REVUE DE STATISTIQUE APPLIQUÉE

B. SCIBILIA
A. KOBI
R. CHASSAGNON
A. BARREAU

Plans complémentaires et plans imbriqués

Revue de statistique appliquée, tome 49, nº 2 (2001), p. 27-44
<http://www.numdam.org/item?id=RSA_2001__49_2_27_0>

© Société française de statistique, 2001, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Revue de statistique appliquée » (http://www.sfds.asso.fr/publicat/rsa.htm) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Rev. Statistique Appliquée, 2001, **XLIX** (2), 27-44

PLANS COMPLÉMENTAIRES ET PLANS IMBRIQUÉS

B. Scibilia, A. Kobi, R. Chassagnon et A. Barreau

ISTIA/Dpt Qualité et Sûreté de fonctionnement
LASQUO, 62 av. Notre-Dame-du-Lac, 49000 Angers
Kobi@istia.univ-angers.fr

RÉSUMÉ

Dans les plans d'expériences fractionnaires de type 2^{k-p}, les effets sont confondus entre eux. L'expérimentateur ne peut donc pas estimer ces effets séparément, ceci peut parfois rendre l'interprétation des résultats difficile même impossible. Dans cet article, plusieurs approches qui permettent de réduire ce type de risque sont brièvement décrites. Les plans complémentaires sont souvent utilisés pour séparer les effets confondus dans le plan initial. Nous proposons une méthode fondée sur l'utilisation de plans complémentaires et de plans imbriqués afin de résoudre ce type de problèmes. L'objectif est d'obtenir des estimations fiables tout en minimisant le nombre d'essais du plan complémentaire.

Mots-clés : *Plans d'expériences fractionnaires, Confusions, Alias, Plans répliqués inversés, Plans complémentaires de «désaliasage».*

ABSTRACT

In 2^{k-p} fractionary designs of experiments, some effects are confounded with one another. Therefore the experimenter is sometimes unable to estimate the effects separately, this may lead to misinterpretations. In this paper, we briefly review some approaches to minimize the risks that are involved. Follow-up designs are often used to separate the confounded effects. We propose a methodology based on follow-up and overlapping designs to solve this problem. The objective is to obtain reliable estimates while minimizing the size of the follow-up array.

Keywords : *Fractionated designed experiments, Confounding, Aliases, Foldover designs, Follow-up desaliasing designs.*

1. Introduction

Afin de réduire la taille d'un plan d'expérience, on n'effectue la plupart du temps qu'une fraction (plan d'expériences fractionnaire) de l'ensemble des combinaisons possibles. Cependant, dans un tel plan d'expérience fractionnaire, certains effets peuvent être confondus entre eux.

Habituellement, les interactions d'ordre élevé sont moins susceptibles d'avoir un effet significatif que les facteurs principaux, le plan d'expériences doit donc être conçu de telle façon que les interactions d'ordre élevé soient 'aliasées' avec des effets d'ordre moins élevé.

Dans un plan de résolution III, au moins un des facteurs principaux est aliasé avec une interaction entre deux facteurs. Dans un plan de résolution IV, au moins une interaction entre deux facteurs est aliasée avec une autre interaction entre deux facteurs. Les plans de résolution V permettent d'estimer séparément les effets des facteurs principaux ainsi que ceux des interactions entre deux facteurs, en supposant que les interactions entre trois facteurs et plus n'ont pas d'effet réel. Afin de minimiser les risques de confusions entre effets, le degré de résolution d'un plan devrait être maximisé.

Les graphes linéaires publiés par Taguchi (1987) reposent sur l'idée que l'on peut deviner a priori quelles interactions entre deux facteurs auront un effet significatif. En pratique pourtant, il est très difficile de prédire quelles interactions seront actives.

2. Techniques de «désaliasage»

Daniel (1976) a proposé une méthode qui permet de «désaliaser», c'est-à-dire de séparer, les effets des facteurs confondus dans le plan initial grâce à un ou plusieurs plans successifs répliqués inversés (plans pliés).

Il suffit pour cela d'aliaser entre eux les même facteurs qui étaient confondus dans le plan initial mais en inversant leur signe (c'est ce qu'il appelle le principe P-Q en se référant au problème de mesure des poids d'Hadamard).

Lorsqu'un plan de résolution III est répliqué en inversant tous les signes des colonnes affectées aux facteurs principaux, on obtient un plan d'expériences de résolution IV (voir Pillet (1998) et Bullington *et al.* (1990)). Dans le plan initial, les facteurs principaux sont aliasés avec des interactions entre deux facteurs, dans le plan répliqué les niveaux des facteurs principaux sont opposés aux niveaux des interactions entre deux facteurs, avec lesquelles ces facteurs principaux étaient aliasés dans le plan initial.

En assemblant les diverses fractions du plan complet, il est aisé d'augmenter graduellement la résolution du plan d'expériences. La limite principale de cette approche est que la fraction supplémentaire a la même taille que la fraction initiale alors que bien souvent il est nécessaire de ne désaliaser que quelques effets entre eux.

Daniel (1976) Barker (1994) et Box, Hunter & Hunter (1978) ont présenté des plans complémentaires de quatre essais seulement qui permettent de détecter les interactions actives dans une chaîne d'alias, lorsque le nombre de contrastes actifs qui contiennent des chaînes d'alias n'est pas trop important, c'est certainement la démarche la plus appropriée et la plus économique.

