REVUE DE STATISTIQUE APPLIQUÉE

W. TINSSON

# Critères d'efficacité pour plans d'expérience à facteurs quantitatifs et effets de blocs aléatoires

*Revue de statistique appliquée*, tome 49, nº 1 (2001), p. 55-78

<http://www.numdam.org/item?id=RSA_2001__49_1_55_0>

© Société française de statistique, 2001, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Revue de statistique appliquée » (http://www.sfds.asso.fr/publicat/rsa.htm) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme*
*Numérisation de documents anciens mathématiques*
http://www.numdam.org/

*Rev. Statistique Appliquée,* 2001, **XLIX** (1), 55-78

# Critères d'efficacité pour plans d'expérience à facteurs quantitatifs et effets de blocs aléatoires

W. Tinsson

*Université de Pau et des Pays de l'Adour,*
*Laboratoire de Mathématiques Appliquées, ERS* 2055
*avenue de l'Université* - 64000 *Pau - France.*

## RÉSUMÉ

Cet article est consacré à l'étude des critères d'efficacité lorsque le plan d'expérience est analysé à l'aide du modèle mixte. Nous donnons l'expression de ces critères pour tout plan en blocs usuel. Le cas du blocage orthogonal, nous permettant d'obtenir une efficacité uniforme, est traité. Une attention particulière est portée aux plans en blocs de même taille et aux simplifications qu'ils entraînent. Deux exemples terminent cette étude.

***Mots-clés :*** *modèle linéaire mixte, A-efficacité, D-efficacité, E-efficacité, plans bloqués orthogonalement, plans usuels.*

## ABSTRACT

This paper deals with properties of efficiency for experimental designs analyzed with a random block effects model. We explain these criterions for every usual blocked design. We show that uniform efficiency is available in the particular case of orthogonally blocked designs. In the same way, simplifications associated with the assumption of egal block sizes are treated. We finish with the study of numerical examples.

***Keywords :*** *mixed linear model, A-efficiency, D-efficiency, E-efficiency, orthogonally blocked designs, usual designs.*

## 1. Introduction

Les plans d'expérience à facteurs quantitatifs sont d'usage courant, de nombreux ouvrages et publications leurs sont consacrés (voir Box et Draper [2] ou Khuri et Cornell [9]). Ces plans sont souvent analysés à l'aide du modèle linéaire simple (*i.e.* sans blocs) ou du modèle à effets de blocs fixes. Cependant, nous savons que ces modèles classiques ne sont pas toujours bien adaptés aux situations rencontrées en pratique. C'est pourquoi nous proposons ici une autre alternative en nous intéressant au modèle à **effets de blocs aléatoires** (appelé encore modèle mixte). Peu de publications sont consacrées à l'emploi de ce modèle pour l'ajustement de surfaces de réponse. Citons les travaux de Khuri [8], relatifs au cas des plans bloqués orthogonalement, ou encore ceux de Cheng [3] abordant le problème de la construction de plans D-optimaux.

Nous suivons ici une démarche ayant pour but d'évaluer la qualité d'un plan d'expérience. Ce travail a déjà été amorcé en étudiant la variance des estimateurs de la réponse moyenne (Tinsson [15]) ou des variations de celle-ci (Tinsson [16]). Une autre possibilité consiste à utiliser des **critères d'efficacité** (principalement les A, D et E-efficacités). Ces critères sont bien connus de manière théorique, ainsi que leur application au modèle simple (on pourra se référer aux articles de Lucas [10][11] et aux ouvrages d'Atkinson et Donev [1] ou Pukelsheim [12]). Le but de cet article est d'étudier le comportement de ces critères lors du passage du modèle simple au modèle mixte. On souhaite, bien entendu, déterminer des plans pour lesquels ce passage se réalise de la manière la plus stable possible.

Nous développons une méthode générale permettant de déterminer les critères d'efficacité pour tout plan d'expérience élément de la classe des **plans en blocs** dits **usuels** (voir Tinsson [15]). Deux importants cas particuliers sont ensuite analysés de manière exhaustive. Il s'agit, d'une part, du cas des plans bloqués orthogonalement et, d'autre part, du cas des plans usuels en blocs de même taille. On montre que le blocage orthogonal entraine une efficacité uniforme lors du passage au modèle mixte. De même, l'utilisation de plans usuels en blocs de même taille permet d'obtenir d'importantes simplifications pour la plupart des expressions numériques.

