GIOVANNI SANSONE

Sugli autovalori per le equazioni differenziali lineari omogenee del terzo ordine

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 1 (1930), p. 164-183
<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1930__1__164_0>

SUGLI AUTOVALORI PER LE EQUAZIONI DIFFERENZIALI LINEARI OMOGENEE DEL TERZO ORDINE

di GIOVANNI SANSONE *a Firenze*.

Scopo del presente lavoro è di dimostrare che: *data l'equazione*

$$[\theta(x)\, y'(x)]'' + \lambda[A(x)\, y(x)]' + \lambda[B_1(x) + \varepsilon B_2(x)]\, y(x) = 0\,,$$

nelle ipotesi $\theta''(x)$, $A'(x)$, $B_1(x)$, $B_2(x)$ *funzioni continue di* x *in* (α, β); λ, ε *costanti;* $\theta(x) > 0$ *in* (α, β); *fissati tre punti* a, c, b *di* (α, β), $a < c < b$, *se avviene che la funzione* $(x - c)\, B_2(x)$ *senza essere identicamente nulla non assume valori di segno opposto in* (a, b), *allora eccettuati al più tre valori della costante* ε, *esistono valori di* λ (*autovalori*) *ai quali corrispondono integrali dell'equazione, non identicamente nulli, che si annullano nei tre punti fissati* a, c, b.

In altro lavoro l'A. ha dimostrato che se i coefficienti della equazione predetta sono costanti (anche per equazioni di qualsiasi ordine) esistono infiniti autovalori (1); risultati analoghi sono stati ottenuti da altri autori per le equazioni *autoaggiunte* (2); è perciò da presumere, e la questione è ora oggetto di studio dell'A., che il teorema qui dimostrato sussista per le più generale equazione differenziale del terzo ordine del tipo

(1) Cfr. G. SANSONE - *a) Il teorema di oscillazione per le equazioni differenziali lineari omogenee a coefficienti costanti.* [Rend. Ist. Lombardo di Sc. e Lett.; LXII; (1929)]; – *b) Esistenza di infiniti autovalori per le equazioni differenziali ordinarie lineari omogenee a coefficienti costanti.* [In pubblicazione nei Rend. del Circ. Matem. di Palermo].

(2) G. MAMMANA, *Autovalori ed autosoluzioni per la più generale equazione differenziale ordinaria.* [Annali R. Sc. Norm. Sup. di Pisa; XV (Sc. fis. e nat.), 1927].

$$[\theta(x)\, y'(x)]'' + \lambda [A(x)\, y(x)]' + \lambda B_1(x)\, y(x) = 0\,,$$

nelle ipotesi dichiarate per $\theta(x)$, $\theta''(x)$, $A'(x)$, $B_1(x)$.

§ 1. - Equazione integrale omogenea di seconda specie cui soddisfano le soluzioni dell'equazione differenziale

(1) $$[(\theta(x)\, y'(x)]'' + \lambda [A(x)\, y(x)]' + \lambda B(x)\, y(x) = 0\,,$$

nulle in a, c, b.

1. - Supponiamo $\theta''(x)$, $A'(x)$, $B(x)$ funzioni continue in (α, β), $\theta(x) > 0$ in (α, β), e siano a, c, b, con $a < c < b$, tre punti di (α, β); si vuole studiare se è possibile scegliere il parametro λ in modo che l'equazione (1) ammetta un integrale $y(x)$ non identicamente nullo che si annulli nei tre punti fissati a, c, b, sia cioè:

(2) $$y(a) = y(b) = y(c) = 0\,.$$

All'equazione differenziale (1) può sostituirsi il sistema nelle due funzioni incognite $y(x)$, $u(x)$

$(3)_1$ $$[\theta(x)\, y'(x)]' + u(x) = 0\,,$$

$(3)_2$ $$u'(x) = \lambda [A(x)\, y(x)] + \lambda B(x)\, y(x)\,.$$

Se con $G(x, \zeta)$ indichiamo la così detta funzione di Green relativa all'equazione

$$[\theta(x)\, y'(x)]' = 0\,,$$

sappiamo che si ha per $a \leq x \leq b$, $a \leq \xi \leq b$

(4) $$\boxed{G(x, \xi) = \frac{\psi(b, \xi)\, \psi(x, a)}{\psi(b, a)}\,, \quad \text{con } x \leqq \xi}$$

$$\boxed{G(x, \xi) = \frac{\psi(\xi, a)\, \psi(b, x)}{\psi(b, a)}\,, \quad \text{con } x \geq \xi}$$

ove con $\psi(m, l)$, essendo m, l variabili in (a, b), indichiamo la funzione

$$(5) \qquad \boxed{\psi(m, l) = \int_l^m \frac{dx}{\theta(x)}.} \quad (^3)$$

Tutte le soluzioni $y(x)$ della $(3)_1$ nulle in a e in b sono date da

$$y(x) = \int_a^b G(x, \xi)\, u(\xi)\, d\xi,$$

perciò il sistema delle $(3)_1$, $(3)_2$ unitamente alle condizioni $y(a) = y(b) = y(c) = 0$ equivale al sistema:

$$(6)_1 \qquad y(x) = \int_a^b G(x, \xi)\, u(\xi)\, d\xi\,;$$

$$(6)_2 \quad u'(x) = \lambda[A(x)\, y(x)]' + \lambda\, B(x)\, y(x)\,; \qquad (6)_3 \quad y(c) = 0\,.$$

Dalla $(6)_2$ si ha:

$$(7) \qquad u(x) = \lambda A(x)\, y(x) + \lambda \int_a^x B(x)\, y(x)\, dx + C \qquad (C \text{ costante})$$

e il sistema delle $(6)_1$, $(6)_2$, $(6)_3$ dà per $y(x)$

$$(8)_1 \qquad \begin{aligned} y(x) = C\int_a^b G(x, \xi)\, d\xi + \lambda \int_a^b G(x, t)\, A(t)\, y(t)\, dt\, + \\ + \lambda \int_a^b G(x, \xi)\, d\xi \int_a^\xi B(t)\, y(t)\, dt\,, \end{aligned}$$

$$(8)_2 \qquad y(c) = 0\,.$$

L'ultimo integrale del secondo membro della $(8)_1$ è uguale a

(3) Cfr. R. Courant und D. Hilbert, *Methoden der Mathem. Physik.* [Berlino, 1924], p. 273.