Lorsque des plans très fractionnés sont effectués, deux principes sont souvent utilisés pour déterminer à laquelle des actions est dû l'effet mesuré :

• Principe d'hérédité

Lorsque plusieurs interactions sont confondues entre elles, les interactions actives sont le plus souvent celles qui associent plusieurs facteurs principaux qui ont eux même un effet réel. En effet une inversion de l'effet d'un facteur lorsque le niveau d'un autre facteur avec lequel ce premier facteur interagit est un phénomène plutôt rare.

• Principe de Pareto (ou principe de «parsimonie»)

Souvent, à l'issue d'un plan de criblage pas plus de 10 % à 30 % des effets sont réels. Lorsque la proportion des facteurs actifs est faible, Box et Tyssedal (1996) démontrent qu'en éliminant les facteurs inertes du plan fractionnaire, on peut obtenir un plan de résolution plus élevée (parfois même un plan complet répliqué une ou plusieurs fois). Il s'agit de «projeter» le plan de criblage en un plan de taille inférieure et de résolution supérieure.

2.1. Plans Plackett et Burman non géométriques

Dans les cas où les effets des facteurs principaux sont dominants, les plans Plackett et Burman (P&B) dont le nombre d'essais n'est pas une puissance du nombre deux (plans L12, L24 etc..) sont très efficaces. Cependant, lorsque plusieurs interactions sont susceptibles d'avoir un effet significatif, à cause des structures de confusions partielles complexes, ce type de plan peut conduire à des erreurs. Les effets des facteurs principaux et des interactions entre deux facteurs sont corrélés (le degré de corrélation est de ± 0.33 pour un plan P&B en douze essais). Il arrive parfois que les effets des interactions entre deux facteurs se cumulent dans certaines colonnes, à cause de cela, soit les effets des facteurs actifs sont biaisés soit certains facteurs inertes peuvent sembler avoir un effet réel.

2.2. Effet Bloc

Lorsqu'il est nécessaire de désaliaser deux effets, deux à trois essais supplémentaires sont souvent suffisants (Montgomery *et al.* (1997)). Alors que les signes des effets confondus sont les mêmes dans le plan initial fractionnaire, ils devraient être opposés dans les essais supplémentaires afin de pouvoir estimer leurs effets séparément. Cependant un changement des conditions expérimentales ou environnementales entre la première et la seconde série d'essais risque de biaiser l'analyse de ces essais. La plupart des processus sont soumis à des variations plus ou moins cycliques. Pour cette raison, le plan supplémentaire devrait idéalement être insensible à l'effet bloc. Dans le plan supplémentaire, les colonnes des effets à désaliaser devraient donc être orthogonales à la colonne bloc (qui correspond à la colonne identité de chacun des plans).

2.3. Un cas d'application : Un plan de type L8 de résolution IV

L'objectif de ce plan d'expériences (voir Johnson *et al.* (1989)) est d'augmenter la résistance à la rupture d'un produit textile fabriqué à l'aide d'un processus de tissage à grande vitesse. Afin de pouvoir estimer les effets de quatre facteurs un plan fractionnaire 2^{4-1} de résolution IV (une demi-fraction du plan complet) a été utilisé. Le facteur D a été affecté à la colonne qui représente l'effet de l'interaction ABC.

A l'issue de ce plan, les effets des facteurs A et C et de $AB + CD$ ainsi que de $BC + AD$ apparaissent comme étant actifs. A cause des confusions entre AB et CD ainsi qu'entre BC et AD il n'était pas possible d'identifier les interactions actives.

Les expérimentateurs décidèrent alors d'effectuer la seconde demi-fraction du plan complet afin de pouvoir désaliaser les interactions confondues.

TABLE 1
Plan initial de résolution IV

Données	D	C	$CD+AB$	B	$BD+AC$	$BC+AD$	A
24,50	-1	-1	1	-1	1	1	-1
25,00	-1	-1	1	1	-1	-1	1
24,51	-1	1	-1	-1	1	-1	1
24,68	-1	1	-1	1	-1	1	-1
22,05	1	-1	-1	-1	-1	1	1
24,52	1	-1	-1	1	1	-1	-1
25,68	1	1	1	-1	-1	-1	-1
24,23	1	1	1	1	1	1	1
Effets	$-0,28$	$0,38$	$0,46$	$0,21$	$0,04$	$-0,53$	$-0,45$

TABLE 2
Plan complet 2^4

Données	D	C	CD	B	BD	BC	CBD	A	AD	AC	ACD	AB	ABD	ABC	$ABCD$
24,50	-1	-1	1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	1
23,55	-1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1
25,98	-1	-1	1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1
25,00	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1
24,63	-1	1	-1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1
24,51	-1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1
24,68	-1	1	-1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1
23,93	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1
23,73	1	-1	-1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1
22,05	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1
24,52	1	-1	-1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1
23,64	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1
25,68	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1
25,78	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1
24,10	1	1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
24,23	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Effets	-0,19	0,29	0,45	0,10	-0,20	-0,56	-0,13	-0,32	0,03	0,24	0,10	0,01	0,09	-0,10	-0,01

L'analyse des résultats indique que BC et CD sont actifs (AD et AB ne le sont pas). En regroupant toutes les interactions entre trois facteurs et plus afin d'obtenir une estimation de la variabilité résiduelle, il ressort que D est statistiquement significatif alors que B ne l'est pas.

