta_r}\ldots\ldots\sigma_1^{\lambda_1}\sigma_2^{\lambda_2}\ldots\sigma_r^{\lambda_r} \equiv 1\,,$$

(colla quale s'intende esprimere che il ciclo del 1° membro è *equivalente a zero*, cioè riducibile per *omotopia* al punto O, questo rimanendo fisso) sussiste di conseguenza fra le s_i la relazione

$$(46') \qquad s_1^{\alpha_1}s_2^{\alpha_2}\ldots s_r^{\alpha_r}\,s_1^{\beta_1}s_2^{\beta_2}\ldots s_r^{\beta_r}\ldots\ldots s_1^{\lambda_1}s_2^{\lambda_2}\ldots s_r^{\lambda_r} = 1\,,$$

e noi esprimeremo ciò dicendo che le sostituzioni s_i, in quanto attribuite ai cicli σ_i son *compatibili coll'equivalenza* (46).

Più in generale se ad ogni σ (relativo ad O) è associata una s (su n lettere), diremo che tal *riferimento* $[\sigma, s]$ è *compatibile col gruppo* G, se lo è con tutto le equivalenze che intercedono tra le operazioni di G; nel qual caso quell'insieme è evidentemente un *gruppo* M.

Ogni riferimento $[\sigma, s]$ compatibile con G può evidentemente determinarsi fissando in G un *sistema di operazioni generatrici (sistema fondamentale)* $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_r$, ed associando ad ogni σ_i una s in modo compatibile colle *equivalenze fondamentali*

$$(47) \qquad f_h(\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_r) \equiv 1,$$

che intercedono tra le σ_i. S'intende che la s relativa ad ogni altro ciclo σ resti determinata a norma dell'equivalenza che esprime σ mediante le σ_i.

Dato un gruppo M di sostituzioni s sopra n elementi legato all'insieme dei cicli σ da un riferimento $[\sigma, s]$ compatibile con

G esistono funzioni algebriche ad n valori sulla F i cui rami si permutino nel modo così prescritto? Se la risposta è affermativa, diremo che, nella circostanza, sussiste il *teorema d'esistenza di* RIEMANN; dopo di che il *teorema d'unicità* per le relative superficie Φ (considerate di fronte alle trasformazioni birazionali) è immediato.

Poichè due cicli equivalenti sono anche omologhi, così *ad ogni equivalenza* (46) *è associata un'omologia*

$$\mu_1 \sigma_1 + \mu_2 \sigma_2 + \ldots + \mu_r \sigma_r \sim 0 , \tag{48}$$

dove $\mu_i = \alpha_i + \beta_i + \ldots + \gamma_i$, che, salve le differenze di scrittura (somme invece di prodotti) può desumersi dalla (46), conferendo ai simboli σ_i il significato di *operatori permutabili*. Poichè la (46′) è formalmente identica alla (46), così, se le sostituzioni s_i sono a due a due permutabili la (46′) stessa è pienamente determinata dalla (48); e pertanto si conclude che *se il gruppo M di cui sopra è abeliano, nella verifica dei rapporti di compatibilità con G ad ogni equivalenza si può sostituire l'omologia corrispondente.*

Si noti che in particolare questa può addirittura svanire ($\mu_i = 0$), ed allora l'equivalenza (46) non impone alcuna condizione alle s_i.

22. Dato a priori il gruppo M, si può domandarsi se esistano riferimenti $[\sigma, s]$ compatibili con G, per cui le s riempiano M, e, in caso affermativo quale sia il numero dei riferimenti distinti. Alla discussione d'un problema del genere, apparisce, a primo sguardo, indispensabile, la conoscenza della precisa struttura di G, circa la quale non si hanno fino ad oggi indicazioni esaurienti ([30]). Ma nel caso d'un *gruppo abeliano* (in particolaro *ciclico*) si può fortunatamente dispensarsene, e riportarsi sopra un terreno più solido, in base all'osservazione seguente:

Se un gruppo abeliano M è riferito in modo compatibile al gruppo G, la sostituzione associata ad un ciclo omologo a zero è identica.

([30]) Cfr. S. LEFSCHETZ, *Géométrie sur les surfaces et sur les variétés algébriques* [Mémorial des Sciences Mathématiques, XL (1929)] IX, *c)*.