$\lambda \int_a^b B(t)\, y(t)\, dt \int_t^b G(x, \xi)\, d\xi$, perciò posto

$$(9) \qquad \boxed{H(x, t) = \int_t^b G(x, \xi)\, dt}$$

la $(8)_1$ diventa

$$y(x) = C\, H(x, a) + \lambda \int_a^b G(x, t)\, A(t)\, y(t)\, dt +$$

$$+ \lambda \int_a^b H(x, t)\, B(t)\, y(t)\, dt ,$$

cioè

$$y(x) = C\, H(x, a) + \lambda \int_a^b [G(x, t)\, A(t) + H(x, t)\, B(t)]\, y(t)\, dt ,$$

e posto ancora

$$(10) \qquad \boxed{k(x, t) = G(x, t)\, A(t) + H(x, t)\, B(t)}$$

abbiamo per $y(x)$ l'equazione

$$y(x) = C\, H(x, a) + \lambda \int_a^b k(x, t)\, y(t)\, dt ,$$

e la condizione $(8)_2$, $y(c) = 0$.

L'ultima equazione dà per la costante C

$$(11) \qquad C\, H(c, a) + \lambda \int_a^b k(x, t)\, y(t)\, dt = 0 ,$$

dalla quale, avendosi per le (4), (5), (9) $H(c, a) > 0$ si ha

$$(12) \qquad C = -\lambda \int_a^b \frac{k(c, t)}{H(c, a)}\, y(t)\, dt ,$$

e perciò per $y(x)$ otteniamo l'equazione integrale omogenea di seconda specie

$$(13)\qquad y(x)=\lambda\int_a^b\left[k(x,t)-\frac{H(x,a)}{H(c,a)}k(c,t)\right]y(t)dt,$$

ed infine posto

$$(14)\qquad \boxed{K(x,t)=k(x,t)-\frac{H(x,a)}{H(c,a)}k(c,t)}$$

abbiamo per $y(x)$ l'equazione

$$(\mathrm{I})\qquad \boxed{y(x)=\lambda\int_a^b K(x,t)\,y(t)\,dt}\ .$$

Il nostro procedimento è invertibile; concludiamo che *condizione necessaria e sufficiente perchè l'equazione* (1) *ammetta un integrale* $y(x)$ *nullo in* a, c, b $(a<c<b)$ *è che l'equazione integrale omogenea di seconda specie* (I) *ammetta una soluzione* $y(x)$ *non identicamente nulla.*

2. - Espressione del nucleo $K(x,t)$ dell'equazione integrale (I).

Se poniamo [cfr. (5)]

$$(15)\qquad \boxed{\int_a^x\frac{dx}{\theta(x)}=\varphi(x)}$$

$\varphi(x)$ è funzione di x positiva, crescente, e la prima delle (4) diventa

$$G(x,\xi)=\frac{\varphi(x)}{\varphi(b)}\int_\xi^b\frac{dx}{\theta(x)}=\frac{\varphi(x)}{\varphi(b)}[\varphi(b)-\varphi(\xi)]$$

e operando analogamente sulla seconda delle (4) avremo:

$$(16)\qquad \begin{aligned} G(x,\xi)&=\frac{\varphi(x)}{\varphi(b)}[\varphi(b)-\varphi(\xi)] \quad \text{per } x\leq\xi,\\ G(x,\xi)&=\frac{\varphi(\xi)}{\varphi(b)}[\varphi(b)-\varphi(x)] \quad \text{per } x\geq\xi. \end{aligned}$$

Passiamo ora a determinare l' espressione della funzione $H(x, t)$.

Dalla (9) per $t \geq x$, tenuto conto della prima delle (16), si ha:

$$H(x, t) = \int_t^b G(x, \xi)\, d\xi = \frac{\varphi(x)}{\varphi(b)} \int_t^b [\varphi(b) - \varphi(\xi)]\, d\xi =$$

$$= (b - t)\, \varphi(x) - \frac{\varphi(x)}{\varphi(b)} \int_t^b \varphi(\xi)\, d\xi =$$

$$= (b - t)\, \varphi(x) - \frac{\varphi(x)}{\varphi(b)} [\xi \varphi(\xi)]_t^b + \frac{\varphi(x)}{\varphi(b)} \int_t^b \frac{\xi}{\theta(\xi)}\, d\xi =$$

$$= \frac{\varphi(x)}{\varphi(b)} \left[t \{ \varphi(t) - \varphi(b) \} + \int_t^b \frac{\xi}{\theta(\xi)}\, d\xi \right]$$

e ponendo quindi

$$\boxed{\int_t^b \frac{\xi}{\theta(\xi)}\, d\xi = \omega(t)} \tag{17}$$

e operando in modo analogo quando sia $t \leq x$, troviamo

$$(18)_1 \qquad H(x, t) = \frac{\varphi(x)}{\varphi(b)} [t \{ \varphi(t) - \varphi(b) \} + \omega(t)] \quad \text{per } t \geq x$$

$$(18)_2 \qquad H(x, t) = \frac{\varphi(x) - \varphi(b)}{\varphi(b)} \{ \varphi(t) + \omega(t) \} + \omega(x) \quad \text{per } t \leq x .$$