3. Plans complémentaires en quatre essais

Réduire au minimum la taille du plan d'expériences complémentaire est une nécessité dans de nombreux cas. Nous présentons une méthode de désaliasage qui ne nécessite que quatre essais. Nous proposons d'effectuer un plan complémentaire fractionnaire de type 2^{3-1} sur les facteurs A, B, C, le facteur D étant figé à 1. Il ne s'agit pas d'un plan 2^{3-1} standard, en effet, les signes de la colonne d'un des facteurs, (C par exemple) sont systématiquement modifiés afin que les interactions dans chaque chaîne d'alias soient de signe opposé. De cette façon, dans le plan complémentaire, toutes les interactions qui contiennent le facteur dont les signes ont été inversés (dans ce cas, C) sont opposées aux autres interactions.

Les informations obtenues à l'aide du premier plan sont utilisées pour désaliaser les effets confondus.

Dans le plan initial, les contrastes $AB + CD$ et $BC + AD$ représentent les sommes des effets aliasés. Dans le plan complémentaire, les signes de AB et CD; de BC et AD sont opposés; on estime donc les différences entre les effets des interactions aliasées ($AB - CD$ et $AD - BC$).

En combinant les résultats du plan complémentaire avec ceux du plan initial, il devient possible à l'aide, de calculs simples, d'estimer séparément les effets qui étaient confondus dans le plan initial. L'effet bloc ne biaise pas ces calculs, puisque toutes les colonnes du plan complémentaire qui ont été affectées aux interactions à désaliaser sont orthogonales à la colonne bloc.

Le choix de figer le facteur D au cours des essais complémentaires, plutôt qu'un autre facteur, est lié au fait que dans le plan initial, les expérimentateurs ont préféré modifier les niveaux de D moins souvent que ceux des autres facteurs, probablement parce que le niveau de D est plus difficile et/ou coûteux à modifier. D'autre part, il est bien connu que l'estimation de l'effet du facteur dont les niveaux sont modifiés moins souvent (ici, D) est moins précise, que celles des facteurs dont les niveaux sont modifiés plus souvent, à cause de l'influence éventuelle de variations cycliques. Dans la suite, nous montrons que les estimations des effets des facteurs jouent un rôle important dans le calcul des effets des interactions à désaliaser. Au cours des essais complémentaires, on a donc intérêt à figer le niveau de D afin que les imprécisions sur l'estimation de l'effet de D ne puissent pas biaiser les résultats des calculs.

Le plan complémentaire proposé est le suivant : voir tableau ci-après.

Tous ces essais ont été extraits de la seconde demi-fraction du plan d'expérience complet. Il est possible de changer les signes des facteurs du plan complémentaire dans une ou plusieurs lignes sans modifier le signe des interactions.

C n'est pas orthogonal à $AB - CD$ et A n'est pas orthogonal à $BC - AD$, ainsi $-0{,}62$ correspond en réalité, à une estimation des effets de $AB - CD - C$

TABLE 3
Plan complémentaire proposé

Données	A	B	C	D	$AB-CD$	$BC-AD$
23,64	1	1	-1	1	1	-1
25,78	1	-1	1	1	-1	-1
24,10	-1	1	1	1	-1	1
23,73	-1	-1	-1	1	1	1
Effets					$-0,62$	$-0,39$

et $-0{,}39$ à une estimation de $BC-AD-A$. Tous les autres facteurs sont maintenus à un niveau constant.

Résolution des systèmes d'équations :

Plan initial : $AB+CD=0,46$ et $C=0,38$

Plan complémentaire : $AB-CD-C=-0,62$

On en déduit $(AB+CD)+C+(AB-CD-C)=2AB=0,22$

$AB=0,11$ et $CD=0,35$

On peut en conclure que CD est actif alors que AB ne l'est pas.

Plan initial : $BC+AD=-0,53$ et $A=-0,45$

Plan complémentaire : $BC-AD-A=-0,39$

On en déduit $(BC+AD)+A+(BC-AD-A)=2BC=-1,37$

$BC=-0,685$ et $AD=0,155$

BC est actif alors que AD ne l'est pas.

3.1. Robustesse aux erreurs quant aux estimations initiales des effets

Les estimations des effets de certains facteurs actifs (A et C), issues du plan initial, interviennent donc dans le calcul des effets des interactions à désaliaser. Les estimations fournies par le plan complémentaire risquent d'être biaisées par des erreurs quant aux estimations des effets de certains facteurs à partir du plan initial. Par exemple, l'effet de C estimé à partir du plan initial de 0,38, alors que dans le plan complet l'estimation est de 0,29. Il est donc probable que l'effet de C dans le plan initial est surestimé, et puisque dans le plan complémentaire, C est totalement confondu avec $AB-CD$, ceci implique que l'effet de CD est très probablement sous-estimé.

