RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

MARGHERITA PIAZZOLLA-BELOCH

Sulle trasformazioni birazionali nello spazio aventi un'unica curva fondamentale (ed eventuali punti fondamantali)

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 1 (1930), p. 184-195

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1930__1__184_0>

SULLE TRASFORMAZIONI BIRAZIONALI NELLO SPAZIO AVENTI UN'UNICA CURVA FONDAMENTALE

(ed eventuali punti fondamantali)

di MARGHERITA PIAZZOLLA–BELOCH *a Ferrara.*

---

1. Data una corrispondenza birazionale regolare [1] fra i punti di due spazi S, S', che abbia in ciascuno dei due spazi una unica curva fondamentale (di 1ª specie [2]), è noto [3] che il genere dell'una curva nello spazio S è uguale al genere dell'altra nello spazio S'.

Ora sembra non privo d'interesse studiare quali siano le curve che possano essere fondamentali per un sistema omaloidico, avente un'unica curva fondamentale (e eventuali punti fondamentali).

Di ciò appunto mi occupo nella presente Nota e determino inoltre le trasformazioni birazionali aventi in ognuno dei due spazi un'unica curva fondamentale (e eventuali punti fondamentali).

2. Sia dato un sistema omaloidico di superficie φ d'ordine

(1) Nella quale cioè le superficie di ciascuno dei due sistemi omaloidici non contengano uno stesso intorno piano o conico, di un punto fondamentale, nè uno stesso intorno piano, appartenente a una curva fondamentale.

(2) Cioè una curva fondamentale a ciascun punto della quale corrisponde una curva razionale, luogo geometrico della quale è una superficie dello spazio S' (v. L. CREMONA, *Sulle trasformazioni razionali nello spazio* [Annali di Matematica, Serie II, T. V, *Opere matematiche*, T. III, pp. 298-325]).

(3) v. D. MONTESANO, *Sulla teoria generale delle corrispondenze birazionali fra i punti dello spazio* [Atti della R. Acc. delle Scienze Fisiche e Matem. di Napoli, vol. XVII, serie II, n. 6].

μ aventi in comune una curva fondamentale f, i-pla d'ordine m e genere p, priva di punti multipli, e i punti fondamentali F_0, $F_1, \ldots, F_{t-1}$ di molteplicità $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{t-1}$. Suppongo che si tratti sia per ciò che riguarda f, sia $F_0, F_1, \ldots, F_{t-1}$ di *molteplicità ordinarie* per le φ, senza però escludere per ora che le φ possano avere dei contatti d'ordine qualunque in punti fondamentali *semplici*.

Distinguo i casi (4):

a) $i >$ del massimo intero contenuto in $\frac{\mu}{4}$,

b) $i \leq$ al massimo intero contenuto in $\frac{\mu}{4}$.

3. Nell' ipotesi a), se la curva f è piana, essa avrà (5) l'ordine $m \leq 3$, e può da sola fungere da curva fondamentale per un sistema omaloidico, come si vede ricordando noti esempi di trasformazioni birazionali (6).

Nella stessa ipotesi a), se la curva f è sghemba, ogni eventuale quadrisecante di f sarebbe evidentemente retta fondamentale per il sistema dato (7). Supponendo quindi che vi sia *una unica* curva fondamentale, questa non potrà avere quadrisecanti. Il suo ordine m poi è ≤ 15 (8).

Ora è noto che il numero N (supposto finito) delle quadrisecanti di una curva sghemba d'ordine m, con h punti doppi apparenti è dato da

$$N = \frac{1}{2} h (h - 4m + 11) - \frac{1}{24} m (m - 2)(m - 3)(m - 13) .$$

(4) Cfr. la mia memoria *Sulle trasformazioni birazionali nello spazio*, [Ann. di Mat., T. XVI, s. III, pp. 27-69].

(5) v. loc. cit. (4) n. 8.