Tenuto conto delle (16) e delle $(18)_1$, $(18)_2$, la (10) dà per la funzione $k(x, t)$ le espressioni:

$$(19)_1 \qquad k(x, t) = \frac{\varphi(x)}{\varphi(b)} [\{ \varphi(b) - \varphi(t) \} A(t) + \{ t [\varphi(t) - \varphi(b)] +$$

$$+ \omega(t) \} B(t)] \qquad \text{per } x \leq t ,$$

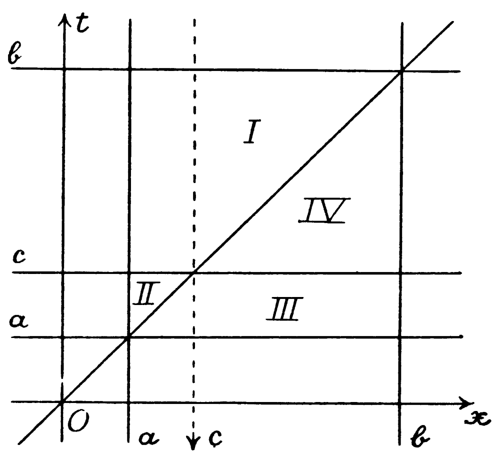
$$(19)_2 \quad k(x,t) = \frac{\varphi(b)-\varphi(x)}{\varphi(b)} [\varphi(t) A(t) - \{t\varphi(t)+\omega(t)\} B(t)] + $$
$$+ \omega(x) B(t) \qquad \text{per } x \geq t .$$

Nel piano (x, t) consideriamo ora il quadrato Q di lati $x=a$, $x=b$; $t=a$, $t=b$; e le quattro regioni in cui esso è diviso dalla bisettrice del primo quadrante e dalla retta $t=c$; propriamente indicheremo ora e nel seguito con I e III i due trapezi formati dai punti (x, t) caratterizzati rispettivamente dalle condizioni

$$x \leq t, \quad c \leq t; \qquad x \geq t, \quad c \geq t$$

e con II e IV i due triangoli caratterizzati rispettivamente dalle relazioni

$$x \leq t, \quad c \geq t; \qquad x \geq t, \quad c \leq t .$$



Se indichiamo con K_{I}, K_{II}, K_{III}, K_{IV}, l'espressione di $K(x, t)$ rispettivamente nelle regioni I, II, III, IV, con semplici calcoli troveremo che posto

$$(20) \quad h = \varphi(c)\,\omega(a) + [\omega(c) - \omega(a)]\,\varphi(b) \qquad [h > 0, \quad \text{cfr. } 5, a)]$$

si ha:

$$\boxed{\begin{aligned}
&(\mathrm{II})_1\quad h\,K_{\mathrm{I}}(x,t)=[\{\omega(c)-\omega(a)\}\varphi(x)-\{\omega(x)-\omega(a)\}\varphi(c)]\times\\
&\times[\{\varphi(b)-\varphi(t)\}\{A(t)-t\,B(t)\}+\omega(t)\,B(t)];\quad x\leq t,\quad c\leq t;\\
&(\mathrm{II})_2\quad hK_{\mathrm{II}}(x,t)=\varphi(x)[\omega(a)\{\varphi(c)-\varphi(b)\}\{A(t)-t\,B(t)\}+\\
&+\omega(c)\{\omega(t)-\omega(a)\}B(t)-\omega(c)\{\varphi(t)-\varphi(b)\}\{A(t)-t\,B(t)]+\\
&\qquad+\{\omega(x)-\omega(a)\}[\{\varphi(c)-\varphi(b)\}\varphi(t)\{A(t)-t\,B(t)\}-\\
&\qquad-\{\omega(t)[\varphi(c)-\varphi(b)]+\varphi(b)\,\omega(c)\}B(t)];\qquad x\leq t,\ c\geq t;\\
&(\mathrm{II})_3\quad h\,K_{\mathrm{III}}(x,t)=[\omega(c)\{\varphi(b)-\varphi(x)\}-\omega(x)\{\varphi(b)-\varphi(c)]\times\\
&\times[\varphi(t)\{A(t)-t\,B(t)\}-\{\omega(t)-\omega(a)\}B(t)];\quad x\geq t,\quad c\geq t;\\
&(\mathrm{II})_4\quad h\,K_{\mathrm{IV}}(x,t)=[\{\omega(a)-\omega(c)\}\{\varphi(b)-\varphi(x)\}-\omega(x)\varphi(c)]\times\\
&\qquad\qquad\times[\{\varphi(b)-\varphi(t)\}\{A(t)-t\,B(t)\}+\omega(t)\,B(t)]+\\
&+h[\{\varphi(b)-\varphi(x)\}\{A(t)-tB(t)\}+\omega(x)B(t)];\quad x\geq t,\ c\leq t.
\end{aligned}}$$

Abbiamo così dimostrato: *condizione necessaria e sufficiente perchè l'equazione*

$$(1)\qquad [\theta(x)\,y'(x)]''+\lambda[A(x)\,y(x)]'+\lambda\,B(x)\,y(x)=0\,,$$

ammetta un integrale $y(x)$, *non identicamente nullo, che si annulli in* a, c, b, *è che ammetta autovalori* (valori eccezionali, parametri) *l'equazione integrale omogenea di seconda specie*

$$(\mathrm{I})\qquad \boxed{y(x)=\lambda\int_a^b K(x,t)\,y(t)\,dt}$$

nella quale il nucleo $K(x,t)$ si esprime colle $(\mathrm{II})_1$, $(\mathrm{II})_2$, $(\mathrm{II})_3$, $(\mathrm{II})_4$, e le funzioni $\varphi(x)$, $\omega(t)$ e la costante h che in queste compariscono sono definite dalle relazioni:

$$(\mathrm{III})_1\ \boxed{\varphi(x)=\int_a^x\frac{dx}{\theta(x)}\,,\quad \omega(t)=\int_t^b\frac{\xi}{\theta(\xi)}d\xi;\quad h=\varphi(c)\omega(a)+[\omega(c)-\omega(a)]\varphi(b).}$$