La partie 2 introduit les rappels, les notations et les principales définitions. L'étude complète des critères d'efficacité est réalisée dans la partie 3. Enfin, la partie 4 est consacré à l'étude de deux exemples où nous appliquons tous les résultats établis précedemment.

## 2. Modèle linéaire mixte

### *2.1. Notations et définitions*

Considérons un phénomène aléatoire dont on peut contrôler expérimentalement $m$ **facteurs quantitatifs**. Afin d'en réaliser une modélisation, nous pouvons considérer un **plan d'expérience** $d$ constitué de $n$ unités expérimentales. Notons $Y_{u,x}$ l'aléa observé lorsque le traitement $x = {}^t(x_1 \dots x_m)$ est appliqué à l'unité expérimentale $u$. On suppose que :

$$Y_{u,x} = f(x) + \varepsilon_{u,x}$$

avec : $\begin{cases} f(x) \textbf{ loi de réponse} \text{ en } x \text{ (la réponse en ce point)} \\ \varepsilon \textbf{ résidu} \text{ lié aux erreurs expérimentales ou au modèle} \end{cases}$

Pour obtenir concrètement une approximation de la loi de réponse, nous supposons que $f$ est assez régulière pour admettre un développement limité d'ordre 2 dans le domaine expérimental $\mathcal{E} \subset I\!R^m$ contenant l'origine du repère utilisé. On a donc :

$$u = 1 \dots n \text{ et } \forall\, x \in \mathcal{E},\ Y_{u,x} = \beta_0 + \sum_{i=1}^{m} \beta_i x_i + \sum_{i=1}^{m} \beta_{ii} x_i^2 + \sum_{i<j}\sum \beta_{ij} x_i x_j + \varepsilon_{u,x}.$$

Dans la suite, nous désignons par $Y$ le vecteur des $n$ observations, par $\varepsilon$ le vecteur des $n$ résidus et par $\beta$ le vecteur des $q$ paramètres du modèle (avec ici $q = (m+1)(m+2)/2$). On appelle alors **matrice du plan** la matrice $n \times m$ ayant pour ligne $u$ les $m$ coordonnées du $u$-ième point du plan $d$. Désignons par $L_j$ $(1 \leqslant j \leqslant m)$ la $j$-ème colonne de cette matrice et notons $\odot$ l'opérateur du produit d'Hadamard (appelé encore produit « terme à terme » puisque si $u, v \in I\!R^n$ alors $u \odot v \in I\!R^n$ est tel que $\forall\ i = 1...n$ , $(u \odot v)_i = u_i v_i$). Posons maintenant $Q_j = L_j \odot L_j$ $(1 \leqslant j \leqslant m)$ et $Q_{jk} = L_j \odot L_k$ $(1 \leqslant j < k \leqslant m)$. La **matrice du modèle** s'écrit donc :

$$X = \left[1_n \mid L_1 \ldots L_m \mid Q_1 \ldots Q_m \mid Q_{12} \ldots Q_{(m-1)m}\right].$$

On définit alors la **matrice des moments** du plan $d$ par :

$$M = M(L_1 \ldots L_m) = \frac{1}{n}{}^t X X$$

$M$ a pour éléments tous les moments jusqu'à l'ordre 4 de la distribution des points du plan. De manière classique, on utilise dans la suite l'écriture suivante pour désigner les moments des points du plan $d = (x_u)_{u=1\ldots n}$ :

$$\forall\, \delta_1,\, \delta_2 \ldots \delta_m \in I\!N,\ \left[1^{\delta_1}\, 2^{\delta_2} \ldots m^{\delta_m}\right] = \frac{1}{n} \sum_{u=1}^{n} x_{u1}^{\delta_1}\, x_{u2}^{\delta_2} \ldots x_{um}^{\delta_m}.$$

Supposons maintenant que l'on veuille tenir compte d'éventuels effets d'hétérogénéité des unités expérimentales. Pour cela, on peut regrouper en **blocs** les observations associées aux unités expérimentales homogènes et introduire dans le modèle des effets de blocs. Désignons alors par $B$ la matrice $n \times b$ des indicatrices des $b$ blocs de tailles $k_1 \ldots k_b$ et par $\gamma$ le vecteur des effets de blocs qui lui est associé.

