

REVUE DE STATISTIQUE APPLIQUÉE

S. LEDAUPHIN

E. M. QANNARI

M. HANAFI

Détermination et validation d'un tableau compromis en profil sensoriel conventionnel

Revue de statistique appliquée, tome 54, n° 1 (2006), p. 47-60

http://www.numdam.org/item?id=RSA_2006__54_1_47_0

© Société française de statistique, 2006, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « *Revue de statistique appliquée* » (<http://www.sfds.asso.fr/publicat/rsa.htm>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

DÉTERMINATION ET VALIDATION D'UN TABLEAU COMPROMIS EN PROFIL SENSORIEL CONVENTIONNEL

S. LEDAUPHIN, E.M. QANNARI, M. HANAFI

*École Nationale d'Ingénieurs des Techniques des Industries Agricoles et Alimentaires.
Unité de Sensométrie et de Chimiométrie (ENITIAA / INRA).
Rue de la Géraudière, BP 82225
44322 Nantes cedex 03, France*

RÉSUMÉ

Dans le cadre du profil sensoriel à vocabulaire fixé, nous proposons une démarche pour déterminer un tableau moyen robuste en ce sens que les juges marginaux ont un poids faible dans le calcul de ce tableau. La démarche permet également de procurer des indicateurs de performance du jury et de chacun des juges. Des tests d'hypothèses sont également introduits pour valider cette performance.

Mots-clés : indicateurs de performance, tests de permutation, tableau compromis

ABSTRACT

A statistical method for analyzing sensory profiling data obtained by means of fixed vocabulary is discussed. It consists in a procedure for weighted averaging the data sets associated with the assessors taking account of their performance. Useful tools together with a hypothesis testing framework are also outlined in order to assess the significance of the group average configuration and the performance of each assessor.

Keywords : performance, permutation tests, weighted average configuration

1. Introduction

Dans beaucoup de situations, l'utilisateur est intéressé par la détermination d'un compromis pour un ensemble de tableaux de données. Dans le contexte de l'évaluation sensorielle, un jury détermine la nature et le degré des différences organoleptiques entre des produits. L'épreuve du profil sensoriel vise à attribuer des notes d'intensité aux différents produits selon une liste de descripteurs (variables). Il existe deux procédures : profil conventionnel et profil libre (Williams et Langron, 1984). Avec la première, les juges utilisent une liste préétablie de descripteurs afin d'évaluer les produits considérés. Pour les profils libres, les listes de descripteurs ne sont pas nécessairement les mêmes d'un juge à l'autre. Dans les deux cas, la détermination d'un compromis permet d'établir une carte sensorielle des produits ou de relier les aspects organoleptiques aux aspects physico-chimiques ainsi qu'aux

données de préférences... L'épreuve sensorielle de profil conventionnel est de loin la plus répandue et c'est dans ce cadre que nous situons cette étude.

Bien que les juges soient sélectionnés sur la base de leurs aptitudes sensorielles et entraînés pour harmoniser leurs évaluations, la méthode de détermination d'un compromis doit prendre en considération les dérives constatées dans ce genre d'épreuves. En particulier, le centrage de chaque tableau et la multiplication par un facteur d'échelle permettent d'atténuer les variations entre les juges sur le niveau et sur l'étendue des notations. Pour la détermination d'un compromis dans le cadre du profil conventionnel, il est d'usage de calculer une moyenne arithmétique des différents tableaux. Cependant, il faut noter que malgré le centrage et la normalisation des tableaux des différences entre les juges peuvent subsister. Elles sont liées à leurs performances respectives. Afin de tenir compte de cet aspect, nous cherchons à déterminer une moyenne pondérée des différents tableaux en tenant compte de ces performances. En d'autres termes, nous souhaitons associer à un juge qui serait en désaccord avec le reste du panel un poids faible dans le calcul de la moyenne. Cette démarche de pondération est également adoptée dans le cadre de STATIS (Lavit, 1988; Schlich, 1996). Cependant, une critique formulée à la démarche de STATIS tient au fait que deux juges se ressemblent lorsque les distances entre produits perçues par ces deux juges sont similaires alors qu'ils peuvent être en désaccord unidimensionnel sur tous ou une partie des descripteurs. En d'autres termes, la méthode STATIS autorise des rotations entre les configurations des juges, à l'instar de l'analyse de Procruste généralisée (Gower, 1995).

Au-delà de cet aspect statistique consistant à pondérer les configurations des juges conduisant ainsi à une moyenne robuste, il faut souligner que les utilisateurs en évaluation sensorielle sont intéressés par la caractérisation de la performance de chacun des juges et la caractérisation de la performance globale de tout le panel. En s'appuyant sur une procédure proposée par Wakeling *et al.* (1992) dans le cadre de la méthode de Procruste généralisée et par Kazi-Aoual *et al.* (1995) et Schlich (1996) dans le cadre de la méthode STATIS, nous avons mis en place une démarche de validation de la performance des juges et du compromis basée sur des tests de permutations.