3. – *a*) Il nostro problema è quindi ricondotto ad esaminare quando il nucleo $K(x, t)$ definito dalle (II) ammette autovalori. Proveremo nel n.° seguente con due esempi che vi sono equazioni che ammettono autovalori reali, altre autovalori complessi, qui vogliamo subito osservare che *le soluzioni linearmente indipendenti della* (1) *corrispondenti ad un medesimo autovalore* λ *sono al più due.*

Sia infatti $y_1(x)$, $y_2(x)$, $y_3(x)$ un sistema fondamentale di integrali della (1) tale che

$$y_1(a) - 1 = y_1'(a) = y_1''(a) = 0\,; \quad y_2(a) = y_2'(a) - 1 = y_2''(a) = 0\,;$$
$$y_3(a) = y'(a) = y_3''(a) - 1 = 0\,;$$

l'integrale generale della (1) è $y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + c_3 y_3(x)$, ($c_1$, c_2, c_3 costanti), e questo si annullerà in a soltanto per $c_1 = 0$, perciò gli eventuali integrali (non identicamente nulli) che si annullano in b e in c si ottengono dalla combinazione lineare $c_2 y_2(x) + c_3 y_3(x)$.

b) Vogliamo ancora osservare che la (I) dice che $\lambda = 0$ *non è autovalore per la* (1).

4. – Esempi. — Sia data l'equazione $y''' + \lambda y' = 0$, e sia $a = 0$, $c = \pi$, $b = 2\pi$.

Abbiamo in questo caso $\theta = 1$, $A = 1$, $B = 0$ e le (II) dànno:

$$K_{\mathrm{I}} = \frac{1}{2\pi^2}\, x\,(x - \pi)\,(2\pi - t)\,, \quad K_{\mathrm{II}} = \frac{1}{\pi}\, x\left(\pi - \frac{3}{2}\, t + \frac{t\,x}{2\pi}\right),$$

$$K_{\mathrm{III}} = \frac{1}{2\pi^2}\,(x - \pi)\,(x - 2\pi)\,t\,,$$

$$K_{\mathrm{IV}} = \frac{1}{2\pi^2}\,(2\pi - x)\,[\pi t - 2\pi x + t x]\,.$$

L'equazione integrale (I) ammette gli autovalori $\lambda = p^2$ con p intero assoluto diverso da zero; se $\lambda = (2m + 1)^2$ la corrispondente soluzione è $y = \operatorname{sen}(2m + 1)x$, se $\lambda = 4m^2$ l'equazione ammette le due soluzioni indipendenti $1 - \cos 2mx$, $\operatorname{sen} 2mx$ [che si annullano in 0, π, 2π].

Questo esempio prova che *se vi sono equazioni che per certi* *autovalori ammettono una soluzione, e per altri autovalori invece due soluzioni linearmente indipendenti.*

b) L'equazione

$$\left[\left(1+\frac{1}{2}\operatorname{sen}^2 x\right)y'\right]''-\lambda\left[y\left(\frac{13}{2}+16\operatorname{sen}x\right)\operatorname{sen}x\right]'+$$
$$+5\lambda y\left(3+16\operatorname{sen}^2 x\right)\cos x=0$$

per $\lambda=\pm$ (unità immaginaria) ammette la soluzione $y=\operatorname{sen}x\pm$ $\pm i\operatorname{sen}^2 x$ la quale si annulla nei tre punti $0,\ \pi,\ 2\pi$.

L'equazione proposta ammette quindi autovalori complessi.

5. - Altra forma del nucleo dell'equazione integrale (I).

Consideriamo le funzioni $H(x)$, $\alpha_1(x)$, $\alpha_3(x)$, $\tau(x,t)$ definite con le relazioni:

$$(\mathrm{III})_2\qquad \boxed{\begin{aligned} H(x)&=\omega(a)\varphi(x)+\omega(x)\varphi(b)-\omega(a)\varphi(b)\\ \alpha_1(x)&=\{\omega(c)-\omega(a)\}\varphi(x)-\{\omega(x)-\omega(a)\}\varphi(c);\\ \alpha_3(x)&=\{\varphi(b)-\varphi(x)\}\omega(c)-\{\varphi(b)-\varphi(c)\}\omega(x);\\ \tau(x,t)&=\{\varphi(x)-\varphi(t)\}\{A(t)-tB(t)\}-\{\omega(x)-\omega(t)\}B(t);\end{aligned}}$$

con semplici sostituzioni nelle (II), si trovano per il nucleo $K(x,t)$ della (I) le espressioni:

$$(\mathrm{IV})\qquad \boxed{\begin{aligned} K_{\mathrm{I}}(x,t)&=\frac{1}{H(c)}\alpha_1(x)\tau(b,t)\\ K_{\mathrm{II}}(x,t)&=\frac{1}{H(c)}\alpha_1(x)\tau(b,t)+\frac{H(x)}{H(c)}\tau(c,t)\\ K_{\mathrm{III}}(x,t)&=-\frac{1}{H(c)}\alpha_3(x)\tau(a,t)\\ K_{\mathrm{IV}}(x,t)&=-\frac{1}{H(c)}\alpha_3(x)\tau(a,t)-\frac{H(x)}{H(c)}\tau(c,t)\end{aligned}}$$

le quali metteno in evidenza che *il nucleo* $K(x,t)$ *ha la forma* *elementare in ciascuna delle regioni* I, II, III, IV, *e si esprime linearmente e omogeneamente per le funzioni* $A(t)$, $B(t)$.

6. - Proprietà delle funzioni $H(x)$, $\alpha_1(x)$, $\alpha_3(x)$, $\tau(x, t)$.

a) Avendosi $H(x) = \omega(a)\varphi(x) + \omega(x)\varphi(b) - \omega(a)\varphi(b)$ ne viene $H(a) = H(b) = 0$.

