

RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

GIUSEPPE VITALI

Determinazione della superficie ad area minima nello spazio hilbertiano

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 1 (1930), p. 157-163

http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1930__1__157_0

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1930, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*
<http://www.numdam.org/>

DETERMINAZIONE DELLA SUPERFICIE AD AREA MINIMA NELLO SPAZIO HILBERTIANO

(Saggio didattico di GIUSEPPE VITALI)

In questa nota individuo analiticamente tutte le superficie ad area minima dello spazio hilbertiano. I risultati più generali sono contenuti nei numeri 1, 2, 3 e 6.

I numeri 4 e 5 sono dedicati a ritrovare le note formule di WEIERSTRASS per le superficie dello spazio euclideo a tre dimensioni.

1. - Sia

$$f(u_1, u_2; t)$$

la determinante di una superficie, riferita ad un sistema isotermo

Si avrà

$$(1) \quad a_{1,1} = a_{2,2}$$

$$(2) \quad a_{1,2} = 0,$$

e quindi anche

$$(1') \quad a^{1,1} = a^{2,2}$$

$$(2') \quad a^{1,2} = 0.$$

Si ha subito

$$\sum_{r,s} a^{r,s} f_{r,s} = a^{1,1} (f_{1,1} + f_{2,2}),$$

e quindi la condizione perchè la superficie sia ad area minima è data da

$$(3) \quad f_{1,1} + f_{2,2} = 0.$$

Ora

$$f_{1,1} + f_{2,2} = f_{11} + f_{22} + (C_{11}^1 + C_{22}^1) f_1 + (C_{11}^2 + C_{22}^2) f_2.$$

Ma

$$C_{11}^1 + C_{22}^1 = a_{11,1} a^{1,1} + a_{22,1} a^{1,1} = 0,$$

perchè derivando la (2) rispetto ad u_2 e la (1) rispetto ad u_1 si ha

$$a_{12,2} + a_{22,1} = 0$$

$$a_{11,1} = a_{12,2},$$

da cui

$$a_{11,1} + a_{22,1} = 0.$$

Analogamente si ha

$$C_{11}^2 + C_{21}^2 = 0,$$

e la (3) diventa

$$f_{11} + f_{22} = 0.$$

Si ha allora il

TEOR. 1. - Se $f(u_1, u_2; t)$ è la determinante di una superficie riferita ad un suo sistema isoterma, condizione necessaria e sufficiente perchè la superficie sia ad area minima è che la f sia funzione armonica delle u_1, u_2 .

2. - Supponiamo che f sia determinante di una superficie ad area minima riferita ad un sistema isoterma. La f è armonica. Indichiamo con F una sua associata. Poniamo

$$W = \frac{1}{2}(f + iF) \quad \text{e} \quad W_0 = \frac{1}{2}(f - iF).$$

La W è funzione analitica della variabile complessa

$$\tau = u_1 + i u_2,$$

e W_0 è funzione analitica della variabile

$$\tau_0 = u_1 - i u_2.$$

Abbiamo allora

$$f = W(\tau) + W_0(\tau_0).$$

Ma, essendo le linee u_1, u_2 isoterme, le linee τ, τ_0 sono linee di lunghezza nulla, e quindi nel ds^2 devono essere nulli i coefficienti di $d\tau^2$ e di $d\tau_0^2$, ed in particolare deve essere

$$(4) \quad \int_g W'(\tau)^2 dt = 0,$$

dove W' indica derivata di W rispetto a τ .

Evidentemente la (4) è condizione necessaria e sufficiente perchè la

$$(5) \quad f = W(\tau) + W_0(\tau_0)$$

sia determinante di una superficie ad area minima.

Infatti la (4) trascina la

$$\int_g W'_0(\tau_0)^2 dt = 0,$$

e quindi le u_1, u_2 sono coordinate isoterme delle quali la f è funzione armonica.

Si ha così il

TEOR. 2. — Condizione necessaria e sufficiente perchè V sia una superficie ad area minima è che esista una funzione analitica $W(\tau)$, a quadrato sommabile di t in g , soddisfacente alla (4) e per cui la (5) sia una determinante di V .