2. Matériels et méthodes

2.1. Démarche générale

Dans une épreuve de profil à vocabulaire fixé (profil conventionnel) impliquant m juges, nous désignons par \mathbf{X}_i ($i \in \{1, \dots, m\}$) le tableau associé au juge i . Ce tableau est de dimensions n (nombre de produits) par p (nombre de descripteurs). Dans la suite, nous supposons que les tableaux sont centrés et multipliés par des facteurs d'échelles de manière à avoir la même inertie. De manière précise, nous normalisons le tableau de manière à avoir $trace(\mathbf{X}_i^T \mathbf{X}_i) = 1$.

Entre deux tableaux \mathbf{X}_i et $\mathbf{X}_{i'}$, correspondant respectivement aux configurations des juges i et i' , nous considérons l'indice de similarité suivant :

$$t_{ii'} = \frac{1 + trace(\mathbf{X}_i^T \mathbf{X}_{i'})}{2} \quad (1)$$

Cet indice de similarité est une transformation affine du coefficient de corrélation calculé entre les deux vecteurs de taille $n * p$ obtenus en «vectorisant» les tableaux \mathbf{X}_i et $\mathbf{X}_{i'}$. Du fait du centrage et de la normalisation des tableaux, nous pouvons montrer que cet indice vérifie les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned} 0 &\leq t_{ii'} \leq 1 \\ t_{ii'} &= 1 \quad \text{si } \mathbf{X}_i = \mathbf{X}_{i'} \\ t_{ii'} &= 0 \quad \text{si } \mathbf{X}_i = -\mathbf{X}_{i'} \end{aligned}$$

Soit \mathbf{T} la matrice (de dimension $m * m$) dont l'élément générique est $t_{ii'}$ ($i, i' \in \{1, \dots, m\}$). Soit λ la plus grande valeur propre de \mathbf{T} et β un vecteur propre associé à λ . Comme toutes les entrées de la matrice \mathbf{T} sont positives, les composantes du vecteur β peuvent être choisies de manière à être toutes positives. Nous proposons de normaliser le vecteur β de manière à avoir $\sum_{i=1}^m \beta_i = 1$. En remarquant que pour tout i dans $\{1, \dots, m\}$, nous avons $\sum_{i'=1}^m t_{ii'} \beta_{i'} = \lambda \beta_i$, nous en déduisons que lorsqu'un juge i est globalement en accord avec les autres juges ($t_{ii'}$ grand pour $i' = 1, 2, \dots, m$), le coefficient β_i qui lui est associé est relativement grand et que, inversement, si ce juge est en désaccord avec les autres, le coefficient β_i a tendance à être petit. Le tableau compromis \mathbf{C} que nous considérons est donné par :

$$\mathbf{C} = \frac{\mathbf{C}^*}{\sqrt{\text{trace}(\mathbf{C}^{*T} \mathbf{C}^*)}} \quad \text{où} \quad \mathbf{C}^* = \sum_{i=1}^m \beta_i \mathbf{X}_i \quad (2)$$

Nous avons choisi de normer \mathbf{C} afin qu'il soit dans la même échelle que les tableaux \mathbf{X}_i . Par la suite, nous définissons les coefficients α_i par : $\alpha_i = \text{trace}(\mathbf{X}_i^T \mathbf{C})$. Les coefficients α_i et β_i ($i \in \{1, \dots, m\}$) reflètent le même aspect à savoir l'accord du juge i avec le point de vue global du panel donné par \mathbf{C} . Cependant, les coefficients α_i sont plus facilement manipulables pour la mise en place de tests d'hypothèses. Nous avons les propriétés suivantes :

$$-1 \leq \alpha_i \leq 1$$

$\alpha_i = -1$ si $\mathbf{X}_i = -\mathbf{C}$ ce qui traduit un désaccord total du juge i avec le point de vue global du jury en ce sens que le juge i décrit les produits de manière diamétralement opposée aux autres juges.

$$\alpha_i = 1 \quad \text{si } \mathbf{X}_i = \mathbf{C}.$$

Afin de caractériser la performance globale du jury, nous proposons l'indicateur : $\gamma = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \alpha_i$. L'interprétation de cet indicateur est aisée : plus il est proche de 1, plus les juges sont en accord entre eux.

2.2. Tests d'hypothèses

Dans le paragraphe précédent, nous avons introduit des indicateurs de performance à l'échelle du panel et à l'échelle individuelle pour chacun des juges. Dans ce paragraphe, nous souhaitons aller au-delà de cet aspect descriptif et proposer des tests d'hypothèses pour juger si, à l'échelle globale, le compromis reflète de manière significative un point de vue global des juges. À l'échelle de chaque juge, nous posons une question similaire, à savoir : est-ce que la performance du juge i reflétée par α_i traduit un accord significatif entre le juge i et le tableau compromis? En d'autres termes, α_i et γ devraient être significativement différents de zéro et positifs.