En utilisant l'estimation de l'effet de C issue du plan complet : 0,29 plutôt que celle issue du plan fractionnaire initial : 0,38, on obtiendrait, en résolvant le système d'équations, une valeur de l'effet de CD de : 0,395 (donc plus proche de celle issue du plan complet : 0,45) plutôt que : 0,35. De même, l'estimation de l'effet de A à

partir de la fraction initiale est de $-0{,}45$, une estimation plus précise à l'aide du plan complet indique que l'effet de A est probablement plus proche de $-0{,}32$. Puisque l'effet de A est sans doute surestimé dans le plan initial et que A est confondu avec $BC - AD$, la valeur calculée de l'effet de BC est probablement surestimée. En utilisant l'estimation de l'effet de A issue du plan complet : $-0{,}32$ plutôt que celle issue du plan initial : $-0{,}45$, on obtiendrait, à la suite des calculs, une estimation de l'effet de BC de : $-0{,}62$ (plus proche de celle issue du plan complet : $-0{,}56$) plutôt que : $-0{,}685$.

Calcul de la précision sur l'erreur des coefficients :

$V(y)$: variance des données expérimentales.

$V(y)/8$: variance des coefficients issus du plan initial en huit essais.

$V(y)/4$: variance des coefficients issus du plan complémentaire en quatre essais.

$V[(AB+CD)+C+(AB-CD-C)] = V(2AB) = V(y)/8+V(y)/8+V(y)/4 = V(y)/2$

$V(AB) = V(y)/8$

$V[(BC+AD)+A+(BC-AD-A)] = V(2BC) = V(y)/8+V(y)/8+V(y)/4 = V(y)/2$

$V(BC) = V(y)/8$

Malgré le nombre réduit d'essais du plan complémentaire et l'influence de la variabilité des estimations (à partir du plan initial) des effets de certains facteurs, le degré de précision sur les coefficients des interactions désaliasées est relativement élevé. Dans la suite de cet article, nous présentons une méthode qui permet d'améliorer encore le degré de précision des estimations des interactions désaliasées.

4. Une solution robuste : les plans imbriqués

La principale limite de la méthode présentée ci-dessus est sa sensibilité quant aux inexactitudes concernant les estimations des effets des facteurs principaux obtenues à partir du plan initial. La méthode des « plans imbriqués » permet de résoudre ce type de problèmes. Il s'agit de combiner le plan complémentaire avec chaque demi-fraction du plan initial, successivement, de cette façon, il n'est plus nécessaire de tenir compte des effets de certains facteurs pour calculer les effets des interactions à désaliaser. En imbriquant le plan complémentaire avec une fraction du plan initial, il est possible d'éviter que les effets à désaliaser soient confondus avec d'autres effets déjà estimés à l'aide du plan initial.

4.1. Réanalyse du plan d'expérience

Nous reconsidérons le plan initial de résolution IV décrit précédemment. Afin de désaliaser les deux paires d'interactions confondues, un plan complémentaire 2^{3-1} dans lequel les signes des colonnes des interactions à désaliaser sont opposés, est utilisé.

Cependant, la principale différence avec la méthode décrite ci-dessus est que le plan L8 initial est divisé en deux demi-fractions. Un des facteurs, par exemple le facteur B, est utilisé pour diviser le plan initial en deux parties. Ces deux demi-fractions ont la même dimension (quatre essais) que le plan complémentaire. L'objectif de cette démarche est qu'en assemblant la première demi-fraction du plan initial au plan complémentaire puis la deuxième demi-fraction du L8 au plan complémentaire, on puisse estimer séparément les effets des interactions qui étaient confondues deux à deux dans le plan initial.

Choix du plan complémentaire

Afin d'élaborer ce plan complémentaire, il est possible de répliquer la première ou la deuxième demi-fraction du plan initial L8, en inversant les signes d'un seul des facteurs principaux (par exemple C). Dans le plan complémentaire, les signes de toutes les interactions auxquelles le facteur dont les signes ont été inversés participe, sont opposés aux signes des interactions restantes.

Générateurs d'alias

1ère fraction du plan initial $I = B = ABCD = ACD$

2de fraction du plan initial $I = -B = ABCD = -ACD$

Plan complémentaire $I = B = -ABCD = -ACD$

TABLE 4
Plan initial de résolution IV

Données	A	B	C	D	$AB + CD$	$AD + BC$	$BD + AC$
24,23	1	1	1	1	1	1	1
25,00	1	1	−1	−1	1	−1	−1
24,68	−1	1	1	−1	−1	1	−1
24,52	−1	1	−1	1	−1	−1	1
24,51	1	−1	1	−1	−1	−1	1
22,05	1	−1	−1	1	−1	1	−1
25,68	−1	−1	1	1	1	−1	−1
24,50	−1	−1	−1	−1	1	1	1
Effets	$-0,45$	$0,21$	$0,38$	$-0,28$	$0,46$	$-0,53$	$0,04$

Dans le plan complémentaire, une demi-fraction du plan initial est répliquée avec pour seule différence le fait que les signes de la colonne C sont inversés. Notez que l'on aurait pu tout aussi bien décider d'inverser les signes d'un autre facteur que C. Si l'on combine la première demi-fraction du plan L8 initial avec le plan complémentaire, on obtient un nouveau plan orthogonal en huit essais dans lequel les interactions CD, CA et AD ne sont pas confondues avec d'autres interactions,

TABLE 5
Plan complémentaire

A	B	C	D	Données
1	1	−1	1	23,64
1	1	1	−1	23,93
−1	1	−1	−1	25,98
−1	1	1	1	24,10

par contre les interactions AB, BC et BD sont confondues respectivement avec les facteurs A, C et D.