Sia σ il dato ciclo, relativo ad O, ed omologo a zero; per tal sua qualità esso sarà il contorno (orientato) d'un *complesso* (orientato) C_2 dato sopra V [31].

Si deformi leggermente C_2, tenendo fisso il contorno σ, in C_2' che sarà pure un complesso orientato col contorno σ; talchè $-C_2'$ avrà per contorno $-\sigma$. Il complesso $K_2 = C_2 - C_2'$ risulta privo di contorni, quindi è un *ciclo bilatero;* ed inoltre $\sigma \backsim 0$ anche (mod K_2).

Sia 2π l'ordine di connessione K_2 e $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{2\pi}$ un sistema fondamentale per il relativo gruppo topologico (*sistema di retrosezioni* per O). Si avrà (mod K_2) e quindi "a fortiori" (mod V) un'equivalenza

$$\sigma \equiv \psi(\sigma_1 \sigma_2 \ldots \sigma_{2\pi}), \tag{49}$$

la quale indurrà fra le sostituzioni associate ai relativi cicli la relazione

$$s = \psi(s_1 s_2 \ldots s_{2\pi}). \tag{49'}$$

D'altronde la (49) genera (mod K_2) un'omologia

$$\sigma \backsim \mu_1 \sigma_1 + \mu_2 \sigma_2 + \ldots + \mu_{2\pi} \sigma_{2\pi},$$

nella quale μ_i eguaglia la somma degli esponenti delle σ_i in ψ. Ma $\sigma \backsim 0$ (mod K_2) ed i σ_i sono (mod K_2) *omologicamente indipendenti*, dunque $\mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_{2\pi} = 0$, dopo di che, tenuto conto che le s_i sono permutabili, la (49') porge $s = 1$, c. d. d.

Ne consegue immediatamente che se due cicli σ_1, σ_2 sono omologhi le relative sostituzioni coincidono; ed infine, sempre nell'ipotesi che il gruppo abeliano M sia riferito in modo compatibile a G, si conclude che tal riferimento è pienamente determinato, quando si conoscono le sostituzioni associate ai cicli d'una *base minima* per le omologie in V.

Viceversa siano $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_r$ i cicli d'una *base minima*, $s_1, s_2, \ldots, s_r$ sostituzioni su n elementi, a due a due permutabili, quindi generanti un gruppo abeliano M. Si attribuisca ad ogni σ_i la s_i, e ad ogni altro ciclo σ di V la sostituzione s individuata dalla condizione che due cicli *omologhi* risultino asso-

[31] Cfr. F. Severi, loco cit. [16], n. 107.

ciati alla stessa s. Si supponga inoltre che tal riferimento $[\sigma, s]$ sia compatibile colle *omologie fondamentali*

$$\psi_h(\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_r)\sim 0\,, \tag{50}$$

tra i cicli della base; *allora* $[\sigma, s]$ *è anche compatibile col gruppo* G.

Ed invero se $\varphi(\gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_h)\equiv 1$ è un'equivalenza tra cicli di Γ, potremo intanto, per la verifica della compatibilità sostituirvi la corrispondente omologia $\varphi'(\gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_h)\sim 0$, poi, tenuto conto che le sostituzioni relative a due cicli omologhi coincidono, sostituire ai γ_i le loro espressioni mediante i σ_i. Ma allora la $\varphi'\sim 0$ si trasforma in un'omologia fra i cicli σ_i, cioè in una combinazione lineare delle (50), quindi, passando alle sostituzioni, è senz'altro verificata in forza dell'ipotesi.

23. Esaurite le premesse, riprendiamo la considerazione delle nostre Φ, cioè supponiamo che M sia il *gruppo ciclico* generato dalle potenze di $s=(12\ldots n)$.