2.2.1. Test de permutations

La démarche est basée sur les tests de permutation. En cela, nous suivons la procédure proposée par Wakeling *et al.* (1992) dans le cadre de la méthode de Procruste généralisée et par Kazi-Aoual *et al.* (1995) et Schlich (1996) dans le cadre de la méthode STATIS. La procédure consiste à faire des simulations sur le tableau \mathbf{X}_i du juge i . Pour cela, nous permutons de manière aléatoire les lignes de ce tableau. Par la suite, nous calculons la valeur $\tilde{\alpha}_i$ de l'accord de ce nouveau tableau avec le compromis \mathbf{C} , déterminé préalablement. Si la valeur observée α_i est plus grande que la majorité des valeurs obtenues à l'issue de l'étude de simulation consistant à permuter de manière aléatoire les lignes du tableau \mathbf{X}_i plusieurs fois (par exemple, 1 000 fois), alors le juge i est considéré comme ayant une contribution significative à la détermination du compromis.

Afin d'établir un test d'hypothèses concernant la signification de la performance globale γ , nous pouvons procéder, comme pour les performances individuelles, à une étude de simulation à l'aide de permutations. De manière plus précise, nous permutons les lignes de chacun des tableaux indépendamment des autres tableaux. Pour chaque simulation ainsi effectuée, nous calculons la valeur $\tilde{\gamma}$ et la décision quant à la signification du compromis est prise sur la base de l'histogramme des valeurs $\tilde{\gamma}$ simulées.

2.2.2. Test alternatif

Le problème de ce type de test basé sur des calculs intensifs réside dans le nombre très important de permutations (plus de 3,6 millions de permutations pour un nombre de produits égal à 10). A l'instar des résultats théoriques concernant les tests de permutations donnés par Kazi-Aoual *et al.* (1995), nous proposons de calculer la moyenne et la variance des valeurs $\tilde{\alpha}_i$ qui seraient obtenues si nous effectuions toutes les permutations. Ceci procure un test alternatif en supposant la normalité de la distribution des $\tilde{\alpha}_i$, ce qui est concevable, particulièrement lorsque le nombre de produits est relativement important. Nous proposons de faire de même en ce qui concerne la performance globale du panel. En désignant par m_i (respectivement, v_i) la moyenne (respectivement, la variance) de toutes les valeurs $\tilde{\alpha}_i$ obtenues après permutations des lignes, nous avons :

$$\begin{cases} m_i &= 0 & (3) \\ v_i &= \frac{1}{n-1} \text{trace}(\mathbf{X}_i^T \mathbf{X}_i \mathbf{C}^T \mathbf{C}) & (4) \end{cases}$$

La démonstration de ces propriétés est renvoyée en annexe. Concrètement, un juge sera décrété comme ayant une contribution significative à la détermination du compromis si la valeur $\frac{\alpha_i}{\sqrt{v_i}}$ dépasse un seuil fixé par l'utilisateur (typiquement, cette valeur seuil est comprise entre 2 et 3). Le même type de démarche s'applique dans le cadre de la performance globale du jury. Nous nous intéressons au calcul de la moyenne m_γ et de la variance v_γ des valeurs $\tilde{\gamma}$ qui seraient obtenues si nous effectuions toutes les permutations. Comme les permutations des tableaux sont effectuées de manière indépendante pour les différents juges, nous avons :

$$\left\{ \begin{array}{l} m_\gamma = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m m_i = 0 \\ v_\gamma = \frac{1}{m^2} \sum_{i=1}^m v_i = \frac{1}{m^2(n-1)} \sum_{i=1}^m \text{trace}(\mathbf{X}_i^T \mathbf{X}_i \mathbf{C}^T \mathbf{C}) \end{array} \right. \quad (5)$$

$$\quad (6)$$

Ainsi, le compromis \mathbf{C} sera décrété significatif si la valeur $\frac{\gamma}{\sqrt{v_\gamma}}$ dépasse un seuil fixé par l'utilisateur.

Il est à noter que le même résultat concernant la moyenne et la variance peut être obtenu si, au lieu d'effectuer des permutations indépendantes pour les différents tableaux, nous faisons subir pour chaque simulation, la même permutation des lignes à tous les tableaux (*cf.* annexe).

3. Application

Nous avons appliqué cette méthode à deux exemples de données afin d'illustrer son intérêt pratique. Dans le premier exemple, nous proposons d'étudier la performance du jury et, par la suite, de caractériser les produits sur la base du tableau compromis. Le premier exemple concerne une dégustation de cidres. Un jury d'analyse sensorielle a été sélectionné par l'ADRIA de Quimper. Le fichier de données est constitué des notations de dix variétés de cidres par sept juges selon dix descripteurs. La liste des descripteurs est consignée dans le tableau 1.

Les résultats concernant la performance des juges et la performance globale du jury sont donnés dans le tableau 2. Les indicateurs de performance sont apparemment satisfaisants. Les poids associés aux différents juges sont de même ordre de grandeur tant et si bien que le compromis qui est déterminé par l'approche discutée dans ce papier est très proche du compromis moyen qui est usuellement calculé dans ce genre d'expériences (moyenne arithmétique). Les tests de permutations et les tests alternatifs présentés dans la figure 1 et dans le tableau 3 confirment la performance du jury. En effet, pour le test de permutations, les proportions de valeurs simulées $\tilde{\alpha}_i$ qui sont plus grandes que les valeurs réellement observées α_i sont inférieures à 1 % (figure 1). Il en est de même pour la proportion des valeurs $\tilde{\gamma}$ au-dessus de la valeur observée γ (figure 1). Pour les tests alternatifs, les valeurs des statistiques de test sont toutes largement supérieures au seuil 3 (tableau 3).