Abbiamo poi

$$H'(x) = \frac{\omega(a)}{\theta(x)} - \frac{x}{\theta(x)}\varphi(b) = \frac{1}{\theta(x)}\left[\int_a^b \frac{\xi}{\theta(\xi)}d\xi - x\int_a^b \frac{1}{\theta(\xi)}d\xi\right]$$

ed indicando quindi con η un conveniente numero compreso tra a e b

$$H'(x) = \frac{\eta - x}{\theta(x)}\int_a^b \frac{d\xi}{\theta(\xi)}. \qquad (a < \eta < b).$$

Si ha da qui che quando x varia tra a ed η, $H(x)$ è positiva crescente, quando x varia tra η e b, $H(x)$ è positiva decrescente; concludendo abbiamo:

$$\text{(V)}_1 \qquad \boxed{H(a) = 0, \quad H(b) = 0, \quad H(x) > 0 \quad \text{per } a < x < b.}$$

b) Così pure da

$$\alpha_1(x) = \{\omega(c) - \omega(a)\}\varphi(x) - \{\omega(x) - \omega(a)\}\varphi(c)$$

si ricava $\qquad \alpha_1(a) = \alpha_1(c) = 0; \quad \alpha_1(b) = H(c).$

Abbiamo poi:

$$\text{(21)} \qquad \alpha_1'(\xi) = \frac{\omega(c) - \omega(a)}{\theta(\xi)} + \frac{\xi\varphi(c)}{\theta(\xi)} =$$

$$= \frac{\xi}{\theta(\xi)}\int_a^c \frac{dt}{\theta(t)} - \frac{1}{\theta(\xi)}\int_a^c \frac{t}{\theta(t)}dt = \frac{1}{\theta(\xi)}\int_a^c \frac{\xi - t}{\theta(t)}dt.$$

Si ha da qui che per $\xi > c$ è $\alpha_1'(\xi) > 0$ perciò $\alpha_1(\xi)$ nell'intervallo (c, b) è crescente positiva.

Per studiare $\alpha_1(x)$ nell'intervallo (a, c) si osservi che indicando con η_1 un conveniente numero compreso tra a e c si ha dalla (21)

$$\alpha_1'(\xi) = \frac{\xi - \eta_1}{\theta(\xi)} \int_a^c \frac{dt}{\theta(t)},$$

quindi per $a < \xi < \eta_1$ è $\alpha_1'(\xi) < 0$ e $\alpha_1(\xi)$ negativa decrescente; per $\eta_1 < \xi < c$ è $\alpha'(\xi) > 0$ e $\alpha_1(\xi)$ negativa crescente; concludendo abbiamo:

$$(\mathrm{V})_2 \quad \boxed{\begin{array}{c} \alpha_1(a) = \alpha_1(c) = 0 ; \quad \alpha_1(b) = H(c) ; \quad \alpha_1(x) < 0 \\ \text{per } a < x < c ; \quad H(c) > \alpha_1(x) > 0 \quad \text{per} \quad c < x < b . \end{array}}$$

c) In modo analogo si prova per la funzione

$$\alpha_3(x) = \{\varphi(b) - \varphi(x)\}\, \omega(c) - \{\varphi(b) - \varphi(c)\}\, \omega(x)$$

$$(\mathrm{V})_3 \quad \boxed{\begin{array}{c} \alpha_3(a) = H(c), \quad \alpha_3(c) = \alpha_3(b) = 0 ; \quad H(c) > \alpha_3(x) > 0 \\ \text{per} \quad a < x < c ; \quad \alpha_3(x) < 0 \quad \text{per} \quad c < x < b . \end{array}}$$

d) Con semplici sostituzioni si verificano le relazioni:

$$(\mathrm{V})_4 \quad \boxed{\begin{array}{c} H(x) + \alpha_1(x) + \alpha_3(x) = H(c) ; \\ \alpha_1(x)\, \varphi(b) = H(c)\, \varphi(x) - H(x)\, \varphi(c) . \end{array}}$$

e) Per la funzione $\tau(x, t)$ definita dalla relazione

$$\tau(x, t) = \{\varphi(x) - \varphi(t)\}\{A(t) - t B(t)\} - \{\omega(x) - \omega(t)\}\, B(t)$$

si troverà anche:

$$(\mathrm{V})_5 \quad \boxed{\begin{array}{c} \tau(t, t) = 0 , \qquad \alpha_1(x)\, \tau(b, t) + \alpha_3(x)\, \tau(a, t) + \\ + H(x)\, \tau(c, t) = H(c)\, \tau(x, t) . \end{array}}$$

f) Dalle espressioni (IV) del nucleo $K(x, t)$ e dalle (V) si ricava:

$$(\mathrm{V})_6 \quad \boxed{\begin{array}{ll} K(a,t)=K(c,t)=K(b,t)=0 & \text{qualunque sia } t \\ K(x,a)=K(x,b)=0 & \text{qualunque sia } x \end{array}}$$

e le prime mettono bene in evidenza che *una soluzione* $y(x)$ *dell'equazione integrale* (I), *non identicamente nulla, soddisfa le condizioni prescritte*

$$y(a)=y(c)=y(b)=0\ .$$

§ 2. - **Esistenza di autovalori.**

7. - Esistenza di autovalori in un caso particolare.

Sia data l'equazione

$$[\theta(x)\,y'(x)]''+\lambda B(x)\,y(x)=0$$

con $\theta''(x)$, $B(x)$ *funzioni continue,* $\theta(x)<0$ *in* $(\alpha,\ \beta)$ *e siano* a, c, b *punti di* $(\alpha,\ \beta)$, $a<c<b$; *se avviene che il prodotto* $(x-c)\,B(x)$ *senza essere identicamente nullo, non assume valori di segno opposto in* $(a,\ b)$, *esistono allora dei valori del parametro* λ (autovalori) *ai quali corrispondono soluzioni* $y(x)$ *dell'equazione* (22) *non identicamente nulle, che si annullano nei tre punti prefissati* a, c, b.

a) Segno del nucleo nel quadrato Q.