(6) Per il caso $m = 1$, per es., la nota trasformazione (2, 3); per il caso $m = 2$ la nota trasformazione (2, 2), e per il caso $m = 3$ la trasformazione (3, 6) indicata dal CREMONA (v. Nota 1ª *Sulle trasformazioni razionali nello spazio* [Rend. R. Ist. Lombardo, s. II, vol. IV (1871)]) avente come unica curva fondamentale una cubica piana e avente inoltre un punto fondamentale doppio e tre punti fondamentali semplici.

(7) cfr. loc. cit. (4) n. 7.

(8) id. id. n. 6.

Nel caso nostro dunque, dovendo essere $N=0$, si avrà

$$(1)\qquad h^2-(4m-11)h-\frac{1}{12}m(m-2)(m-3)(m-13)=0,$$

che per m *assegnato* dovrà dare per h valori interi, quindi il discriminante

$$(4m-11)^2+\frac{1}{3}m(m-2)(m-3)(m-13),$$

dovrà essere un quadrato perfetto, ciò che si verifica per i seguenti valori di m:

$$m=2,\ m=3,\ m=4,\ m=5,\ m=6,\ m=7,\ m=9,\ m=13\ .$$

Escludendo le soluzioni negative della (1) poichè i valori di h devono essere interi positivi, si avranno in corrispondenza le seguenti soluzioni:

$$m=2,\ h=0$$

$$m=3,\ h=1$$

$$m=4,\ \begin{cases} h=2 \\ h=3 \end{cases}$$

$$m=5,\ \begin{cases} h=4 \\ h=5 \end{cases}$$

$$m=6,\ \begin{cases} h=6 \\ h=7 \end{cases}$$

$$m=7,\ \begin{cases} h=7 \\ h=10 \end{cases}$$

$$m=9,\ \begin{cases} h=7 \\ h=18 \end{cases}$$

$$m=13,\ h=41\ .$$

Alle soluzioni $m=7$, $h=7$; $m=9$, $h=7$; $m=13$, $h=41$, non corrisponde alcuna curva algebrica [9]. Per $m=9$, $h=18$ esistono

[9] v. G. H. Halphen, *Sur la classification des courbes gauches algébriques* [Journal de l'École polyt. LII, (1882)].

due curve algebriche diverse [10], una situata sopra una quadrica, l'altra la completa intersezione di due superficie cubiche. Ora [11] una curva fondamentale per il sistema $|\varphi|$, di molteplicità maggiore del massimo intero contenuto in $\frac{\mu}{4}$, se giace sopra una quadrica ha l'ordine $m \leq 6$. La prima delle due curve del 9° ordine trovate, quindi si esclude.

Possiamo dunque concludere:

Se un sistema omaloidico d' ordine μ possiede un' unica curva fondamentale (priva di punti multipli), di molteplicità maggiore del massimo intero contenuto in $\frac{\mu}{4}$, questa dovrà appartenere ad uno dei seguenti tipi:

1) *retta*
2) *conica*
3) *cubica piana*
4) *cubica sghemba*
5) *quartica di 1ª specie*
6) *quartica di 2ª specie*
7) *quintica di genere 1*
8) *quintica di genere 2*
9) *sestica di genere 3*
10) *sestica di genere 4*
11) *curva del 7° ordine e genere 5*
12) *curva del 9° ordine e genere 10*
    (*totale intersezione di due superficie cubiche*).

Per i primi tre casi abbiamo già citato degli esempi. Per i casi 4), 6), 7), 9) vi sono noti esempi di sistemi omaloidici di ordine 3. Per il caso 5) si ha la trasformazione (3, 5) indicata dal Cremona [12] in cui il sistema omaloidico diretto è formato da superficie del 3° ordine aventi un punto doppio O in comune, e aventi come unica curva fondamentale una quartica di 1ª specie passante per il punto O, e avente inoltre due punti fondamentali semplici.

[10] v. loc. cit. [9].
[11] v. loc. cit. [4], n. 8.
[12] L. Cremona, loc. cit. [6].