TABLEAU 1
Liste des descripteurs sensoriels

1	intensité de l'odeur
2	savoir sucrée
3	savoir acide
4	savoir amère
5	astringence
6	flaveur suffocante
7	flaveur piquante
8	flaveur d'alcool
9	flaveur parfumée
10	flaveur fruitée

TABLEAU 2
Performance des juges et du jury

Juges	pois β_i	indicateurs de performance α_i
juge 1	0,14	0,78
juge 2	0,15	0,81
juge 3	0,14	0,77
juge 4	0,14	0,76
juge 5	0,14	0,67
juge 6	0,15	0,81
juge 7	0,14	0,76
Jury		indicateur de performance γ
		0,76

TABLEAU 3
Résultats des tests alternatifs pour l'étude sur les cidres

Juges	α_i	m_i	v_i	$\frac{\alpha_i}{\sqrt{v_i}}$
juge 1	0,78	0	0,038	4,0
juge 2	0,81	0	0,043	3,9
juge 3	0,77	0	0,036	4,1
juge 4	0,76	0	0,039	3,8
juge 5	0,67	0	0,039	3,4
juge 6	0,81	0	0,042	3,9
juge 7	0,76	0	0,044	3,7
jury	γ	m_γ	v_γ	$\frac{\gamma}{\sqrt{v_\gamma}}$
	0,76	0	0,034	4,1

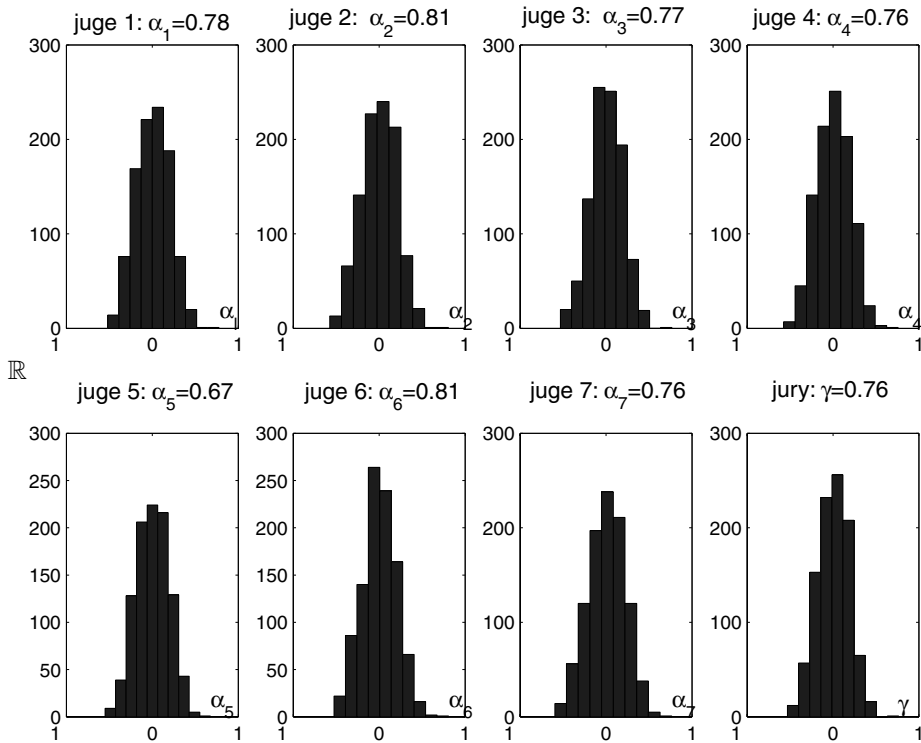


FIGURE 1

Tests de permutations pour la performance de chacun des juges et pour la performance globale du jury : histogrammes des valeurs simulées des indicateurs de performances associés aux sept juges et au panel (nombre de simulations=1000)

Nous avons, par la suite, calculé la matrice compromis C à partir des poids donnés dans le tableau 2. Une analyse en composantes principales effectuée sur ce tableau procure une caractérisation synthétique des produits. Le premier axe qui restitue 70 % de l'inertie oppose les descripteurs flaveur sucrée, fruitée et parfumée, aux descripteurs flaveur d'alcool et astringence (figure 2). Un premier groupe de cidres contenant les cidres 4, 8 et 10 se distingue par des flaveurs fruitée, parfumée et une saveur sucrée. Ce groupe s'oppose à un second groupe formé des cidres 2, 5, 6 et 7 ayant une flaveur d'alcool plus prononcée et une astringence plus forte. Le deuxième axe (18.9 % de l'inertie), singularise le cidre 9 avec une odeur intense et une flaveur suffocante notable.