**Définition 1.** — *On appelle* **modèle linéaire mixte** *le modèle à effets de blocs aléatoires donné par la relation matricielle :*

$$Y = X\beta + B\gamma + \varepsilon$$

*avec :* $\begin{cases} \mathrm{E}\varepsilon = \mathrm{E}\gamma = 0 \ \textit{et}\ \mathrm{Cov}\varepsilon = \sigma^2 I_n,\ \mathrm{Cov}\gamma = \sigma_b^2 I_b, \\ \forall\, i = 1 \ldots n \ \textit{et}\ \forall\, j = 1 \ldots b,\ \varepsilon_i \ \textit{et}\ \gamma_j \ \textit{sont indépendants.} \end{cases}$

*$\varepsilon_i$ (resp. $\gamma_j$ ) désignant la $i^{\text{ème}}$ (resp. $j^{\text{ème}}$ ) composante de $\varepsilon$ (resp. $\gamma$ ). En d'autres termes, nous avons donc :*

$$\boxed{\begin{cases} \mathrm{E}Y = X\beta \\ \mathrm{Cov}Y = \sigma^2 I_n + \sigma_b^2 B^t B \end{cases}}$$

Nous supposons dans la suite que la matrice $\mathrm{Cov}Y$ est **régulière** et on note :

$$\mathrm{Cov}Y = \sigma^2 V \text{ avec } V = I_n + \eta B^t B \text{ où } \eta = \frac{\sigma_b^2}{\sigma^2}.$$

Il est bien connu que l'**équation normale** du modèle linéaire mixte est alors donnée par (voir par exemple Christensen [4]) :

$$\left({}^tXV^{-1}X\right)\hat{\beta}\left(\eta\right) = {}^tXV^{-1}Y$$

De même, en désignant par $A^-$ une inverse généralisée de toute matrice $A$ (c'est à dire telle que $AA^-A = A$ ) nous pouvons dire que si $K\beta$ est une application linéaire estimable alors :

$$\mathrm{Cov}K\hat{\beta}\left(\eta\right) = \sigma^2 K\left({}^tXV^{-1}X\right)^- {}^tK$$

Remarquons enfin que le **modèle linéaire simple** (qui néglige les effets de blocs) est le modèle mixte particulier obtenu lorsque $\eta = 0$. En effet, on a alors :

$$Y = X\beta + \varepsilon \Longleftrightarrow \begin{cases} \mathrm{E}Y = X\beta \\ \mathrm{Cov}Y = \sigma^2 I_n \end{cases}$$

### *2.2 Plans en blocs usuels*

Rappelons ici les principaux résultats relatifs à cette classe de plans (voir Collombier et Tinsson [6] pour les démonstrations). Nous décomposons dans la suite le vecteur $\beta$ en :

$${}^t\beta = \left(\beta_0 \mid {}^t\beta_L \mid {}^t\beta_Q \mid {}^t\beta_I\right),$$

avec $\beta_0$ effet moyen général, $\beta_L$ effets linéaires, $\beta_Q$ effets quadratiques et $\beta_I$ effets d'interaction. Tous les plans d'expérience utilisés sont supposés, de manière classique, être à matrice des moments canonique selon la définition suivante :

**Définition 2.** — *Un plan d'expérience est dit à matrice des moments* **canonique** *pour un modèle d'ordre* 2 *si et seulement si* ($1_m$ *désignant le vecteur dont les* $m$ *composantes valent* 1 *et* $J_m$ *la matrice* ${1_m}^t1_m$) *:*

$$\frac{1}{n}{}^tXX = \begin{bmatrix} 1 & . & \lambda_2{}^t1_m & . \\ . & \lambda_2 I_m & . & . \\ \lambda_2 1_m & . & (c-1)\,\lambda_4 I_m + \lambda_4 J_m & . \\ . & . & . & \lambda_4 I_{\frac{m(m-1)}{2}} \end{bmatrix}$$

*En d'autres termes, les seuls moments non nuls du plan jusqu'à l'ordre quatre sont :*

$$\boxed{\forall\, i,j = 1\ldots m \text{ avec } i \neq j,\ \left[i^2\right] = \lambda_2,\ \left[i^2j^2\right] = \lambda_4,\ \left[i^4\right] = c\lambda_4}$$