3. — TEOR. 3. — Se $W(\tau)$ è una funzione analitica e a quadrato sommabile di t in g , soddisfacente alla (4), se inoltre $\varphi(\tau)$ è una funzione analitica indipendente da t , la

$$\Omega(\tau) = \int_g \varphi W'(\tau) d\tau,$$

(l'integrale essendo calcolato a partire da un punto qualunque, ma determinato, del piano complesso) soddisfa alla condizione

$$\int_g \Omega'(\tau)^2 dt = 0,$$

e quindi la

$$\Omega(\tau) + \Omega_0(\tau_0)$$

è determinante di una superficie ad area minima.

Dim. — Infatti

$$\int_g \Omega'(\tau)^2 dt = \varphi^2 \int_g W'(\tau)^2 dt = 0.$$

4. — Supponiamo che W varii in uno spazio euclideo a 3 dimensioni, e che, avendo scelta una terna cartesiana ortogonale

$$\psi_1, \psi_2, \psi_3$$

di riferimento, siano

$$(6) \quad \alpha_1(\tau), \alpha_2(\tau), \alpha_3(\tau)$$

le coordinate di W' rispetto ad essa.

Se la superficie di determinate (5) è ad area minima, dovrà essere

$$(4') \quad \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = 0,$$

perchè in questa relazione si traduce la (4).

Non può essere identicamente

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0,$$

perchè allora W risulterebbe costante rispetto a τ , e la (5) rappresenterebbe un punto.

Dunque in tutti i casi una almeno delle (6) non è identicamente nulla. Supponiamo che α_1 non sia identicamente nulla.

Supposto che il rapporto $\alpha_2:\alpha_1$ sia uguale ad una costante m , per la (4') si avrebbe

$$(1 + m^2)\alpha_1^2 + \alpha_3^2 = 0$$

e quindi anche il rapporto $\alpha_3:\alpha_1$ sarebbe uguale ad un'altra costante n , e si avrebbe

$$W' = \alpha_1(\psi_1 + m\psi_2 + n\psi_3),$$

con $1 + m^2 + n^2 = 0$, ossia

$$W' = \alpha_1(X + iY)$$

dove X ed Y sono due parametri reali.

Consegue che

$$W = \beta(X + iY) + X_1 + iY_1,$$

dove X_1 e Y_1 sono due altri parametri reali, e β è una funzione analitica di τ indipendente da t .

Allora

$$f = X_1 + \beta_1 X - \beta_2 Y,$$

dove β_1 e β_2 sono la parte reale ed il coefficiente dell'immaginario di β .

Si conclude che la superficie che si considera appartiene al piano che passa per il punto X_1 e contiene i parametri X ed Y (non si può pensare che X ed Y siano linearmente dipendenti, perchè allora la f rappresenterebbe un insieme di punti giacenti sopra una retta, e quindi non una superficie).

Supponiamo ora che la superficie che si considera non sia piana; allora il rapporto $\alpha_2:\alpha_1$ è una funzione analitica non costante di τ .

Se

$$\lambda_1(\sigma), \lambda_2(\sigma), \lambda_3(\sigma)$$

sono tre funzioni analitiche di σ , per le quali sia

$$\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = 0,$$

e tali che il rapporto di due di esse non sia costante, esiste una funzione analitica

$$\tau = \tau(\sigma)$$

che soddisfa alla relazione

$$(7) \quad \alpha_2(\tau) : \alpha_1(\tau) = \lambda_2(\sigma) : \lambda_1(\sigma).$$

Allora passando dalla variabile τ alla variabile σ , si ha che le coordinate di $\frac{dW}{d\sigma}$ diventano

$$\beta_i(\sigma) = \alpha_i(\tau(\sigma)) \tau' \quad (i = 1, 2, 3),$$

dove τ' indice la derivata di τ rispetto a σ .