Il est aussi possible d'estimer l'effet bloc séparément (la moyenne des essais du plan initial-la moyenne des essais du plan complémentaire). L'estimation de l'effet bloc est de −0,0975, il s'agit donc d'un effet de très faible intensité.

TABLE 6
1er plan imbriqué

Données	$A+AB$	B	$C+BC$	$D+BD$	CD	AD	AC
24,23	1	1	1	1	1	1	1
25,00	1	1	−1	−1	1	−1	−1
24,68	−1	1	1	−1	−1	1	−1
24,52	−1	1	−1	1	−1	−1	1
23,64	1	1	−1	1	−1	1	−1
23,93	1	1	1	−1	−1	−1	1
25,98	−1	1	−1	−1	1	1	1
24,10	−1	1	1	1	1	−1	−1
Effets	$-0,31$	$24,51$	$-0,27$	$-0,39$	$0,32$	$0,12$	$0,15$

Pour obtenir le plan de la table 6, les quatre premières lignes du plan initial ont été combinées avec le plan complémentaire. L'interaction CD est probablement active.

Si l'on combine le plan complémentaire 2^{3-1} avec la deuxième fraction du plan L8, on obtient un second plan L8 «imbriqué» dans lequel les effets estimés des interactions AB, BC et BD ne sont pas confondus avec les effets d'autres actions, alors que les effets de CD, AC et AD sont confondus respectivement avec les effets des facteurs A, D et C. L'effet de B est confondu avec l'effet bloc.

Pour le plan de la table 7, les quatre dernières lignes du plan initial sont combinées avec le plan complémentaire. On peut remarquer que l'interaction BC est certainement active.

TABLE 7
2ème plan imbriqué

Données	$A-CD$	B	$C-AD$	$D-AC$	AB	BC	BD
24,51	1	-1	1	-1	-1	-1	1
22,05	1	-1	-1	1	-1	1	-1
25,68	-1	-1	1	1	1	-1	-1
24,50	-1	-1	-1	-1	1	1	1
23,64	1	1	-1	1	1	-1	1
23,93	1	1	1	-1	1	1	-1
25,98	-1	1	-1	-1	-1	-1	-1
24,10	-1	1	1	1	-1	1	1
Effets	$-0,77$	$0,11$	$0,26$	$-0,43$	$0,14$	$-0,65$	$-0,11$

Le plan initial permet d'estimer séparément les effets des quatre facteurs principaux, la combinaison du plan complémentaire et des quatre premières lignes du plan initial permet d'obtenir les estimations non biaisées (par des confusions entre effets) de trois interactions ainsi que l'effet bloc, la combinaison du plan complémentaire avec les quatre dernières lignes du plan initial permet d'estimer séparément les trois interactions restantes.

L'avantage de cette méthode est qu'il est possible d'améliorer la précision des estimations des effets en réutilisant les résultats des deux plans imbriqués et du plan initial (c'est-à-dire en prenant en compte l'ensemble des douze essais). Par exemple, l'estimation de l'effet de BC à partir du 2nd plan imbriqué est de $-0{,}65$, il apparaît dans le 1er plan imbriqué que AD n'est probablement pas actif puisque son effet est très faible (0,12).

Dans le 1er plan imbriqué $C + BC = -0,27$, dans le plan initial $C = 0,38$ et $BC + AD = -0,53$. On en déduit : $BC + (C + BC) - C + (AD + BC) = 3BC = -1,83$, d'où $BC = -0,61$.

L'estimation de l'effet de BC obtenue à l'aide de cette équation se rapproche ainsi de celle obtenue grâce au plan complet 2^4 ($-0{,}56$).

4.2. Influence des interactions entre le facteur bloc et les autres facteurs

Le facteur bloc sert à neutraliser l'influence des variations à plus long terme (cycliques ou non), qui sont dues aux fluctuations de l'environnement. Ces facteurs environnementaux peuvent aussi interagir avec les facteurs étudiés. Ceci risque de compliquer l'analyse des résultats des plans imbriqués. L'hypothèse couramment adoptée selon laquelle les facteurs blocs n'interagissent pas avec les facteurs étudiés, n'est pas toujours réaliste. Lorsque l'effet bloc n'est pas important, on peut à juste titre, ignorer ses interactions avec les facteurs étudiés. L'expérimentateur a intérêt à

effectuer le plan d'expériences complémentaire dans des conditions qui ne soient pas trop dissemblables à celles du plan initial de façon à ce que l'effet bloc ne soit pas trop important et que par conséquent les interactions avec les autres facteurs puissent être ignorées.

4.3. Plan initial de type L16 et de résolution IV

Considérons un plan initial de type L16 de résolution IV (voir la table 8). Sept facteurs, A, H, I, K, E, C et F ont été affectés aux colonnes impaires du plan. Supposons que l'on désire désaliaser les interactions HC et FI ainsi que KE et AI afin de lever toute ambiguïté quant aux effets réels de ces interactions. Dans le plan complémentaire en quatre essais qui est proposé (table 9) les signes de l'interaction HC sont opposés à ceux de FI, et les signes de l'interaction KE sont opposés à ceux de AI.