Afin de prendre en compte l'organisation en blocs d'un plan d'expérience, introduisons naturellement la notion de **moment par bloc** en posant :

$$\forall\, l = 1 \ldots b,\ \forall\, \delta_1, \delta_2 \ldots \delta_m \in I\!N,\ \left[1^{\delta_1}\, 2^{\delta_2} \ldots m^{\delta_m}\right]_l = \frac{1}{k_l} \sum_{\text{bloc } l} x_{u1}^{\delta_1} x_{u2}^{\delta_2} \ldots x_{um}^{\delta_m}.$$

Les plans en blocs utilisés actuellement vérifient presque tous les conditions suivantes que nous qualifions d'usuelles :

**Définition 3.** — *On appelle* **plan en blocs usuel** *pour un modèle d'ordre* 2 *tout plan d'expérience à matrice des moments canonique régulière* (i.e.$rg\,(X) = q$) *et tel que :*

$$\boxed{\begin{cases} \forall\, i = 1 \ldots m,\ \forall\, l = 1 \ldots b,\ [i]_l = 0 \\ \forall\, i, j = 1 \ldots m \ \ avec\ i \neq j,\ \forall\, l = 1 \ldots b,\ [ij]_l = 0 \\ \forall\, l = 1 \ldots b,\ \left[1^2\right]_l = \left[2^2\right]_l = \ldots = \left[m^2\right]_l \end{cases}}$$

*Désignons alors par $\mu_l$ le moment pur d'ordre* 2 **commun aux unités du bloc** $l$ *d'un plan d'expérience usuel.*

On montre alors que la structure de plan en blocs usuel permet d'estimer les fonctions linéaires dépendant de $\beta_L$ ou $\beta_I$ ainsi que tout contraste sur les effets quadratiques de manière **uniformément optimale** en $\eta$ (donc, quelle que soit la valeur de $\eta$ les estimateurs obtenus sont les mêmes que dans le cas particulier correspondant au modèle simple où $\eta = 0$). En ce qui concerne la dispersion de ces estimateurs, on vérifie que pour tout plan en blocs usuel $\hat{\beta}_L\,(\eta)$ et $\hat{\beta}_I\,(\eta)$ sont non corrélés avec les autres composantes de $\hat{\beta}\,(\eta)$ et :

$$\mathrm{Cov}\hat{\beta}_L\,(\eta) = \frac{\sigma^2}{n\lambda_2} I_m,\ \mathrm{Cov}\hat{\beta}_I\,(\eta) = \frac{\sigma^2}{n\lambda_4} I_{\frac{m(m-1)}{2}}$$

Pour $\hat{\beta}_0\,(\eta)$ et $\hat{\beta}_Q\,(\eta)$ il vient de même (avec toujours $J_m = 1_m{}^t 1_m$) :

$$\mathrm{Var}\hat{\beta}_0\,(\eta) = \sigma^2 \left(\frac{\delta_3 + m\delta_4}{\phi}\right) \text{ et } \mathrm{Cov}\hat{\beta}_Q\,(\eta) = \frac{\sigma^2}{\delta_3}\left(I_m + \frac{\delta_2^2 - \delta_1\delta_4}{\phi} J_m\right)$$

$$\mathrm{Cov}\left(\hat{\beta}_0\,(\eta), \hat{\beta}_Q\,(\eta)\right) = -\sigma^2 \frac{\delta_2}{\phi} 1_m$$

avec :

$$\begin{cases} \delta_1 = n - \sum_{l=1}^{b} \frac{k_l^2 \eta}{1 + k_l \eta}, \ \delta_2 = n\lambda_2 - \left( \sum_{l=1}^{b} \frac{k_l^2 \eta}{1 + k_l \eta} \mu_l \right), \ \delta_3 = n\,(c-1)\,\lambda_4 \\ \delta_4 = n\lambda_4 - \left( \sum_{l=1}^{b} \frac{k_l^2 \eta}{1 + k_l \eta} \mu_l^2 \right), \ \phi = \delta_1\,(\delta_3 + m\delta_4) - m\delta_2^2 \end{cases}$$

### *2.3. Plans bloqués orthogonalement*

Rappelons ici la définition du blocage orthogonal :

**Définition 4.** — *Un plan d'expérience est dit* **bloqué orthogonalement** *si et seulement si :*

$$\boxed{{}^tX \left( I_n - \frac{1}{n} J_n \right) B = 0}$$

Il est possible de réécrire cette définition sous la forme suivante :

$${}^tX \left( I_n - \frac{1}{n} J_n \right) B = 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} \forall\, i, j = 1 \ldots m \text{ avec } i \neq j \text{ et } l = 1 \ldots b \\ [i]_l = [i]\,,\ [ij]_l = [ij]\,,\ \left[i^2\right]_l = \left[i^2\right] \end{cases}$$

On en déduit immédiatement que tout plan bloqué orthogonalement, à matrice des moments canonique, est un **plan en blocs usuel** particulier vérifiant la relation caractéristique supplémentaire : $\mu_1 = \ldots = \mu_b = \lambda_2$.