Formiamo in V la *base minima per i cicli lineari* (relativi ad O) mediante un sistema di $2p+\lambda$ cicli $(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{2p} \mid \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_\lambda)$ nel quale i primi $2p$ elementi son quelli d'una *base intermediaria*, mentre i restanti λ sono *divisori dello zero* formanti una *base per il gruppo della torsione lineare,* quindi soddisfacenti alle omologie

$$\tau_1\varepsilon_1\sim 0\,,\ \tau_2\varepsilon_2\sim 0\,,\ldots,\tau_\lambda\varepsilon_\lambda\sim 0\,, \tag{51}$$

nelle quali $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_\lambda$ sono i *coefficienti di torsione* della Γ. Le (51) sono le *omologie fondamentali* della nostra base minima $(\sigma_i \mid \varepsilon_j)$.

Data una delle nostre Φ, e fissato, a norma dello solite convenzioni (§ 1) l'ordinamento degl'indici per i punti $O_1, O_2, \ldots, O_n$ corrispondenti ad O, ad ogni ciclo della base resta associata una potenza di s, quindi è determinata, dai relativi esponenti, una *caratteristica*

$$[\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{2p} \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_\lambda]\,, \tag{52}$$

(che potremo supporre senz'altro *ridotta*) per la quale son soddisfatte le congruenze

$$\tau_i\rho_i\equiv 0 \pmod n\,, \qquad (i=1,2,\ldots,\lambda)\,, \tag{53}$$

che interpretano la compatibilità del riferimento colle omologie fondamentali (51). Viceversa assunta ad arbitrio, compatibilmente colle (53) la caratteristica (50), ne resta determinato, in base al n. precedente, un riferimento $[\sigma, s]$ compatibile col gruppo G, quindi, sul fondamento del *teorema d'esistenza per i gruppi M ciclici*, che sarà dimostrato al § seguente, una Φ definita a meno di trasformazioni birazionali. Occorre però badare che le sostituzioni assegnate generino il gruppo M e non un suo *sottogruppo*, altrimenti la Φ risulta *riducibile;* ed all'uopo, come sappiamo (n. 2, *a*) è necessario e basta che la caratteristica (52) sia *prima con n.*

Dopo ciò, ragionando come al n. 2, *b)* si riconosce che ad una stessa Φ sono associate (dipendentemente dalla designazione dei punti O_i) $\varphi(n)$ caratteristiche distinte, e quindi che il numero ω_n delle Φ irriducibili birazionalmente distinte è dato dal numero delle caratteristiche (52) prime con n, diviso per $\varphi(n)$. Si ha così una conclusione analoga a quella del n. 14, salva la diversità di significato delle due caratteristiche, e la non presupposta identificazione dei due tipi di coefficienti (di divisione e torsione) t_i, τ_j.

24. Procediamo ora a quell'identificazione, dalla quale scaturisce *l'isomorfismo fra i gruppi corrispondenti*, in base alle due determinazioni indipendenti dei numeri ω_n. All'uopo convien considerare brevemente anche il caso delle Φ *riducibili.*

Suppongasi che il m. c. d. fra la caratteristica (52) ed n sia $l<n$; allora tutte le sostituzioni associate ai cicli della base son potenze di $s^l = S$, ed i relativi esponenti son quelli della caratteristica

$$(52') \qquad [\gamma'_1, \gamma'_2, \ldots, \gamma'_{2p} \mid \rho'_1, \rho'_2, \ldots, \rho'_\lambda], \qquad \rho'_i \tau_i \equiv 0 \pmod{k},$$

ottenuta dividendo la (52) per l. E poichè la S, in quanto si concepisca come operante sui $k = \frac{n}{l}$ *sistemi d'intransività* $(1, 2, \ldots, l \mid l+1, \ldots, 2l \mid \ldots)$ è un *ciclo su k elementi*, ed inoltre la (52') è *prima con k*, così dalla (52') stessa resta determinata una superficie Φ_k (k-pla ciclica, ecc.) irriducibile. Viceversa ad una tale Φ_k sono associate $\varphi(k)$ caratteristiche (52') distinte (mod k), quindi, moltiplicando per l, altrettante caratteristiche (52), che, come si vede facilmente, sono pure distinte (mod n).