Nel caso in esame il nucleo $K(x,\ t)$ della (I) ha per le (IV) le espressioni:

$$(\mathrm{VI})_1 \qquad K_{\mathrm{I}}(x,t)=\frac{\alpha_1(x)}{H(c)}\Big[\omega(t)-t\,\{\varphi(b)-\varphi(t)\}\Big]B(t)$$

$$(\mathrm{VI})_2 \qquad K_{\mathrm{II}}(x,t)=\left\{\frac{\alpha_1(t)}{H(c)}\Big[\omega(t)-t\,\{\varphi(b)-\varphi(t)\}\Big]-\right.$$

$$\left.-\frac{H(x)}{H(c)}\Big[t\,\{\varphi(c)-\varphi(t)\}+\{\omega(c)-\omega(t)\}\Big]\right\}B(t)$$

$$(\mathrm{VI})_3 \qquad K_{\mathrm{III}}(x,t)=-\frac{\alpha_3(x)}{H(c)}\Big[t\,\varphi(t)+\omega(t)-\omega(a)\Big]B(t)$$

$$(\mathrm{VI})_4 \qquad K_{\mathrm{IV}}(x,t)=\left\{-\frac{\alpha_3(x)}{H(c)}\Big[t\,\varphi(t)+\omega(t)-\omega(a)\Big]+\right.$$

$$+\frac{H(x)}{H(c)}\left[t\{\varphi(c)-\varphi(t)\}+\{\omega(c)-\omega(t)\}\right]\Big\}B(t),$$

e noi vogliamo preliminarmente studiare il segno di $K(x, t)$ nel quadrato Q formato dalle regioni I, II, III, IV.

Per fissare le idee supponiamo

(23) $\quad B(t) \leq 0$ der $t \leq c$; $\quad B(t) \geq 0$ per $t \geq c$

perchè il caso

$$B(t) \geq 0 \text{ per } t \leq c; \qquad B(t) \leq 0 \text{ per } t \geq c$$

si riduce al precedente mutando nella (22) il parametro λ in $-\lambda$.

Proveremo che si ha:

$(\mathrm{VII})_1$ $\quad K(x, t) \geq 0$ per $a \leq x \leq c$ e $a \leq t \leq c$,

oppure $\quad c \leq x \leq b$ e $c \leq t \leq b$;

$(\mathrm{VII})_2$ $\quad K(x, t) \leq 0$ per $a \leq x \leq c$ e $c \leq t \leq b$,

oppure $\quad c \leq x \leq b$ e $a \leq t \leq c$.

Se poniamo infatti

$$F(t) = \omega(t) - t\{\varphi(b) - \varphi(t)\}$$

si ha
$$F'(t) = \varphi(t) - \varphi(b) < 0$$

perciò $F(t)$ è decrescente, ma essendo $F(b) = 0$ ne viene che per tutti i valori di $t < b$ si ha:

$(24)_1$
$$\omega(t) - t\{\varphi(b) - \varphi(t)\} > 0 \qquad (t < b).$$

Da questa e dalle $(\mathrm{V})_1$, $(\mathrm{V})_2$, $(\mathrm{VI})_1$ segue che il nucleo $K(x, t)$ soddisfa le (VII) nella regione I.

Si ha analogamente

$(24)_2$
$$t\varphi(t) + \omega(t) - \omega(a) > 0 \qquad (t > a)$$

qualunque sia $t > a$, e perciò per le $(\mathrm{V})_1$, $(\mathrm{V})_3$, $(\mathrm{VI})_3$ segue che il nucleo $K(x, t)$ soddisfa le (VII) anche nella regione III.

Ci resta ora da provare $K(x, t) \geq 0$ nelle regioni II e IV; noi faremo la dimostrazione per la regione II, gli stessi ragionamenti valgono per la IV.

Essendo nella regione II, $H(c) > 0$, $B(t) < 0$, per verificare $K(x, t) > 0$ occorre per la $(\mathrm{VI})_2$ dimostrare la disuguaglianza

$$F(x,\, t) = \alpha_1(x)\left[\omega(t) - t\,\{\varphi(b) - \varphi(t)\}\right] - \tag{25}$$
$$- H(x)\left[t\,\{\varphi(c) - \varphi(t)\} + \{\omega(c) - \omega(t)\}\right] < 0$$

per

$$a \leq x \leq t \leq c\,.$$

Studiamo allora la $F(x,t)$ quando x, t verificano le (26). Si ha

$$F'_t(x,\, t) = \alpha_1(x)[\varphi(t) - \varphi(b)] + H(x)[\varphi(t) - \varphi(c)]$$

$$F''_{t,t}(x,\, t) = \frac{1}{\theta(t)}[\alpha_1(x) + H(x)] = \frac{1}{\theta(t)}[H(c) - \alpha_3(x)]\,,$$

e da quest'ultima per la $(V)_3$, $F''_{t,t}(x,t) > 0$ qualunque sia x. Ne segue che $F'_t(x,\, t)$ è una funzione crescente con t, quando t varia tra x e c; ma si ha:

$$F'_t(x,\, x) = \alpha_1(x)[\varphi(x) - \varphi(b)] + H(x)[\varphi(x) - \varphi(c)] =$$
$$= \varphi(x)[\alpha_1(x) + H(x)] - \varphi(b)\,\alpha_1(x) - \varphi(c)\,H(c) =$$
$$= \varphi(x)[\alpha_1(x) + H(x)] - H(c)\,\varphi(x) = \varphi(x)[\alpha_1(x) + H(x) - H(c)] =$$
$$= -\alpha_3(x)\,\varphi(x)$$

perciò $F'_t(x,x) < 0$ per $x < c$; è poi $F'_t(x,c) = \alpha_1(x)[\varphi(c) - \varphi(b)] > 0$, quindi $F'_t(x,t)$ quando si assegni ad x un valore minore di c, e t varia tra x e c, si annulla una sola volta in un punto (x, γ) con $x < \gamma < c$; ne viene che $F(x, t)$ quando t varia tra x e γ è decrescente, quanto t varia tra γ e c è crescente, sarà quindi provata la (25) se facciamo vedere che

$$F(x,x) \leq 0\,, \qquad F(x,c) \leq 0\,.$$

E per dimostrare quest'ultime osserviamo che si ha:

$F(x,x)\,\dfrac{B(t)}{H(c)} = K_{\text{III}}(x,x) > 0$ quindi $F(x,x) < 0$; così pure è: $F(x,\, c) = \alpha_1(x)[\omega(c) - c\,\{\varphi(b) - \varphi(c)\}]$, ed essendo $x < c$, per la $(V)_2$ e la (24) segue $F'(x,\, c) < 0$.