Afin de souligner l'intérêt de la démarche, nous avons inversé les notes du juge 1 pour certains produits. De ce fait, le juge 1 n'est plus en accord avec les autres juges. Le tableau 4 permet de comparer les résultats concernant la performance du jury pour les données originales et pour les nouvelles données dans lesquelles les notes du juge 1 ont été modifiées. Il apparaît clairement que le poids du juge 1 avec les nouvelles données a nettement baissé. Les tests d'hypothèses basés sur les permutations et sur

les résultats théoriques liés à la moyenne et la variance des valeurs de $\tilde{\alpha}_1$ obtenues par permutation ont confirmé que l'accord du juge 1 avec le reste du panel n'est pas significatif.

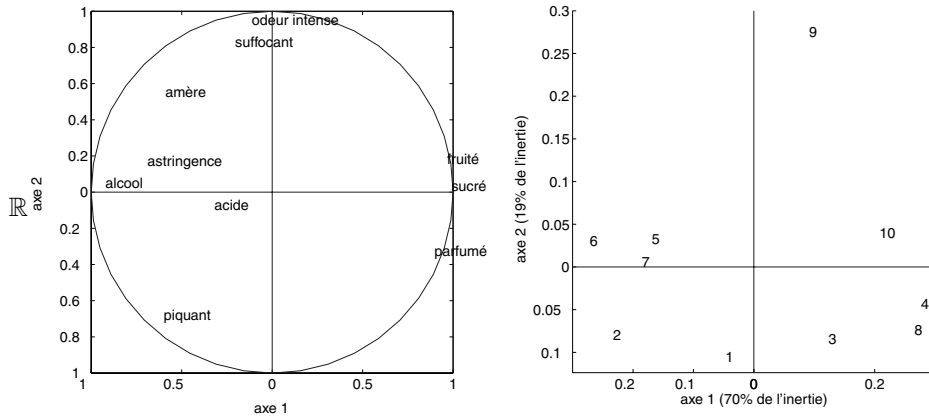


FIGURE 2
Cercle des corrélations et premier plan factoriel

TABLEAU 4
Performances comparées pour les données originales et les données modifiées

Juges	Données originales			Données modifiées		
	Poids β_i	Valeurs α_i	$\frac{\alpha_i}{\sqrt{v_i}}$	Poids β_i	Valeurs α_i	$\frac{\alpha_i}{\sqrt{v_i}}$
Juge 1	0,14	0,78	4,0	0,091	-0,13	-0,7
Juge 2	0,15	0,81	3,9	0,154	0,80	3,9
Juge 3	0,14	0,77	4,1	0,153	0,78	4,1
Juge 4	0,14	0,76	3,8	0,152	0,77	3,9
Juge 5	0,14	0,67	3,4	0,148	0,70	3,6
Juge 6	0,15	0,81	3,9	0,152	0,78	3,9
Juge 7	0,14	0,76	3,7	0,151	0,76	3,7
jury		γ	$\frac{\gamma}{\sqrt{v_\gamma}}$		γ	$\frac{\gamma}{\sqrt{v_\gamma}}$
		0,76	4,1		0,64	4,3

Le tracé des cartes factorielles à partir du compromis des données modifiées est dans une très large mesure similaire à celui des données originales, ce qui corrobore l'idée que le procédé d'obtention du compromis est robuste.

Dans le deuxième exemple, nous avons étudié un cas où le jury n'était pas compétent. Il s'agissait, en effet, d'une étude réalisée par des étudiants qui n'avaient ni expérience ni formation en évaluation sensorielle. Le second fichier de travail est constitué des notations de treize personnes pour cinq types de bière selon quatre descripteurs (saveur amère, goût de levure, saveur fruitée et intensité du goût). Les différents tests ont permis de détecter la performance médiocre du jury. Le tableau 5 présente les résultats du test alternatif. Ainsi l'utilisateur est à même de décider que, pour cette étude, l'analyse sensorielle des produits n'a pas de valeur.

TABLEAU 5

Résultats des tests alternatifs dans l'étude des bières

Juges	α_i	m_i	v_i	$\frac{\alpha_i}{\sqrt{v_i}}$
Juge 1	0,42	0	0,097	1,34
Juge 2	0,31	0	0,129	0,86
Juge 3	0,61	0	0,070	2,30
Juge 4	0,50	0	0,118	1,46
Juge 5	0,45	0	0,102	1,42
Juge 6	0,43	0	0,113	1,29
Juge 7	0,67	0	0,105	2,05
Juge 8	0,60	0	0,105	1,86
Juge 9	0,59	0	0,085	2,01
Juge 10	0,48	0	0,108	1,46
Juge 11	0,72	0	0,117	2,11
Juge 12	-0,05	0	0,111	-0,16
Juge 13	0,65	0	0,129	1,80
jury	γ	m_γ	v_γ	$\frac{\gamma}{\sqrt{v_\gamma}}$
	0,49	0	0,034	2,7

4. Conclusion

La démarche que nous avons développée procure à l'utilisateur des outils qui lui permettent de porter un regard critique sur les données. Elle lui permet également de prendre des décisions telles que la mise à l'écart des données d'un juge non performant ou la mise en place d'un entraînement complémentaire. De plus, le compromis obtenu revêt un caractère robuste. Les tests d'hypothèses sont utiles car ils permettent de mieux étayer les conclusions. Les résultats théoriques concernant les tests de permutations procurent un moyen rapide pour effectuer les tests sans avoir à recourir à l'étude de simulations qui peut s'avérer fastidieuse.