Il est prouvé dans Collombier et Tinsson [6] que l'utilisation d'un plan bloqué orthogonalement permet d'estimer aussi les fonctions linéaires dépendant de $\beta_Q$ de manière **uniformément optimale** en $\eta$ (et non plus seulement les contrastes de $\beta_Q$). On vérifie de plus que la matrice $\mathrm{Cov}\hat{\beta}_Q\,(\eta)$ est alors indépendante de $\eta$.

## 3. Critères d'efficacité

### *3.1. Rappels*

Rappelons ici les notions de base relatives aux critères de $\psi_p$-efficacité et proposons des notations adaptées au modèle mixte. Considérons un plan d'expérience $d$ et une application linéaire estimable $K\beta$, à $r$ composantes. On définit alors la matrice $\mathcal{V}_{d,\eta}$ (pour tout $\eta \geqslant 0$ fixé) par :

$$\sigma^2 \mathcal{V}_{d,\eta} = \mathrm{Cov}_d K\hat{\beta}\,(\eta)\,.$$

Ceci nous permet d'introduire le critère d'efficacité suivant :

**Définition 5.** — *Pour* $0 < p < +\infty$, *on appelle* **critère de** $\psi_p$**-efficacité** *la fonction :*

$$\boxed{\psi_p\left(\mathcal{V}_{d,\eta}\right) = \left[\frac{1}{r}\mathrm{trace}\left(\mathcal{V}_{d,\eta}\right)^p\right]^{\frac{1}{p}}}$$

*Par passage à la limite, on étend cette classe de critères à* $p = 0$ *et* $p = +\infty$.

Un plan d'expérience $d^* \in \mathcal{D}$ est alors qualifié de $\psi_p$**-optimal** au sein de la classe $\mathcal{D}$, pour une valeur donnée du paramètre $\eta$, si et seulement si :

$$\forall\, d \in \mathcal{D},\ \psi_p\left(\mathcal{V}_{d^*,\eta}\right) \leqslant \psi_p\left(\mathcal{V}_{d,\eta}\right).$$

**Proposition 6.** — *Désignons par* $\lambda_1 \ldots \lambda_r$ *la suite pleine des valeurs propres de la matrice* $\mathcal{V}_{d,\eta}$. *On a alors les résultats suivants.*

i) *Pour* $p = 1$ *le critère prend le nom de* **A-efficacité***et il vient :*

$$\boxed{\psi_1\left(\mathcal{V}_{d,\eta}\right) = \frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r}\lambda_i}$$

ii) *Pour* $p = 0$ *le critère prend le nom de* **D-efficacité** *et il vient :*

$$\boxed{\psi_0\left(\mathcal{V}_{d,\eta}\right) = \left(\prod_{i=1}^{r}\lambda_i\right)^{\frac{1}{r}}}$$

iii) *Pour* $p = +\infty$ *le critère prend le nom de* **E-efficacité** *et il vient :*

$$\boxed{\psi_\infty\left(\mathcal{V}_{d,\eta}\right) = \max_{i=1\ldots r}\lambda_i}$$

**Démonstration.** — Le résultat du i n'est qu'une réécriture de la définition. En ce qui concerne les propositions ii et iii, on pourra se référer à Hedayat [7].