4. Determinati così i tipi possibili, nella ipotesi *a*) di curve fondamentali per un sistema omaloidico avente un' unica curva fondamentale, passiamo ad esaminare l' ipotesi *b*), in cui cioè la molteplicità della curva fondamentale (unica) f del sistema omaloidico $|\varphi|$ d'ordine μ, sia minore od uguale al massimo intero contenuto in $\frac{\mu}{4}$.

In tale ipotesi deve esistere necessariamente [13] un punto F_0 fondamentale per il sistema $|\varphi|$, di molteplicità α_0 maggiore del doppio del massimo intero contenuto in $\frac{\mu}{4}$.

Se la curva f non è una retta passante per F_0, siccome oltre f non vi devono essere altre curve fondamentali, ogni altro punto fondamentale F dovrà avere molteplicità $\alpha \leq \mu - \alpha_0$, (altrimenti la congiungente $F_0 F$ sarebbe retta fondamentale, contro l' ipotesi di un' unica curva fondamentale). Inoltre, per ragione analoga, la curva f dovrà essere situata sopra un cono di vertice F_0 in modo da incontrarne in un sol punto, fuori di F_0, le generatrici (altrimenti ogni corda della curva f uscente da F_0 sarebbe retta fondamentale).

Possiamo dunque concludere, come nella memoria citata [14]:

Nell' ipotesi b) in cui cioè la molteplicità i dell' unica curva fondamentale f per il sistema omaloidico $|\varphi|$ ***d' ordine*** μ***, sia minore od uguale al massimo intero contenuto in*** $\frac{\mu}{4}$***, esiste un punto foudamentale*** F_0***, di molteplicità maggiore del doppio del massimo intero contenuto in*** $\frac{\mu}{4}$***.***
La curva fondamentale f, se non è una retta passante per F_0***, è una curva situata sopra un cono di vertice*** F_0 ***in modo da incontrarne in un sol punto, fuori di*** F_0***, le generatrici. Ogni altro eventuale punto fondamentale ha molteplicità*** $\alpha \leq \mu - \alpha_0$.

(13) v. loc. cit. (4), n. 6 e n. 12.
(14) v. loc. cit. (4).

5. Ciò posto, esaminiamo le curve (irriducibili) situate sopra un cono di vertice F_0 in modo da incontrarne in un sol punto fuori di F_0, le generatrici.

Dicendo, [sempre nell'ipotesi *b*) e tenendo sempre presente l'esclusione dell'esistenza di rette fondamentali passanti per F_0], p il genere del cono, o della curva f d'ordine m, supposta priva di punti multipli fuori di F_0 ([15]), e dicendo s il numero dei rami con cui f passa per F_0, sarà

$$p = \frac{(m - s - 1)(m - s - 2)}{2}. \tag{2}$$

Dati m e p (ordine e genere della curva f) questa relazione ci darà i corrispondenti valori di s. Essa si può scrivere

$$s^2 - (2m - 3)s + (m - 1)(m - 2) - 2p = 0 \tag{3}$$

che deve dare per s valori interi ≥ 0.

Dovrà quindi il discriminante della (3) cioè

$$1 + 8p$$

essere un quadrato perfetto (dispari), e quindi dovrà p essere della forma

$$p = \frac{r(r+1)}{2}$$

(r numero intero ≥ -1, dovendo essere $p \geq 0$).

In conseguenza le soluzioni della (3) sono

$$\begin{cases} s = m - r - 2 \\ s = m + r - 1 \end{cases}. \tag{5}$$

Ora s non può nè superare, nè uguagliare m (essendo la curva f irriducibile); la soluzione $s = m + r - 1$ è quindi possibile soltanto per $r = 0$ e $r = -1, (p = 0)$.

Per $r = 0$ si ha $s = m - 1$; in questo caso la curva è piana (con un punto $(m-1)$-plo in F_0) e di genere zero.

Per $r = -1$ si ha $s = m - 2$; la curva è situata sopra un

([15]) Il ragionamento seguente si può facilmente estendere anche al caso in cui la curva f abbia altri punti multipli.

cono del 2° ordine col vertice in F_0, essa è di genere zero con punto $(m-2)$-plo in F_0.