Il faut noter que pour évaluer l'accord entre deux juges i et i' , la démarche d'analyse consiste à confronter les évaluations de ces juges pour chacun des descripteurs. Le coefficient $t_{ii'}$ qui mesure l'accord entre les juges est basé sur une synthèse de ces confrontations. De ce fait, il n'apparaît pas d'équivoque lorsque $t_{ii'}$ est très proche de 0 ou de 1. Cela implique en effet que les juges sont en plein désaccord ($t_{ii'} \simeq 0$) ou en plein accord ($t_{ii'} \simeq 1$) pour tous les descripteurs. En dehors de ces deux cas, la valeur $t_{ii'}$ peut cacher de nombreuses disparités. Nous préconisons, si l'utilisateur souhaite investir l'accord entre les juges de manière détaillée, que la démarche soit appliquée à chacun des descripteurs. Cela revient en définitive à considérer que le tableau associé à chacun des juges est réduit à une seule variable. Il faut souligner que la démarche concernant la détermination d'une moyenne pondérée peut être étendue à d'autres contextes. Par exemple, nous l'avons adaptée au contexte de l'Analyse en Composantes Principales et nous avons pu mettre au point des tests permettant de choisir les variables qui sont significatives pour les différents axes factoriels ou de tester la significativité d'un axe (Ledauphin *et al.*, 2004). Cette démarche a également été adaptée à d'autres méthodes de détermination du compromis telles que la méthode STATIS (Kazi-Aoual *et al.* 1995, Schlich 1996) ou la méthode de Procruste généralisée (Qannari *et al.*, 1999).

Remerciements

Les auteurs remercient P. Schlich pour ses remarques qui ont contribué à améliorer la rédaction du texte.

Annexe

Dans cette annexe, nous démontrons les propriétés concernant les statistiques des tests relatifs à la performance des juges et du panel.

Notations

- $\{e_k, k = 1 \dots n\}$ est la base canonique de \mathbb{R}^n .
- \mathbf{x} est un vecteur colonne dont les composantes dans la base canonique sont $(x_i, i = 1 \dots n)$.

- $\mathbf{1}_n$ est le vecteur colonne dont les composantes dans la base canonique sont $(1, 1, \dots, 1)$.
- $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$ désigne le produit d'Hadamard de \mathbf{x} et \mathbf{y} , c'est un vecteur dont les composantes sont $(x_i y_i, i = 1 \dots n)$.
- $\bar{\mathbf{x}}$ désigne la moyenne du vecteur \mathbf{x} i.e. $\bar{\mathbf{x}} = \frac{1}{n} \mathbf{1}_n^T \mathbf{x}$
- \mathbf{X} est une matrice $[\mathbf{x}_1 | \mathbf{x}_2 | \dots | \mathbf{x}_p]$ de dimension $n * p$ centrée par colonnes.
- \mathbf{C} est une matrice $[\mathbf{c}_1 | \mathbf{c}_2 | \dots | \mathbf{c}_p]$ de dimension $n * p$ centrée par colonnes.
- \wp_n désigne l'ensemble des permutations de $\{1, \dots, n\}$.
- Pour $\sigma \in \wp_n$, $\mathbf{X}_\sigma = [\mathbf{x}_{\sigma,1} | \mathbf{x}_{\sigma,2} | \dots | \mathbf{x}_{\sigma,p}]$ et $\mathbf{x}_{\sigma,j} = (x_{\sigma(1),j}, x_{\sigma(2),j}, \dots, x_{\sigma(n),j})^T$.

Proposition

En désignant par $E(\{\text{trace}(\mathbf{X}_\sigma^T \mathbf{C})\}_{\sigma \in \wp_n})$ (respectivement $E(\{\text{trace}(\mathbf{X}_\sigma^T \mathbf{C})\}^2_{\sigma \in \wp_n})$) la moyenne de toutes les valeurs données par $\text{trace}(\mathbf{X}_\sigma^T \mathbf{C})$ (respectivement $(\text{trace}(\mathbf{X}_\sigma^T \mathbf{C}))^2$) pour $\sigma \in \wp_n$, nous avons :

$$E(\{\text{trace}(\mathbf{X}_\sigma^T \mathbf{C})\}_{\sigma \in \wp_n}) = 0 \tag{A.1}$$

$$E(\{\text{trace}(\mathbf{X}_\sigma^T \mathbf{C})\}^2_{\sigma \in \wp_n}) = \frac{1}{(n-1)} \text{trace}(\mathbf{X}^T \mathbf{X} \mathbf{C}^T \mathbf{C}) \tag{A.2}$$