Nous désignons dans la suite par $\preceq$ l'ordre de Lœwner sur les matrices ($A$ et $B$ étant deux matrices carrées de même ordre, nous dirons donc que $A \preceq B$ si et seulement si $B - A$ est définie non-négative). On a alors :

**Proposition 7.** — *Tout critère de $\psi_p$-efficacité (avec $0 \leqslant p \leqslant +\infty$) est une fonction* **monotone croissante** *relativement à l'ordre de Lœwner sur les opérateurs de covariance. En d'autres termes :*

$$\boxed{\mathcal{V}_{d,\eta} \preceq \mathcal{V}_{d',\eta'} \;\Rightarrow\; \psi_p\left(\mathcal{V}_{d,\eta}\right) \leqslant \psi_p\left(\mathcal{V}_{d',\eta'}\right)}$$

**Démonstration.** — Se référer aux résultats de l'ouvrage de Collombier [5], chapitre 6, proposition 1.6.

### *3.2. Résultats généraux*

L'objectif de cette partie est d'appliquer les résultats vus précedemment au cas du modèle linéaire mixte. Ceci nous permet ensuite d'expliciter la forme des critères de A, D, et E-efficacité pour tout plan en blocs usuel. Notre attention se porte tout particulièrement sur le problème du comportement des critères d'efficacité, pour un plan d'expérience donné, en fonction du paramètre $\eta$.

En ce qui concerne l'estimation réalisée, nous nous intéressons ici uniquement aux effets linéaires, quadratiques et d'interaction. En d'autres termes, nous n'estimons pas l'effet moyen général $\beta_0$. Ce choix se justifie par les résultats obtenus dans de précédents articles où nous avons démontré que lorsque le passage au modèle mixte entraine une perte de précision, celle-ci est majoritairement due à la variance de l'estimateur de $\beta_0$. Par contre, exclure $\beta_0$ de l'estimation nous permet d'obtenir des résultats de très bonne qualité (voir Tinsson [16]). N'oublions pas enfin que l'effet moyen général est souvent, en pratique, un paramètre de faible intérêt. Nous considérons donc ici la quantité :

$$\tau = K\beta \text{ avec } K = [0 \mid I_{q-1}] \text{ matrice d'ordre } (q-1) \times q.$$

Nous avons vu, à la section 3.1, que le critère de $\psi_p$ -efficacité ne dépend que du plan $d$ choisi et des valeurs des réels positifs $p$ et $\eta$. C'est pourquoi nous utilisons dans la suite l'écriture simplifiée $\psi_p^d(\eta)$ à la place de $\psi_p\left(\mathcal{V}_{d,\eta}\right)$. Lorsqu'un seul plan d'expérience est considéré nous notons $\psi_p(\eta)$ ou encore $\mathcal{V}_\eta$ lorsqu'on se réfère à la matrice des covariances (au facteur $\sigma^2$ près) de $\hat{\tau}(\eta) = K\hat{\beta}(\eta)$ . Nous pouvons alors énoncer le résultat suivant :

**Proposition 8.** — *Considérons un plan d'expérience usuel et $0 \leqslant p \leqslant +\infty$ fixé. $\psi_p$ est alors une* **fonction croissante de** $\eta$.

**Démonstration.** — Nous avons vu à la section 2.1 que :

$$\mathrm{Cov}Y = \sigma^2 V \text{ avec } V = V_\eta = I_n + \eta B^t B$$
$$\Rightarrow\; V_\eta^{-1} = I_n - BD_\eta^t B \text{ où } D_\eta = \text{ diag}\left(\frac{\eta}{1+k_i\eta}, i = 1\ldots b\right)$$

puisque ${}^tBB = diag\,(k_1, \ldots, k_b)$. On remarque alors que :

$$D_{\eta'} - D_\eta = \text{ diag } \left( \frac{\eta' - \eta}{(1 + k_i\eta')\,(1 + k_i\eta)}, \, i = 1 \ldots b \right).$$

Ceci entraîne la relation suivante :

$$\begin{aligned} \eta \leqslant \eta' \Rightarrow & \text{ tous les éléments de } D_{\eta'} - D_\eta \text{ sont positifs ou nuls} \\ \Rightarrow & \ {}^tXB\,(D_{\eta'} - D_\eta)\,{}^tBX \text{ est définie non-négative.} \end{aligned}$$

Or :

$${}^tXB\,(D_{\eta'} - D_\eta)\,{}^tBX = {}^tX\left(-BD_\eta{}^tB + BD_{\eta'}{}^tB\right)X = {}^tX\left(V_\eta^{-1} - V_{\eta'}^{-1}\right)X.$$

Donc, il vient :

$$\begin{aligned} \eta \leqslant \eta' \ \Rightarrow & \ {}^tXV_\eta^{-1}X - {}^tXV_{\eta'}^{-1}X \text{ est définie non-négative} \\ \Rightarrow & \ {}^tXV_\eta^{-1}X \succeq {}^tXV_{\eta'}^{-1}X. \end{aligned}$$