Puisque dans le plan complémentaire, les facteurs sont groupés de façon à limiter le nombre d'essais à quatre, les facteurs devraient être groupés de la même façon dans le plan initial. On ne peut donc utiliser que les fractions du plan initial pour lesquelles les facteurs sont regroupés comme désiré. Dans le troisième ainsi que dans le premier quart du plan initial, H et K, C et A, F et E sont totalement confondus deux à deux, il s'agit donc de groupes de facteurs.

TABLE 8
Plan initial L16 de résolution IV

H		K		C		A		F		E		I			
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1er quart
1	1	1	1	1	1	1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	du plan
1	1	1	−1	−1	−1	−1	1	1	1	1	−1	−1	−1	−1	
1	1	1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	1	1	1	1	
1	−1	−1	1	1	−1	−1	1	1	−1	−1	1	1	−1	−1	2ème quart
1	−1	−1	1	1	−1	−1	−1	−1	1	1	−1	−1	1	1	du plan
1	−1	−1	−1	−1	1	1	1	1	−1	−1	−1	−1	1	1	
1	−1	−1	−1	−1	1	1	−1	−1	1	1	1	1	−1	−1	
−1	1	−1	1	−1	1	−1	1	−1	1	−1	1	−1	1	−1	3ème quart
−1	1	−1	1	−1	1	−1	−1	1	−1	1	−1	1	−1	1	du plan
−1	1	−1	−1	1	−1	1	1	−1	1	−1	−1	1	−1	1	
−1	1	−1	−1	1	−1	1	−1	1	−1	1	1	−1	1	−1	
−1	−1	1	1	−1	−1	1	1	−1	−1	1	1	−1	−1	1	4ème quart
−1	−1	1	1	−1	−1	1	−1	1	1	−1	−1	1	1	−1	du plan
−1	−1	1	−1	1	1	−1	1	−1	−1	1	−1	1	1	−1	
−1	−1	1	−1	1	1	−1	−1	1	1	−1	1	−1	−1	1	

On utilise les facteurs H et K (ainsi que l'interaction HK) pour diviser le plan initial en quatre parties. On aurait pu utiliser d'autres couples de facteurs. L'unique contrainte est que les interactions à désaliaser ne peuvent pas être utilisées pour diviser le plan initial en quarts de plan.

Plan complémentaire choisi

Dans le plan complémentaire les facteurs H et K ; C et A ; F et E sont regroupés.

TABLE 9
Plan complémentaire

H	C	F		HC	FI	KE	AI
K	A	E	I				
1	1	1	−1	1	−1	1	−1
1	1	−1	1	1	−1	−1	1
1	−1	1	1	−1	1	1	−1
1	−1	−1	−1	−1	1	−1	1

Il s'agit d'une réplique du premier quart du plan initial avec pour seule différence le fait que les signes dans la colonne I ont été inversés. Les signes de HC et de FI (ainsi que ceux de KE et AI) sont opposés. H et K, C et A, F et E sont totalement confondus deux à deux. On aurait tout aussi bien pu inverser les signes de C et de K afin que les interactions HC et FI ainsi que KE et AI soient de signe opposé.

On peut alors combiner le premier quart du plan initial avec le plan complémentaire afin d'obtenir le premier plan imbriqué, puis le troisième quart du plan initial avec le plan complémentaire afin d'obtenir le second plan imbriqué (voir les tables 10 et 11).

TABLE 10
1er plan imbriqué

H	C	F		HC	FI	KE	AI	
K	A	E	I					
1	1	1	1	1	1	1	1	1er quart du plan initial
1	1	−1	−1	1	1	−1	−1	
1	−1	1	−1	−1	−1	1	1	
1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	
1	1	1	−1	1	−1	1	−1	Plan complémentaire
1	1	−1	1	1	−1	−1	1	
1	−1	1	1	−1	1	1	−1	
1	−1	−1	−1	−1	1	−1	1	

Le premier plan imbriqué permet d'estimer indépendamment les effets de FI et AI.

TABLE 11
2ème plan imbriqué

H	C	F		HC	FI	KE	AI	
K	A	E	I					
-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	Troisième quart du plan initial
-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	
-1	1	-1	1	-1	-1	1	1	
-1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	
1	1	1	-1	1	-1	1	-1	Plan complémentaire
1	1	-1	1	1	-1	-1	1	
1	-1	1	1	-1	1	1	-1	
1	-1	-1	-1	-1	1	-1	1	

Le second plan imbriqué permet d'estimer indépendamment les effets de HC et KE. On peut à partir de ces estimations, éliminer les interactions inertes.

A cause du nombre d'essais très limité du plan complémentaire, la précision sur les estimations des effets des interactions à désaliaser est trés inférieure à celle sur les estimations des effets des facteurs (issues du plan initial).

4.4. Plans de résolution III

Dans des plans de résolution III, les structures de confusions sont «triangulaires». Lorsqu'une interaction entre deux facteurs est confondue avec un troisième facteur, toutes les interactions entre deux facteurs parmi ces trois facteurs seront aliasées avec un facteur principal issu de ce même groupe. Par exemple, si C est aliasé avec AB, alors B est aliasé avec AC et A avec BC, ces trois facteurs constituant un «triangle».