Afin de démontrer cette proposition, nous énonçons la propriété suivante :
 pour $n > 3$, soit e_i et e_j deux vecteurs distincts de la base canonique et soit \mathbf{a} et \mathbf{b} deux vecteurs de \mathbb{R}^n , nous avons :

$$E(\{\langle \mathbf{a}_\sigma, e_i \rangle \langle \mathbf{b}_\sigma, e_j \rangle\}_{\sigma \in \wp_n}) = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \wp_n} \langle \mathbf{a}_\sigma, e_i \rangle \langle \mathbf{b}_\sigma, e_j \rangle = \frac{n^2 \bar{\mathbf{a}} \bar{\mathbf{b}} - \mathbf{a}^T \mathbf{b}}{n(n-1)}. \tag{A.3}$$

En effet,

$$\frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \wp_n} \langle \mathbf{a}_\sigma, e_i \rangle \langle \mathbf{b}_\sigma, e_j \rangle = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \wp_n} \langle \mathbf{a}, e_{\sigma(i)} \rangle \langle \mathbf{b}, e_{\sigma(j)} \rangle$$

Nous considérons le recouvrement de \wp_n à l'aide des ensembles disjoints $R_{k,h}^{(i,j)}$ ($k, h = 1, \dots, n$ et $k \neq h$), définis par :

$$R_{k,h}^{(i,j)} = \{\sigma \in \wp_n, \sigma(i) = k \text{ et } \sigma(j) = h\}.$$

Nous avons :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \wp_n} \langle \mathbf{a}_\sigma, e_i \rangle \langle \mathbf{b}_\sigma, e_i \rangle &= \frac{1}{n!} \sum_{k=1}^n \sum_{h=1}^n \sum_{\sigma \in R_{k,h}^{(i,j)}} \langle \mathbf{a}, e_{\sigma(i)} \rangle \langle \mathbf{b}, e_{\sigma(j)} \rangle \\
&= \frac{1}{n!} \sum_{k=1}^n \sum_{h=1}^n \sum_{\sigma \in R_{k,h}^{(i,j)}} \langle \mathbf{a}, e_k \rangle \langle \mathbf{b}, e_h \rangle \\
&= \frac{1}{n!} \sum_{k=1}^n \sum_{h=1}^n a_k b_h \sum_{\sigma \in R_{k,h}^{(i,j)}} 1 \\
&= \frac{1}{n!} \sum_{k=1}^n \sum_{h=1}^n a_k b_h \text{card}(R_{k,h}^{(i,j)})
\end{aligned}$$

Or, $\text{card}(R_{k,h}^{(i,j)}) = (n-2)!$, d'où

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \wp_n} \langle \mathbf{a}_\sigma, e_i \rangle \langle \mathbf{b}_\sigma, e_i \rangle &= \frac{1}{n(n-1)} \sum_{k=1}^n \sum_{\substack{h=1 \\ h \neq k}}^n a_k b_h \\
&= \frac{1}{n(n-1)} \left[\sum_{k=1}^n \sum_{h=1}^n a_k b_h - \sum_{k=1}^n a_k b_k \right]
\end{aligned}$$

Il s'ensuit :
$$\frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \wp_n} \langle \mathbf{a}_\sigma, e_i \rangle \langle \mathbf{b}_\sigma, e_j \rangle = \frac{n^2 \bar{\mathbf{a}} \bar{\mathbf{b}} - \mathbf{a}^T \mathbf{b}}{n(n-1)}.$$

On déduit en particulier de (A.3), que si $\mathbf{b} = \mathbf{1}_n$, alors :

$$E(\{\langle \mathbf{a}_\sigma, e_i \rangle \langle \mathbf{b}_\sigma, e_j \rangle\}_{\sigma \in \wp_n}) = \bar{\mathbf{a}} \quad (\text{A.4})$$

La propriété (A.1) de la proposition énoncée ci-dessus est évidente car :

$$\begin{aligned}
E(\{\text{trace}(\mathbf{X}_\sigma^T \mathbf{C})\}_{\sigma \in \wp_n}) &= \sum_{j=1}^p E \left[\left\{ \sum_{i=1}^n \langle \mathbf{x}_{j,\sigma}, e_i \rangle \langle \mathbf{c}_j, e_i \rangle \right\}_{\sigma \in \wp_n} \right] \\
&= \sum_{j=1}^p \sum_{i=1}^n \langle \mathbf{c}_j, e_i \rangle \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \wp_n} \langle \mathbf{x}_{j,\sigma}, e_i \rangle = 0
\end{aligned}$$

en utilisant l'égalité (A.4) avec $\mathbf{a} = \mathbf{x}_j$.

En ce qui concerne la propriété (A.2) de la proposition, nous avons :

$$\begin{aligned} E(\{\text{trace}(\mathbf{X}_\sigma^T \mathbf{C})\}^2)_{\sigma \in \wp_n} &= \sum_{j=1}^p \sum_{k=1}^p E \left[(\mathbf{x}_{j,\sigma}^T \mathbf{c}_j \mathbf{x}_{k,\sigma}^T \mathbf{c}_k)_{\sigma \in \wp_n} \right] \\ &= \sum_{j=1}^p \sum_{k=1}^p \sum_{i=1}^n \sum_{l=1}^n E \left[\{x_{\sigma(i),j} x_{\sigma(l),k}\}_{\sigma \in \wp_n} \right] c_{ij} c_{lk} \end{aligned}$$