La soluzione $s=m-r-2$ è possibile per tutti i valori di r, da $r=-1$ a $r=m-2$, e la curva f presenta in corrispondenza in F_0 rispettivamente un punto multiplo secondo $m-1$, $m-2, \ldots, 1, 0$.

Se vogliamo che la curva f sia priva di punti multipli, dovrà essere $s=0$ $(r=m-2)$ oppure $s=1$ $(r=m-3)$. Nel primo caso è $p=\frac{(m-1)(m-2)}{2}$, e la curva f è piana; nel secondo caso si ha $p=\frac{(m-2)(m-3)}{2}$, la curva passa semplicemente per F_0 ed è situata sopra un cono di ordine $m-1$ col vertice in F_0. Sarà necessariamente $m \leq 4$, perchè il massimo valore del genere di una curva sghemba è $\frac{(m-2)^2}{4}$ se m è pari, $\frac{(m-1)(m-3)}{4}$ se m è dispari.

6. Passiamo ora a studiare le **trasformazioni birazionali** (μ, ν) **in cui tanto il sistema omaloidico diretto** $|\varphi|$, **quanto l'inverso** $|\psi|$ **abbiano un'unica curva fondamentale** (che supponiamo priva di punti multipli), più eventuali punti fondamentali, ammesse le ipotesi del n. 2, ossia supposto che si tratti per ciò che riguarda tanto le curve quanto i punti fondamentali di *molteplicità ordinarie*.

Sia μ l'ordine del sistema $|\varphi|$, e ν quello del sistema $|\psi|$.

Sia f la curva fondamentale, d'ordine m e genere p, del sistema $|\varphi|$, e f' la curva fondamentale, d'ordine m e genere p', del sistema $|\psi|$.

Sia i la molteplicità della curva f per le superficie del sistema $|\varphi|$, e i' quella della curva f' per le superficie del sistema $|\psi|$.

Ricordiamo le note relazioni ([16])

([16]) L. Cremona, loc. cit. (*); M. Noether, *Sulle curve multiple di superficie algebriche* [Ann. di Mat., s. II, T. V, pp. 163-177]; A. Cayley, *On the rational transformations in space* [Proc. of the London Math. Society,

(6) $$\nu = \mu^2 - m i^2$$

(7) $$\mu = \nu^2 - m' i'^2$$

(8) $$4\nu - 4\mu = m' i' - m i$$

(9) $$\pi = \frac{(\mu-1)(\mu-2)}{2} - \frac{1}{2} m i (i-1)$$

(10) $$\pi = \frac{(\nu-1)(\nu-2)}{2} - \frac{1}{2} m' i' (i'-1)$$

dove π è il genere di una sezione piana generica di φ (e ψ).

Dalle (9) e (10), tenendo conto delle (6) e (7) si ricava (poichè $\pi \geq 0$)

(11) $$m i + m' i' - 2\mu - 2\nu + 4 \geq 0 .$$

7. Ciò posto vale la proprietà:

Se il sistema omaloidico diretto e il sistema omaloidico inverso sono tutti e due del tipo a), (v. n. 2), *ed è* $m = m'$, *è anche* $\mu = \nu$, $(i = i')$.

Infatti, supponiamo che potesse essere $\mu \neq \nu$. Sottraendo membro a membro dalla (6) la (7), (per $m' = m$) si troverebbe

$$\nu - \mu = \mu^2 - \nu^2 - m i^2 + m i'^2$$

che si può anche scrivere

$$(\mu - \nu)(\mu + \nu + 1) = m (i + i')(i - i')$$

ossia tenendo conto della (8)

$$(\mu - \nu)(\mu + \nu + 1) = 4 (i + i')(\mu - \nu) .$$

Se $\mu \neq \nu$, dividendo i due membri per il fattore $\mu - \nu$ si avrebbe

(12) $$\mu + \nu + 1 = 4 (i + i') .$$

Ponendo $\mu = 4k + t$, ($t = 0, 1, 2, 3$; k intero positivo)