Si les contrastes correspondant aux colonnes A, B et C sont significatifs dans le plan initial, il devient difficile de déterminer quel est l'effet des interactions et celui des effets principaux. On peut supposer que deux facteurs principaux et leur interaction sont actifs, mais il se peut tout aussi bien que les trois facteurs principaux soient actifs. Il est alors nécessaire d'effectuer un plan complémentaire.

– Lorsque trois contrastes qui constituent un «triangle» ont un effet significatif, on contracte le plan initial en un plan de type L4, puis on effectue un plan complémentaire répliqué inversé afin de pouvoir obtenir un plan complet pour ces trois facteurs.

– Lorsque quatre contrastes ont un effet significatif et que trois contrastes parmi les quatre constituent un «triangle», on peut, comme précédemment, contracter le plan

initial en ne tenant compte que des trois contrastes du «triangle» et effectuer un plan répliqué inversé en supposant que le quatrième contraste représente l'effet du facteur principal associé.

– Il n'est pas rare cependant que le nombre de facteurs potentiellement actifs soit plus important et que la configuration des structures d'alias soit plus complexe. Dans la suite de ce sous-chapitre, nous nous intéressons plus particulièrement aux situations dans lesquelles cinq contrastes (correspondants aux colonnes du plan initial qui ont été affectées à cinq facteurs) sont significatifs et que ces cinq facteurs constituent deux triangles qui ont en commun un sommet. Supposons qu'à l'issue d'un plan initial de type L8 et de résolution III, il apparaît que les facteurs A, B, C, D et E sont susceptibles d'avoir un effet réel, et que $AB = E$ et $E = CD$. Si l'on considère les structures triangulaires des plans de résolution III, on constate qu'il s'agit de deux «triangles» (ABD et CDE) dont un élément (E) est commun aux deux triangles. L'objectif est d'estimer les effets de ces cinq facteurs indépendamment des effets des interactions entre deux facteurs.

A partir du plan initial, il n'est pas possible de déterminer si les interactions AB, AE, BE et CD, CE, DE ont un effet réel puisqu'elles sont aliasées avec des facteurs principaux.

Plan initial

Contraste générateur : $I = ABE = CDE = ABCD$

TABLE 12
Plan initial

					E	
BD	BE	DE	AE	CE	CD	BC
AC	A	C	B	D	AB	AD
1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	−1	−1	−1	−1
1	−1	−1	1	1	−1	−1
1	−1	−1	−1	−1	1	1
−1	1	−1	1	−1	1	−1
−1	1	−1	−1	1	−1	1
−1	−1	1	1	−1	−1	1
−1	−1	1	−1	1	1	−1

On a en plus :

$AB = E \quad AE = B \quad BE = A \quad CD = E \quad CE = D \quad ED = C$

$AC = BD \quad AD = BC$

TABLE 13
Plan complémentaire sélectionné

A	C	B	D	E
-1	-1	-1	-1	-1
-1	-1	1	1	1
1	1	-1	-1	1
1	1	1	1	-1

Le plan complémentaire est une réplique de la partie haute du plan initial, avec pour différence le fait que les signes de tous les facteurs sont inversés.

En inversant les signes de tous les facteurs, on modifie complètement les structures d'alias. Ceci permet d'une part, de séparer l'effet de E de ceux des interactions, d'autre part de générer de nouvelles équations afin de pouvoir calculer les estimations des effets de A, C, BE, DE et de B, D, AE, CE. On aurait pu obtenir le même résultat en inversant seulement les signes de la colonne E.

1er Plan imbriqué :

La moitié haute du plan initial est combinée avec le plan complémentaire.

TABLE 14
Premier plan imbriqué

								AB		
								CD		
BD			DE			CE		BC		
AC	A	C	BE	B	D	AE	E	AD	Bloc	
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	Première partie du plan initial
1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	1	
1	-1	-1	-1	1	1	1	-1	-1	1	
1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	
1	-1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	-1	Plan complémentaire
1	-1	-1	1	1	1	-1	1	-1	-1	
1	1	1	-1	-1	-1	1	1	-1	-1	
1	1	1	-1	1	1	-1	-1	1	-1	

Dans le premier plan imbriqué on a :

$A = C$ et $B = D$

$AC = BD = I$; I étant la colonne identité

$AB = CD = AD = BC$

$AE = CE$ et $BE = DE$

Il est aisé d'estimer l'effet de E puisqu'il n'est pas aliasé avec celui une autre action. Il est aussi possible d'estimer l'effet bloc séparément.

2nd plan imbriqué :

La moitié basse du plan initial est combinée avec le plan complémentaire.