Restano così dimostrate le (VII).

b) Le traccie del nucleo $K(x,\, t)$ sono tutte positive.

Vogliamo dimostrare che si ha:

$$\text{(VIII)} \quad A_n = \underbrace{\int_a^b \cdots \int_a^b}_{(n)} K(s_1, s_2)\, K(s_2, s_3) \ldots K(s_n, s_1)\, ds_1\, ds_2 \ldots ds_n > 0\,, \text{[4]}$$

noi faremo anzi vedere che nel quadrato Q si ha:

$$\text{(27)} \qquad K(s_1, s_2)\, K(s_2, s_3) \ldots K(s_n, s_1) \geq 0\,.$$

Per $n = 1$ questa diventa $K(s_1, s_1) \geq 0$ ed è conseguenza della $(\text{VII})_1$.

Supponiamo dunque $n > 1$ e notiamo che se uno dei numeri $s_1, s_2, s_3, \ldots s_n$ è uguale ad a, c, b il prodotto che figura nel primo membro della (27) è nullo a motivo delle relazioni $K(a, t) = K(b, t) = K(c, t) = 0$. [Cfr. $(\text{V})_6$].

Nessuno dei numeri $s_1, s_2, s_3, \ldots, s_n$ sia allora uguale ad a, c, b e verifichiamo che i due prodotti

$$P = K(s_{i-1}, s_i)\, K(s_i, s_{i+1})\,, \qquad \overline{P} = K(s_{i-1}, \overline{s}_i)\, K(\overline{s}_i, s_{i-1})$$

qualunque siano s_i, $\overline{s}_i$ (diversi da a, c, b) hanno lo stesso segno. Ciò è immediato se s_i e $\overline{s}_i$ sono tutti e due insieme minori di c o tutti e due maggiori di c, ci resta da esaminare il caso

$$s_i < c \quad , \quad c < \overline{s}_i\,.$$

I casi possibili sono:

1°) $s_{i-1} < c$, $s_{i+1} < c$; è per le (VII) $P > 0$, $\overline{P} > 0$;

2°) $s_{i-1} < c$, $s_{i+1} > c$; è $P < 0$, $\overline{P} < 0$;

3°) $s_{i-1} > c$, $s_{i+1} < c$; è $P < 0$, $\overline{P} < 0$;

4°) $s_{i-1} > c$, $s_{i+1} > c$; è $P > 0$, $\overline{P} > 0$.

Ne viene che per determinare il segno del prodotto (27), possiamo supporre i numeri $s_2, s_3, \ldots, s_n$ tutti maggiori di c, e siccome in questa ipotesi è $K(s_{i+1}, s_{i+2}) > 0$, ci resta da far vedere che è positivo il prodotto

$$K(s_1, s_2)\, K(s_n, s_1)$$

[4] E. Goursat, *Cours d'Analyse Mathématique* (4ª ed.), T III, p. 374. (Parigi, Gauthier-Villars).

dove $s_2 > c$, $s_n > c$; ma questa circostanza è conseguenza delle (VII).

c) Il nucleo $K(x, t)$ ammette autovalori.

Essendo per la (VIII) tutte le tracce del nucleo $K(x, t)$ positive [basterebbe $A_3 \neq 0$] ne viene per un noto teorema sulle equazioni integrali (5) che esso ammette autovalori; il teorema enunciato è così dimostrato.

8. Autovalori per l'equazione

$$(28) \qquad [\theta(x) . y'(x)]'' + \lambda [A(x)\, y(x)]' + \lambda [B_1(x) + \varepsilon B_2(x)]\, y(x) = 0 .$$

a) Sia data l'equazione (28) ove supponiamo $\theta''(x)$, $A'(x)$, $B_1(x)$, $B_2(x)$ funzioni continue di x in (α, β), $a < c < b$, e la funzione $(x - c)\, B_2(x)$, senza essere identicamente nulla, non assuma valori di segno opposto in (a, b); vogliamo dimostrare che eccettuati al più tre valori della costante ε, esistono valori del parametro λ (autovalori) ai quali corrispondono integrali $y(x)$ dell'equazione (28), non identicamente nulli, che si annullano in a, c, b.

Le soluzioni dell'equazione (28) che soddisfano le condizioni prescritte sono (n.° 1) soluzioni dell'equazione integrale

$$(\mathrm{I}) \qquad y(x) = \lambda \int_a^b K(x, t)\, y(t)\, dt$$

essendo il nucleo $K(x, t)$ definito dalle $(\mathrm{III})_1$, $(\mathrm{III})_2$, e dalle (IV) dei n.i 2 e 5, quando in luogo di $B(t)$ si sostituisca $B_1(x) + \varepsilon B_2(x)$.

Ne viene, a motivo delle (III) e (IV) stesse, che possiamo porre

$$(29) \qquad K(x, t) = K_1(x, t) + \varepsilon K_2(x, t)$$

ove $K_1(x, t)$, $K_2(x, t)$ sono i nuclei delle equazioni integrali ana-

(5) Cfr. E. Goursat, loc. cit. (1). p. 428; oppure G. Vivanti, *Equazioni integrali lineari* (Hoepli, Milano, 1916) p. 168. Il teorema invocato si enuncia: condizione necessaria e sufficiente perchè il nucleo $K(x, t)$ dell'equazione integrale (I) ammetta autovalori è che siano nulle tutte le sue traccie a partire da A_3.

loghe alla (I), cui soddisfano rispettivamente le soluzioni $y(x)$ delle equazioni differenziali

$$[\theta(x)\,y'(x)]'' + \lambda[A(x)\,y(x)]' + \lambda B_1(x)\,y(x) = 0\ ;$$
$$[\theta(x)\,y'(x)]'' + \lambda B_2(x)\,y(x) = 0\ ,$$

che si annullano nei tre punti prefissati $a,\ c,\ b$.