$\nu = 4h + s$, ($s = 0, 1, 2, 3$; h intero positivo)

per ipotesi

$$i \geq k + 1 , \quad i' \geq h + 1$$

vol. III, Collected Papers, vol. VII, pp. 189-240]; G. Loria, *Nota sulla classificazione delle trasformazioni razionali nello spazio* [Rend. R. Ist. Lombardo, serie II, T. 23 (1890), pp. 824-834].

e sostituendo nella (12) si avrebbe

$$t+s\geq 7$$

mentre $t\leq 3$, $s\leq 3$. Dunque non può essere $\mu\neq\nu$, ma si avrà

$$\mu=\nu$$

e per la (6) e (7)

$$i=i' .$$

Viceversa *se* $\mu=\nu$ *è anche* $m=m'$ *e* $i=i'$, come segue dalle (6), (7) e (8).

Le stesse proprietà valgono anche quando il sistema omaloidico diretto e l'inverso sono tutti e due del tipo b), come si vede con un ragionamento analogo.

8. Facciamo ora l'ipotesi che la nostra trasformazione (μ, ν) sia *regolare* (v. n. 1). Dicendo p e p' rispettivamente i generi delle due curve f e f', sarà allora [17]

$$p=p' .$$

Se tanto il sistema omaloidico diretto, quanto l'inverso sono del tipo *a*), (v. n. 2), le curve f e f' dovranno appartenere ai tipi elencati al n. 2.

Per i diversi valori del genere, f e f' potranno quindi essere:

$p=0$, retta, conica, cubica gobba o quartica di 2ª specie;

$p=1$, cubica piana, quartica di 1ª specie o quintica di genere 1;

$p=2$, quintica di genere 2;

$p=3$, sestica di genere 3;

$p=4$, sestica di genere 4;

$p=5$, curva del 7° ordine e genere 5;

$p=10$, curva del 9° ordine e genere 10 (totale intersezione di due superficie cubiche).

9. Per $p(=p')=0$ sarà dunque

$$0\leq m\leq 4 , \quad 0\leq m'\leq 4 ,$$

(17) v. loc. cit. (3).

e tanto f quanto f' saranno o piane o giaceranno sopra quadriche.

Se f e f' sono entrambe piane, si ha evidentemente

$$\mu - m i \geq 0\,, \quad \nu - m' i' \geq 0$$

e sommando membro a membro

$$\mu + \nu - m i - m' i' \geq 0\,.$$

Confrontando con la (11) del n. 6, si vede che dev'essere

$$\mu + \nu \leq 4$$

e poichè dev'essere $\mu \geq 2$, $\nu \geq 2$, il solo caso possibile è

$$\mu = 2\,, \quad \nu = 2\,,$$

e si ha la nota *trasformazione* (2, 2), avente in ognuno dei due spazi come elementi fondamentali (semplici) una conica e un punto.

Analizzando gli altri casi ($p = 0$) e tenendo conto del fatto che i due sistemi omaloidici sono del tipo *a*), si trova con considerazioni analoghe e ricorrendo alle formole (6), (7), (8) e (11) del n. 6, e al teorema del n. 7, che non esistono altre trasformazioni birazionali (regolari), nella ipotesi considerata, aventi in ognuno dei due spazi un'unica curva fondamentale (priva di punti multipli), di genere zero.

I casi che si possono presentare per $p = 1$ e $p = 2$ si escludono analogamente.

Per $p = 3$ si ha $m = m' = 6$. Segue (v. n. 7) che

$$\mu = \nu\,, \quad i = i'\,.$$

Ora dev'essere $3i \leq \mu$, altrimenti ogni trisecante della curva f (o f') sarebbe retta fondamentale, contro l'ipotesi di un'unica curva fondamentale.

D'altra parte per la (11) del n. 6 si ha

$$3i \geq \mu - 1\,.$$

Distinguendo i casi $\mu = 3r$, $\mu = 3r + 1$, $\mu = 3r + 2$, si vede che, se $\mu = 3r$, dev'essere $i = r$, e allora la (6) del n. 6 dà come solo valore possibile per r

$$r=1$$

per cui

$$\mu=3\,,\quad(\nu=3)$$

e si ha la nota *trasformazione* (3, 3), che ha in ognuno dei due spazi un'unica curva fondamentale del 6° ordine e genere 3.