Puisque le plan est usuel ces matrices sont régulières, donc :

$$\begin{aligned} \eta \leqslant \eta' \ \Rightarrow \ & \left({}^tXV_\eta^{-1}X\right)^{-1} \preceq \left({}^tXV_{\eta'}^{-1}X\right)^{-1} \\ \Rightarrow \ K\left({}^tXV_\eta^{-1}X\right)^{-1}{}^tK \preceq K\left({}^tXV_{\eta'}^{-1}X\right)^{-1}{}^tK \ & \Rightarrow \ \mathcal{V}_\eta \preceq \mathcal{V}_{\eta'}. \end{aligned}$$

L'utilisation de la proposition 7 nous permet maintenant d'affirmer que :

$$\eta \leqslant \eta' \ \Rightarrow \ \mathcal{V}_\eta \preceq \mathcal{V}_{\eta'} \ \Rightarrow \ \psi_p\,(\eta) \leqslant \psi_p\,(\eta')\,.$$

Le résultat est donc bien démontré .

**Remarque.** Cette proposition est en accord avec de précédents résultats. En effet, nous avons déjà constaté que les dispersions des estimateurs de la réponse moyenne du modèle mixte (Tinsson [15]) ou de ses variations (Tinsson [16]) sont aussi des quantités croissantes en $\eta$.

Cherchons maintenant une expression explicite des critères d'efficacité pour tout plan en blocs usuel. Il est nécessaire, dans un premier temps, de réaliser une analyse spectrale de la matrice des covariances. On obtient :

**Lemme 9.** — *Considérons un plan d'expérience usuel . Les* **valeurs propres** *de la matrice $\mathcal{V}_\eta$ sont alors :*

| | | |
|---|---|---|
| i) | $1/n\lambda_2$ | *d'ordre de multiplicité* $m$ . |
| ii) | $1/n\lambda_4$ | *d'ordre de multiplicité* $m\,(m-1)\,/2$. |
| iii) | $1/n\,(c-1)\,\lambda_4$ | *d'ordre de multiplicité* $(m-1)$ . |
| iv) | $\delta_1/\phi$ | *d'ordre de multiplicité* 1. |

*avec $\delta_1$ et $\phi$ donnés explicitement à la section* 2.2.

**Démonstration.** — Nous savons, d'après la section 2.2, que la matrice $\mathcal{V}_\eta$ s'écrit pour tout plan en blocs usuel :

$$\mathcal{V}_\eta = \operatorname{diag}\left(\frac{1}{n\lambda_2}I_m\ ,\ \frac{1}{\delta_3}I_m + \frac{\delta_2^2-\delta_1\delta_4}{\delta_3\phi}J_m\ ,\ \frac{1}{n\lambda_4}I_{\frac{m(m-1)}{2}}\right).$$

Puisque cette matrice est diagonale par blocs, les résultats i et ii sont immédiats. En ce qui concerne les dernières valeurs propres, il suffit de remarquer qu'elles sont issue d'un bloc complètement symétrique. Or, il est bien connu que $aI_m + bJ_m$ admet pour valeurs propres :

$$\begin{cases} a & \text{d'ordre de multiplicité } (m-1)\,. \\ a+mb & \text{d'ordre de multiplicité } 1. \end{cases}$$

Donc les valeurs propres issues du bloc $\operatorname{Cov}\hat{\beta}_Q\,(\eta)$ sont, d'une part, $1/\delta_3$ (avec par définition $\delta_3 = n\,(c-1)\,\lambda_4$) et d'autre part :

$$\frac{1}{\delta_3} + m\frac{\delta_2^2-\delta_1\delta_4}{\delta_3\phi} = \frac{\delta_1\delta_3 + m\delta_1\delta_4 - m\delta_2^2 + m\delta_2^2 - m\delta_1\delta_4}{\delta_3\phi} = \frac{\delta_1}{\phi}$$

D'où le résultat.