TABLE 15
Second plan imbriqué

BD												
AC									CD		AD	
Bloc	A	DE	C	BE	B	CE	D	AE	AB	E	BC	
1	−1	1	−1	1	−1	1	−1	1	1	−1	1	Plan complémentaire
1	−1	1	−1	1	1	−1	1	−1	−1	1	−1	
1	1	−1	1	−1	−1	1	−1	1	−1	1	−1	
1	1	−1	1	−1	1	−1	1	−1	1	−1	1	
−1	1	−1	−1	1	1	−1	−1	1	1	1	−1	2nde partie du plan initial
−1	1	−1	−1	1	−1	1	1	−1	−1	−1	1	
−1	−1	1	1	−1	1	−1	−1	1	−1	−1	1	
−1	−1	1	1	−1	−1	1	1	−1	1	1	−1	

Effets estimés à l'aide du second plan imbriqué :

$AB = CD$ $\quad AC = BD =$ Effet bloc $\quad AD = BC = -E$

$AE = -D$ $\quad CE = -B$ $\quad BE = -C$ $\quad DE = -A$

Afin de pouvoir estimer indépendamment les effets de A, B, C et D il faut réutiliser les résultats des deux plans imbriqués ainsi que ceux du plan initial.

Estimation des effets de A, C et BE, DE

Le plan initial permet d'estimer les effets de :

$$A + BE \quad \text{et} \quad C + DE$$

Le 1er plan imbriqué ceux de :

$$BE + DE \quad \text{et} \quad A + C$$

Le 2nd plan imbriqué ceux de :

$$A - DE \quad \text{et} \quad C - BE$$

A partir de ce système d'équations, il est relativement simple de calculer indépendamment les effets de A, C et BE, DE. On peut utiliser les deux plans imbriqués pour calculer séparément les effets de A, C et BE, DE puis recourir aux résultats du plan initial pour améliorer la précision de ces estimations, ou encore utiliser le plan initial et l'un des deux plans imbriqués pour calculer les estimations des effets de A, C, BE, DE et recourir à l'autre plan imbriqué pour affiner ces estimations.

Estimation des effets de B, D et AE, CE

Le plan initial permet d'estimer les effets de :

$$B + AE \quad \text{et} \quad D + CE$$

Le 1er plan imbriqué :

$$AE + CE \quad \text{et} \quad B + D$$

Le 2nd plan imbriqué :

$$B - CE \quad \text{et} \quad D - AE$$

A partir de ces équations, on calcule les effets de B, D et AE, CE indépendamment les uns des autres. Les deux plans imbriqués peuvent être utilisés pour calculer séparément ces effets puis on peut recourir aux résultats du plan initial pour améliorer la précision des estimations, ou encore utiliser le plan initial et un des deux plans imbriqués pour calculer les estimations des effets de B, D, AE, CE, l'autre plan imbriqué sert alors à valider et confirmer ces estimations ainsi qu'à accroître leur précision. Il s'agit là de calculs simples, la précision des estimations est un avantage important de cette technique.

5. Conclusion

Lorsque le nombre d'effets actifs est faible, les plans complets sont souvent une démarche très coûteuse. Afin de désaliaser les effets confondus dans un plan fractionnaire de criblage, il est possible d'augmenter ce plan à l'aide de plans complémentaires de taille réduite. Daniel (1976) Montgomery et Runger (1996) ainsi que Box, Hunter et Hunter (1978) ont proposé de recourir à des plans répliqués inversés («foldover designs») ou partiellement inversés pour augmenter le degré de résolution du plan initial. Meyer, Steinberg et Box (1996) préconisent l'utilisation de plans complémentaires non-orthogonaux afin de pouvoir calculer la probabilité

à posteriori que chacun des facteurs soit actif. Il s'agit d'une approche basée sur l'élaboration de modèles alternatifs. Ces méthodes ont l'inconvénient de nécessiter un grand nombre d'essais ou d'être peu précises.

Les plans complémentaires ainsi que les plans imbriqués que nous proposons sont un compromis entre la précision des estimations des effets et la minimisation du nombre d'essais supplémentaires. On peut ainsi «extraire» du plan initial les chaînes d'alias actives et sélectionner les effets à désaliaser.

Bibliographie

BARKER T. (1994). Quality by experimental design. Mdi-Dekker-Quality and Reliability series. 2nd edition.

BOX, G.E.P. HUNTER, W. & HUNTER J. (1978). Statistics for experimenters. Wiley.

BOX G. & TYSSEDAL S. (1996). Projective properties of certain orthogonal arrays. Biometrika, Vol 83, N° 4

BULLINGTON & MAGHSOOLDLOO (1990). A simple method for obtaining resolution IV designs for use with Taguchi's orthogonal arrays. Journal of quality technology, Vol. 22 N° 4

DANIEL C. (1976). Applications of statistics to industrial experimentation. New York, Wiley.

JONHSON, R. CLAPP T. & BAQAI N. (1989). Understanding the effect of confounding in design of experiments : a case study in high-speed weaving. Quality Engineering, Vol 1, N° 4 , pp 501-508

MEYER, R.D. STEINBERG, D.M. & BOX G (1996). Follow-up designs to resolve confounding in multifactor experiments. Technometrics, Vol 38, N° 4, pp 327-332

MONTGOMERY, BORROR & STANLEY. (1997). Some cautions in the use of Plackett-Burman designs. Quality Engineering Vol 10, N° 2, pp 371-381

MONTGOMERY D. & RUNGER G. (1996). Foldovers of 2k-p resolution IV experimental designs. Journal of quality technology. Vol 28 N° 4.

PILLET, M. (1998). Construire facilement des plans de résolution IV à partir des tables de Taguchi. Revue de Statistique Appliquée, Vol 46, N° 4, pp 85-100

TAGUCHI, G. (1987). System of experimental design. White Plains, New York, Unipub.