Pour $i \neq l$, posons $\mathbf{a} = \mathbf{x}_j$ et $\mathbf{b} = \mathbf{x}_k$, la propriété (A.3) conduit à :

$$E \left[\{x_{\sigma(i),j} x_{\sigma(l),k}\}_{\sigma \in \wp_n} \right] = -\frac{\mathbf{x}_j^T \mathbf{x}_k}{n(n-1)}$$

Pour $i = l$, posons $\mathbf{a} = \mathbf{x}_j, \mathbf{x}_k$, le résultat (A.4) conduit à : $E \left[\{x_{\sigma(i),j} x_{\sigma(i),k}\}_{\sigma \in \wp_n} \right] = \frac{\mathbf{x}_j^T \mathbf{x}_k}{n}$

Par la suite :

$$\begin{aligned} E(\{\text{trace}(\mathbf{X}_\sigma^T \mathbf{C})\}^2)_{\sigma \in \wp_n} &= \sum_{j=1}^p \sum_{k=1}^p \left[\frac{\mathbf{x}_j^T \mathbf{x}_k}{n} \sum_{i=1}^n c_{ij} c_{ik} - \frac{\mathbf{x}_j^T \mathbf{x}_k}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq i}}^n c_{ij} c_{lk} \right] \\ &= \sum_{j=1}^p \sum_{k=1}^p \left[\frac{\mathbf{x}_j^T \mathbf{x}_k \mathbf{c}_j^T \mathbf{c}_k}{n} - \frac{\mathbf{x}_j^T \mathbf{x}_k}{n(n-1)} (-\mathbf{c}_j^T \mathbf{c}_k) \right] \\ &= \sum_{j=1}^p \sum_{k=1}^p \left[\frac{\mathbf{x}_j^T \mathbf{x}_k \mathbf{c}_j^T \mathbf{c}_k}{n-1} \right] \\ &= \frac{1}{(n-1)} \text{trace}(\mathbf{X}^T \mathbf{X} \mathbf{C}^T \mathbf{C}). \end{aligned}$$

Les égalités (3) et (4) concernant la moyenne et la variance des valeurs $\tilde{\alpha}_i$ simulées par permutation des lignes s'obtiennent en remplaçant \mathbf{X} par \mathbf{X}_i dans les égalités (A.1) et (A.2).

Concernant l'indicateur de permutation global γ , nous pouvons remarquer qu'il peut s'écrire également sous la forme $\gamma = \frac{1}{m} \text{trace}(\mathbf{Z}^T \mathbf{D})$ avec $\mathbf{Z} = [\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_m]$ et $\mathbf{D} = [\mathbf{C}, \mathbf{C}, \dots, \mathbf{C}]$ qui sont des matrices de dimension $n \times m \times p$. Si nous appliquons, pour chaque simulation, la même permutation à tous les tableaux, cela revient en définitive à permuter les lignes du tableau \mathbf{Z} . Par application des égalités (A.1) et (A.2) en remplaçant respectivement \mathbf{X} et \mathbf{C} par \mathbf{Z} et \mathbf{D} , nous en déduisons

que la moyenne et la variance de toutes les valeurs $\tilde{\gamma}^*$ obtenues par permutation des lignes sont respectivement données par :

$$\begin{cases} m_{\gamma}^* &= 0 \\ v_{\gamma}^* &= \frac{1}{m^2(n-1)} \text{trace}(\mathbf{Z}^T \mathbf{Z} \mathbf{D}^T \mathbf{D}) \end{cases}$$

Il est facile de voir que ces deux valeurs sont respectivement égales à m_{γ} et v_{γ} (équations (5) et (6)) correspondant à la moyenne et la variance dans le cas où on fait subir des permutations indépendantes d'un tableau à un autre.

Références

- GOWER J.C. (1975), Generalized Procrustes Analysis. *Psychometrika*, **40**, 33-51.
- KAZI-AOUAL F., HITIER S., SABATIER R. & LEBRETON J.D. (1995), Refined approximations to permutation tests for multivariate inference. *Computational statistics & Data Analysis*, **20**, 643-656.
- LAVIT C. (1988), *Analyse conjointe de tableaux quantitatifs*, Masson, Paris.
- LEDAUPHIN S., HANAFI M. & QANNARI E.M. (2004), Simplification and signification of principal components, *Chemometrics and Intelligent Laboratory Systems*, **74(2)**, 277-281.
- QANNARI E.M., MACFIE H.J.H. & COURCOUX P. (1999), Performance indices and isotropic scaling factors in sensory profiling, *Food Quality and Preference*, **10**, 17-21.
- SCHLICH P. (1996), Defining and validating assessor compromises about product distances and attribute correlations, *Multivariate Analysis of Data in Sensory Science*, 259-306. ed. Naes and Risvik, Elsevier.
- WAKELING I., RAATS M.M. & MACFIE H.J.H. (1992), A comparison of consensus tests for Generalised Procrustes Analysis, *Journal of Sensory studies*, **7**, 91-96.
- WILLIAMS A.A. & LANGRON S.P. (1984), The use of free-choice profiling for the evaluation of commercial ports, *Journal of the Science of Food and Agriculture*, **35**, 558-568.