Ne consegue che il numero delle caratteristiche (52), che, come mostra il ragionamento del n. 10, vale $n^{2p} d_1 d_2 \dots d_\lambda$, indicandosi con d_i il m. c. d fra τ_i ed n, è anche dato dall'espressione (29) del n. 14, onde, confrontando col valore assegnato per $\delta(n)$ al n. 10 risulta

$$\delta_1 \delta_2 \dots \delta_q = d_1 d_2 \dots d_\lambda \,. \tag{54}$$

Proviamo anzitutto che $q = \lambda$. Perciò facciamo n eguale ad un *divisore primo* di t_1; esso sarà anche divisore di $t_2, \dots, t_q$, talchè si avrà $\delta_1 = \delta_2 = \dots = \delta_q = n$, e $\delta_1 \delta_2 \dots \delta_q = n^q$. Posto che sia τ_h la prima delle τ divisibile per n sarà invece $d_1 = d_2 = \dots = d_{h-1} = 1$, $d_h = d_{h+1} = \dots d_\lambda = n$, quindi $d_1 d_2 \dots d_\lambda = n^{\lambda - h + 1}$, ed infine per la (54) $q \leq \lambda$. Analogamente assunto per n un divisore primo di τ_1 si trova $\lambda \leq q$, quindi, in definitiva, $q = \lambda$.

Ammettiamo ora già provato che $t_1 = \tau_1$, $t_2 = \tau_2, \dots, t_h = \tau_h$ e dimostriamo che $t_{h+1} = \tau_{h+1}$ (il ragionamento valendo anche per provare, inizialmente, che $t_1 = \tau_1$). Facciasi $n = t_{h+1}$; verrà subito

$$\delta_1 = t_1, \ \delta_2 = t_2, \dots, \ \delta_h = t_h; \ \delta_{h+1} = \dots = \delta_q = t_{h+1}$$
$$d_1 = t_1, \ d_2 = t_2, \dots, \ d_h = t_h; \ d_{h+1} = \eta_{h+1}, \dots, \ d_q = \eta_q \,.$$

indicandosi con η_{h+i} il m. c. d (t_{h+1}, τ_{h+i}) certo $\leq t_{h+1}$. Applicando la (54) si ottiene

$$t_{h+1}^{q-h+1} = \eta_{h+1} \eta_{h+2} \dots \eta_q \,,$$

quindi necessariamente $\eta_{h+1} = \eta_{h+2} = \dots = \eta_q = t_{h+1}$. Ne consegue che τ_{h+1} è divisibile per t_{h+1}; ed analogamente, fatto $n = \tau_{h+1}$ si trova che t_{h+1} è divisibile per τ_{h+1}; dunque $t_{h+1} = \tau_{h+1}$, c. d. d. ([32]).

§ 6. - Teorema d'esistenza.

25. Sia precisato, mediante un'assegnata caratteristica (52) che supporremo prima con n, il riferimento $[\sigma, s]$ fra i cicli σ

([32]) In conclusione, e salvo il diverso significato, i due tipi di caratteristiche (16) (52) s'identificano complessivamente nel simbolo, e, di fronte alle Φ, nella funzione. Crediamo che sarebbe interessante spingere tale identificazione fino al dettaglio (nel senso di Chisini) provando che si può disporre degli elementi discrezionali in modo che le due caratteristiche associate ad una stessa Φ coincidano.

(di V per O) e le sostituzioni s^γ del gruppo ciclico M. Vogliamo dimostrare che esiste la corrispondente Φ.

La nostra dimostrazione procede attraverso tre fasi, l'ultima delle quali sarà completata a parte, in un punto essenziale, al prossimo numero.

A. Sia A una sezione iperpiana di F per O, che supponemo *irriducibile*, ed R la sua immagine in V. A norma del riferimento $[\sigma, s]$ fissato, ad ogni ciclo di R resterà associata una s^γ, e l'insieme di tali s^γ sarà *compatibile col gruppo fondamentale della* R, perchè ogni equivalenza (mod R) lo è anche (mod V). Inoltre, atteso che, in forza d'un teorema fondamentale, ogni ciclo lineare di V per O è omologo (anzi *equivalente*) ad un ciclo tracciato su R ([35]) gli esponenti delle varie s^γ saranno pure, nel complesso primi con n, ed infine, sempre per il teorema fondamentale predetto la conoscenza delle s^γ relative ai cicli di R determina completamente il riferimento $[\sigma, s]$.