I casi $\mu=3r+1$ e $\mu=3r+2$, con ragionamenti analoghi facilmente si escludono.

Per $p=4$, $p=5$ o $p=10$, si vede senza difficoltà che non esistono trasformazioni corrispondenti.

Dunque *non esistono trasformazioni birazionali per cui i sistemi omaloidici diretto e inverso siano tutti e due del tipo a), aventi in ognuno dei due spazi un' unica curva fondamentale, multipla ordinaria* (priva di punti multipli) e eventuali punti fondamentali di molteplicità ordinaria, *salvo la nota trasformazione* (2, 2) avente in ognuno dei due spazi come elementi fondamentali (semplici) una conica e un punto, *e la nota trasformazione* (3, 3) avente in ognuno dei due spazi come curva fondamentale semplice una sestica di genere 3.

10. Supponiamo ora che data una trasformazione birazionale (μ, ν), tanto il sistema omaloidico diretto $|\varphi|$ quanto l'inverso $|\psi|$ siano del tipo *b*), (v. n. 2).

Sia f la curva fondamentale (priva di punti multipli) del sistema omaloidico diretto $|\varphi|$, e sia m il suo ordine e i la sua molteplicità per $|\varphi|$; e sia F_0 il punto fondamentale di molteplicità massima di $|\varphi|$, (v. n. 4).

Sia f' la curva fondamentale (priva di punti multipli) del sistema omaloidico inverso $|\psi|$, e sia m' il suo ordine e i' la sua molteplicità per $|\psi|$; e sia F'_0 il punto fondamentale di molteplicità massima di $|\psi|$, (v. n. 4).

La curva f, (priva di punti multipli), se non passa per F_0 sarà piana, se passa per F_0 (semplicemente) sarà d'ordine $m \leq 4$ (v. n. 5). Cosa analoga si avrà per f'.

Analizzando i diversi casi, si trova con considerazioni analoghe a quelle del n. precedente, che, *nell'ipotesi considerata non esistono trasformazioni birazionali* (*regolari*) *aventi in* *ognuno dei due spazi un' unica curva fondamentale multipla ordinaria (priva di punti multipli) e punti fondamentali di molteplicità ordinaria (fra cui il punto di molteplicità massima).*

11. Resta a trattare il caso delle ***trasformazioni birazionali miste,*** in cui p. es. il sistema omaloidico diretto $|\varphi|$ sia del tipo b) e il sistema omaloidico inverso $|\psi|$ sia del tipo a) (v. n. 2).

Adoperando le stesse notazioni dei nn. precedenti, sarà per ipotesi $i \leq$ al massimo intero contenuto in $\frac{\mu}{4}$. Ma dev' essere $i \geq 1$. Segue

$$\mu \geq 4 .$$

Sia F_0 il punto fondamentale di molteplicità massima di $|\varphi|$ (v. n. 4).

La curva f potrà essere (v. n. 5) una curva piana non passante per F_0, oppure una retta, una conica, una cubica sghemba o una quartica di 1ª specie passanti per F_0.

La curva f' potrà essere una delle curve comprese in 1), 2), . . . , 12) del n. 3.

Se supponiamo che la trasformazione birazionale sia ***regolare*** (v. n. 1), le curve f e f' avranno lo stesso genere.

Si potranno allora dare i seguenti casi:

$p = 0$, f - retta, conica o cubica sghemba,
f' - retta, conica, cubica sghemba o quartica di 2ª specie,
$p = 1$, f - cubica piana, quartica di 1ª specie,
f' - quartica di 1ª specie o quintica di genere 1,
$p = 3$, f - quartica piana,
f' - sestica di genere 3,
$p = 10$, f - sestica piana,
f' - curva del 9° ordine e genere 10.
(totale intersezione di due superficie cubiche).

Analizzando i diversi casi, si vede che i soli casi possibili si riducono a ***trasformazioni monoidali.***