Indicando con A_n, $A_n^{(1)}$, $A_n^{(2)}$ le tracce n^{esime} dei nuclei $K(x,t)$, $K_1(x,t)$, $K_2(x,t)$ è per il teorema del n.° 6 precedente, $A_3^{(2)} > 0$, ed essendo

$$A_3 = A_3^{(1)} + C_1\varepsilon + C_2\varepsilon^2 + A_3^{(2)}\varepsilon^3 \tag{30}$$

con C_1, C_2 costanti indipendenti da ε, ne segue che A_3 può annullarsi al più per tre valori di ε. Esclusi questi valori, per ogni altro ε è $A_3 \neq 0$, e in virtù del teorema citato sulle equazioni integrali, il nucleo $K(x,t)$ ammette autovalori; il teorema enunciato è così dimostrato (6).

b) Condizione necessaria e sufficiente perchè esistano autovalori qualunque sia la costante ε.

Notiamo che sulla funzione $B_1(x)$ noi non abbiamo fatta altra ipotesi che la continuità, e siccome per $\varepsilon = 0$ la (28) diventa:

$$[\theta(x)\,y'(x)]'' + \lambda[A(x)\,y(x)]' + \lambda B_1(x)\,y(x) = 0\ , \tag{IX}$$

ne segue che sarà dimostrata *in generale* l'esistenza di autovalori per la (IX) se si prova che l'equazione integrale (I) anche per $\varepsilon = 0$ ammette autovalori. Il teorema ora dimostrato in a) ci assicura però che per tutti i valori di ε di un intorno circolare del punto $\varepsilon = 0$ e di raggio δ, il valore $\varepsilon = 0$ al più eccettuato la (I) ammette autovalori, o ciò che fa lo stesso abbiamo dimostrato che *il determinante di* FREDHOLM *della* (I), *che indicheremo con* $D(\lambda, \varepsilon)$, *per ogni* ε *tale che sia* $\varepsilon < \delta$, $\varepsilon \neq 0$, *ammette almeno un corrispondente valore di* λ *tale che*

$$D(\lambda, \varepsilon) = 0\ ;$$

dobbiamo quindi far vedere, perchè si possa affermare che sus-

(6) È quasi superfluo osservare che per i tre valori di ε che annullano A_3 si può assicurare che non esistono corrispondenti autovalori ove si dimostri che è ancora $A_4 = A_5 = \ldots = 0$.

siste il teorema in generale, che l'equazione

$$D(\lambda, 0) = 0$$

ammette radici.

Per la continuità di $\theta''(x)$, $A'(x)$, $B_1(x)$, $B_2(x)$ ne viene che il nucleo $K(x, t)$ della (I) che si calcola colle $(\mathrm{III})_1$, $(\mathrm{III})_2$, (IV) è una funzione continua di x e t lineare rispetto ad ε; per risultati noti sulle equazioni integrali segue che il determinante di FREDHOLM della (I), $D(\lambda, \varepsilon)$ è una serie di potenze nelle due variabili λ, ε convergente assolutamente qualunque siano λ ed ε, ed esso avrà la forma

$$D(\lambda, \varepsilon) = D(\lambda, 0) + \varepsilon D_1(\lambda, \varepsilon) \tag{31}$$

ove $D_1(\lambda, \varepsilon)$ è anch'essa una serie di potenze di λ ed ε convergente assolutamente qualunque siano λ ed ε.

Supponiamo che comunque fissato un valore di $\varepsilon \neq 0$ nel cerchio $(0, \delta)$ la radice λ di modulo minimo dell'equazione $D(\lambda, \varepsilon) = 0$ si mantenga inferiore ad un numero finito R [7], ne viene dalla (31) che il modulo della trascendente intera $D(\lambda, 0)$ quando λ varia nel cerchio di centro 0 e raggio R assume valori arbitrariamente piccoli; esistono quindi valori di λ per i quali si ha $D(\lambda, 0) = 0$, e la (IX) ammette autovalori. Inversamente $D(\lambda, 0) = 0$, abbia una radice λ; per il teorema di WEIERSTRASS [8] l'equazione $D(\lambda, \varepsilon) = 0$ quando ε varia in un cerchio $(0, \delta)$ di raggio δ sufficientemente piccolo ammette una radice $\lambda(\varepsilon)$ limitata; concludiamo quindi che *condizione necessaria e sufficiente perchè esistano autovalori per l'equazione* (IX), *senza eccezione, è che per ogni valore di ε in modulo minore di δ e diverso da* 0, *una delle radici dell'equazione* $D(\lambda, \varepsilon) = 0$ [certamente esistente per a)] *si mantenga limitata.*

c) Il teorema di SCHMIDT [9] ci dà un limite inferiore per gli

[7] Fissato ε, la trascendente intera in λ, $D(\lambda, \varepsilon)$ può annullarsi a distanza finita soltanto per un numero finito di valori di λ.

[8] Cfr. L. BIANCHI, *Lezioni sulla teoria delle funzioni di variabile complessa e delle funzioni ellittiche*. Pisa, 1901, p. 197 e segg.

[9] Cfr. E. GOURSAT, loc. cit. [4], pp. 348-49.

autovalori di un'equazione integrale di seconda specie, mentre qui abbiamo bisogno, allo scopo delle nostre ricerche, di maggiorare gli autovalori della (I); questo problema, l'altro di trovare se gli autovalori sono reali o complessi, e l'altro ancora della loro numerazione saranno oggetto di studi ulteriori.

Firenze, R. Università, Novembre 1930