A norma del *teorema d'esistenza di* RIEMANN relativo alle curve multiple, l'insieme di tali s^γ determina una curva C n-pla ciclica sulla A; e tale C è *irriducibile*, stante quel che si è osservato circa gli esponenti γ.

B. Suppongasi per un momento $n = 2$, e, indicati con l, π ordine e genere (virtuale) della A sia m un intero $> \frac{2\pi}{l}$ tale che le forme d'ordine $\geq 2m$ seghino sulla superficie F un sistema lineare completo, $|B|$ la serie delle sezioni iperpiane di A. Allora dalla C resterà individuata, nel gruppo delle $2^{2\pi}$ serie derivanti dalla divisione per 2 di $|2mB|$ (tutte esistenti e non speciali perchè $ml > 2\pi$) una *serie lineare* Γ *di diramazione apparente* (n. 3) ed ogni curva $z^2 = R(x)$ rappresentata su A con gruppo di diramazione apparente Γ' tale che $\Gamma' - \Gamma \equiv \lambda B$ (λ intero $\gtrless 0$) sarà birazionalmente identica a C.

Quando $n > 2$ la C non determina, entro alle $n^{2\pi}$ serie sub-

([33]) Cfr. E. PICARD - G. SIMART, *Théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendentes* [Paris, Gauthier-Villars (1897-1906)] Vol. 1°, pag. 85, F. SEVERI, *Intorno al teorema d'Abel sulle superficie algebriche*, ecc. [Rendic. Palermo T. XXI (1906)] n. 2, Oss. II^a, S. LEFSCHETZ, loco cit. ([20]) pag. 33.

multiple secondo n della $|nmB|$ *una sola* $|\Gamma|$, ma $\varphi(n)$ serie siffatte del tipo $|i\Gamma-(i-1)B|$; tuttavia sopra ogni A irriducibile si può fissare *razionalmente* una di quelle serie, ad esempio in base alla condizione che sopra un modello $z^n = R(x)$ di C, col gruppo di diramazione apparente contenuto in essa (o in una serie che ne differisca per un multiplo di B) l'ordinamento degli n punti corrispondenti ad O per cui le circolazioni su R producono le s^γ sia quello indotto (a meno d'una permutazione circolare) dalla $z' = \varepsilon z$, non da una sua potenza d'esponente i primo con n ([31]).

C. Fissato un fascio generico Σ di sezioni iperpiane per O (del quale indicheremo con A la generica) sia r la dimensione di $|\Gamma|$ su A; imponendo ai suoi gruppi di contenere r volte il punto O, si isolerà razionalmente in $|\Gamma|$ un gruppo $\Gamma = rO + Y$ che resterà individuato come limite anche sulle particolari A per cui la dimensione di $|\Gamma|$ è $> r$.

L'insieme dei gruppi Y relativi alle varie curve di Σ riempie una certa curva L. Orbene al n. seguente dimostreremo:

a) Che L passa per i punti base di Σ diversi da O colla *stessa* molteplicità s, e per O colla molteplicità $r+s$, quindi sega la A nel gruppo $\Gamma + sB$ indicandosi ora con B il gruppo base su A (ch'è un particolar gruppo di $|B|$);

b) Che la curva $nL \equiv n(m+s)A$.

Poichè le forme d'ordine $n(m+s)$ segano su F un sistema lineare completo, esisterà una forma $R(x)$ segante F nella curva nL, quindi $z^n = R(x)$ darà una Φ n-pla ciclica sulla F, colla curva di diramazione apparente L. La curva C_1 di Φ corrispondente ad A resta ivi rappresentata col gruppo di diramazione apparente $\Gamma + sB$ (segato da L) quindi è birazionalmente identica a C. Segue che, fissato opportunamente l'ordinamento dei punti corrispondenti ad O, i cicli della R producono sugli n rami di Φ le sostituzioni s^γ, e poichè tali sostituzioni determinano il riferimento $[\sigma, s]$ così la Φ è precisamente del tipo voluto.

([34]) Alla conclusione si può anche pervenire osservando che le $\varphi(n)$ serie predette sono *distinte* su ogni A irriducibile (perchè lo è la corrispondente C) quindi, preso un fascio Σ di curve A, *privo di curve spezzate* una circolazione entro al fascio non può mai scambiare tra loro due della serie $|\Gamma|$.