Ora posto

$$\alpha_1(\tau(\sigma)) : \lambda_1(\sigma) = k(\sigma)$$

si ha

$$\beta_1 = k \cdot \lambda_1 \cdot \tau', \quad \beta_2 = k \cdot \lambda_2 \cdot \tau',$$

e, se si tien conto delle relazioni

$$\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2 = 0 \quad \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = 0,$$

si ha

$$\beta_3^2 = (k \cdot \lambda_3 \cdot \tau')^2,$$

da cui

$$\beta_3 = -k \cdot \lambda_3 \cdot \tau',$$

e, posto

$$h(\sigma) = h \cdot \tau',$$

risulta che le coordinate di $\frac{dW}{d\sigma}$ sono

$$h \cdot \lambda_1, \quad h \cdot \lambda_2, \quad \pm h \cdot \lambda_3.$$

Poniamo ora

$$P_1 = \lambda_1 \cdot \psi_1 + \lambda_2 \cdot \psi_2 + \lambda_3 \cdot \psi_3 \quad \text{e} \quad P_2 = \lambda_1 \cdot \psi_1 + \lambda_2 \cdot \psi_2 - \lambda_3 \cdot \psi_3$$

ed abbiamo

$$(8) \quad W(\tau(\sigma)) = \int h \cdot P_1 \cdot d\sigma.$$

oppure

$$(9) \quad W(\tau(\sigma)) = \int h \cdot P_2 \cdot d\sigma.$$

Si ha allora il

TEOR. 4. — Ogni superficie ad area minima, non piana ed appartenente ad uno spazio euclideo a tre dimensioni ha una determinante della forma

$$\Omega(\sigma) + \Omega_0(\sigma_0),$$

dove $\Omega(\sigma)$ è data dal secondo membro di una delle (8) e (9), in cui la h , e le λ sono funzioni analitiche di σ , queste ultime tali che il rapporto di due di esse non sia costante e soddisfacenti alla relazione $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = 0$, e le ψ sono tre parametri normali ed ortogonali assegnati.

5. — Poniamo

$$\lambda_1 = 1 - \sigma^2, \quad \lambda_2 = i(1 + \sigma^2), \quad \lambda_3 = 2\sigma.$$

Queste λ soddisfano alle condizioni richieste nel teor. prec. Inoltre per esse $P_2(-\sigma) = P_1(\sigma)$, ed il teor. prec. diventa il noto

TEOR. di WEIERSTRASS. — Ogni superficie ad area minima, non piana ed appartenente ad uno spazio euclideo a tre dimensioni ha una determinante della forma

$$\Omega(\sigma) + \Omega_0(\sigma_0),$$

dove

$$\Omega(\sigma) = \int h \cdot P \cdot d\sigma,$$

dove h è una funzione analitica di σ e

$$P = (1 - \sigma^2)\psi_1 + i(1 + \sigma_2)\psi_2 + 2\sigma \cdot \psi_3.$$

le ψ formando un sistema normale ed ortogonale assegnato.

6. — In generale la determinazione delle superficie ad area minima si riduce a trovare tutte le funzioni W analitiche di τ e a quadrato sommabile di t , per le quali sia soddisfatta la (4), ossia per cui, essendo

$$\alpha_r \quad (r = 1, 2, 3, \dots)$$

le coordinate rispetto ad un cartesiano ortogonale

$$\psi_r \quad (r = 1, 2, 3, \dots)$$

della W' si abbia

$$\sum_r \alpha_r^2 = 0.$$

Ora basta scegliere delle funzioni analitiche

$$\alpha_2, \alpha_3, \dots$$

in modo che la serie

$$\alpha_2^2 + \alpha_3^2 + \dots$$

converga verso una funzione analitica $\varphi(\tau)$ ⁽¹⁾ e poi prendere $\alpha_1 = \sqrt{-\varphi}$.

Si potrebbero usare considerazioni analoghe a quelle del n. 4 per mostrare che per ogni superficie ad area minima, si può ottenere che due coordinate di W' risultino proporzionali a due funzioni analitiche assegnate.

(1) Per questo basterebbe che la serie

$$\alpha_2^2 + \alpha_3^2 + \dots$$

risultasse convergente uniformemente.