26. Veniamo alla prova delle proprietà *a)*, *b)*.

Poggeremo sopra un *lemma d'equivalenza*, dovuto al SEVERI, ma qui modificato nella seguente forma che conviene al nostro caso:

Se due curve C, D tracciate sopra una superficie F segano, fuori d'un punto base O, la curva generica A d'un fascio irriducibile Σ secondo gruppi, che, completati coll'aggiunta del punto O contato rispettivamente μ e ν volte, sono equivalenti, esse son pure equivalenti o differiscono per curve del fascio.

Per la dimostrazione basta ripetere quasi testualmente il ragionamento del SEVERI [35], coll'avvertenza di determinare la g^1_n ivi considerata mediante i due gruppi equivalenti di cui nell'enunciato.

Suppongasi in particolare che Σ sia privo di curve spezzate, talchè risulti $C \equiv D + kA$ (k intero $\gtrless 0$), che la D non passi per O e che sia $\nu = 0$; inoltre s'indichi con B il gruppo base sulla A, con C_1 e D_1 i gruppi segati da C, D su A (il primo fuori di O). Per ipotesi è, su A, $C_1 + \mu O \equiv D_1$; ma d'altra parte segando con A le due curve equivalenti C e $D + kA$ si ottiene

$$x O + C_1 \equiv D_1 + k B ,$$

quindi combinando risulta l'equivalenza (su A)

$$(x - \mu) O \equiv k B , \tag{55}$$

il cui significato è ovvio, anche se k è negativo.

Torniamo ora al caso del n. precedente; ed anzitutto proviamo che L passa per i punti base di Σ colla stessa molteplicità s. Basta perciò osservare che Σ può considerarsi generico entro ad una rete di sezioni iperpiane col solo punto base O; e che i gruppi Y appartenenti alle curve della rete formano su F un sistema algebrico (razionale) ∞^2, talchè per un punto generico di F (quali sono gli ulteriori punti base di Σ) ne passa un numero finito (o nullo) e costante.

[35] F. SEVERI, *Il teorema d'Abel sulle superficie algebriche* [Annali di Mat. T. XII (1905) pp. 55-80] n. 6. Il caso che a noi interessa è quello in cui Σ è un fascio *razionale;* allora lo è pure la superficie Φ di Severi e il fascio Σ' immagine di Σ può addirittura supporsi un fascio di rette.

Consideriamo ora la curva nL, e, detta y la molteplicità di L in O, osserviamo ch'essa sega sulla A fuori di O il gruppo $nY + ns(B - O)$, che, completato aggiungendovi $\mu = n(r+s)$ volte O, diviene $n\Gamma + nsB$, quindi (tenuto conto che $n\Gamma \equiv nmB$) resta equivalente ad $n(m+s)B$, cioè al gruppo segato su A dalla sezione D di F con una forma d'ordine $n(m+s)$. Poichè si può supporre che D non passi per O, così le curve nL e D si trovano nelle condizioni delle precedenti C, D, onde si ha $nL \equiv D + kA$ ed inoltre per la (55)

$$n(x - r - s)\,O \equiv kB. \tag{56}$$

Ma *una tal equivalenza non può sussistere se i coefficienti numerici non sono nulli.* Difatti considerato Σ entro una rete generica priva di punti base, si faccia variare O su A; per ogni posizione di esso resta individuato entro alla rete un fascio Σ' in relazione al quale si può costruire come precedentemente una curva L; ed è chiaro che al variare di O gl'interi x, r, s, restano costanti. Ma allora durante tal variazione la (56) continuerebbe a sussistere, quindi, tenuto conto che i varî gruppi base B dei fasci Σ' sono, su A, equivalenti, si avrebbe $n(x-r-s)\,O_1 \equiv n(x-r-s)\,O_2$ per qualunque coppia di punti di A. Se $x - r - s \neq 0$, ciò porta all'assurdo, dato che A può supporsi non razionale; dunque $x - r - s = 0$ il che dimostra la *a)*, e di conseguenza $k = 0$, quindi $nL \equiv D \equiv n(m+s)A$, conformemente alla *b)*.