Ce lemme nous permet maintenant de proposer les formules explicites suivantes pour le calcul des différents critères d'efficacité :

**Proposition 10.** — *Considérons un plan d'expérience usuel. Les* **critères de A, D, et E-efficacité** *sont alors donnés par :*

i) $\psi_1\,(\eta) = \dfrac{1}{q-1}\left(C_A + \dfrac{\delta_1}{\phi}\right)$ *où* $C_A = \dfrac{m}{n\lambda_2} + \dfrac{m\,(m-1)}{2n\lambda_4} + \dfrac{m-1}{n\,(c-1)\,\lambda_4}$

ii) $\psi_0\,(\eta) = \left(C_D\,\dfrac{\delta_1}{\phi}\right)^{\frac{1}{q-1}}$ *où* $C_D = \dfrac{1}{(n\lambda_2)^m\,(n\lambda_4)^{\frac{m(m-1)}{2}}\,(n\,(c-1)\,\lambda_4)^{m-1}}$

iii) $\psi_\infty\,(\eta) = \max\left(\dfrac{1}{n\lambda_2}, \dfrac{1}{n\lambda_4}, \dfrac{1}{n\,(c-1)\,\lambda_4}, \dfrac{\delta_1}{\phi}\right)$

### *3.3. Cas particuliers des plans bloqués orthogonalement*

La section précédente vient de nous montrer que, dans le cas général, une seule des valeurs propres de la matrice $\mathcal{V}_\eta$ dépend du paramètre $\eta$. Il est alors naturel de se poser la question suivante : existe-t-il des plans d'expérience particuliers pour lesquels cette valeur propre soit uniforme en $\eta$ ?

**Proposition 11.** — *Considérons un plan d'expérience à matrice des moments canonique et* **bloqué orthogonalement**. *Alors, les critères de A, D, et E-efficacité sont* **uniformes** *en* $\eta$.

**Démonstration.** Nous avons vu à la section 2.3 qu'un plan d'expérience à matrice des moments canonique et bloqué orthogonalement est un plan en blocs usuel vérifiant la relation supplémentaire :

$$\mu_1 = \ldots = \mu_b = \lambda_2.$$

On peut donc dire, dans ce cas, que :

$$\delta_1 = n - C\,,\, \delta_2 = (n-C)\,\lambda_2\,,\, \delta_4 = n\lambda_4 - C\lambda_2^2 \text{ avec } C = \sum_{l=1}^{b} \frac{k_l^2 \eta}{1 + k_l \eta}.$$

Donc :

$$\begin{aligned}
\frac{\phi}{\delta_1} &= \delta_3 + m\delta_4 - m\frac{\delta_2^2}{\delta_1} = n\,(c-1)\,\lambda_4 + mn\lambda_4 - mC\lambda_2^2 - m\frac{(n-C)^2\,\lambda_2^2}{n-C} \\
\Rightarrow\ \frac{\phi}{\delta_1} &= n\,(m+c-1)\,\lambda_4 - [m\,(n-C) + mC]\,\lambda_2^2 \\
\Rightarrow\ \frac{\phi}{\delta_1} &= n\,(m+c-1)\,\lambda_4 - mn\lambda_2^2.
\end{aligned}$$

D'où le résultat puisque nous venons de prouver que la valeur propre $\delta_1/\phi$ ne dépend plus du paramètre $\eta$.

En utilisant la valeur de $\delta_1/\phi$ obtenue dans la démonstration précédente, ainsi que la proposition 10, il vient maintenant :

**Proposition 12.** — *Considérons un plan d'expérience à matrice des moments canonique et bloqué orthogonalement. Les* **critères de A, D, et E-efficacité** *sont alors donnés par (avec* $C_A$ *et* $C_D$ *définis à la proposition* 10*) :*

$$\boxed{\begin{aligned}
&\text{i)} \quad \psi_1 = \frac{1}{q-1}\left(C_A + \frac{1}{n\,(m+c-1)\,\lambda_4 - mn\lambda_2^2}\right) \\
&\text{ii)} \quad \psi_0 = \left(C_D\,\frac{1}{n\,(m+c-1)\,\lambda_4 - mn\lambda_2^2}\right)^{\frac{1}{q-1}} \\
&\text{iii)} \quad \psi_\infty = \max\left(\frac{1}{n\lambda_2}, \frac{1}{n\lambda_4}, \frac{1}{n\,(c-1)\,\lambda_4}, \frac{1}{n\,(m+c-1)\,\lambda_4 - mn\lambda_2^2}\right)
\end{aligned}}$$

### *3.4. Cas particulier des plans en blocs de même taille*

Plaçons-nous, dans ce paragraphe, au sein de la classe des plans usuels en blocs de même taille. L'hypothèse $k_1 = \ldots = k_b$ entraîne les relations suivantes (avec $k = n/b$ taille commune à chacun des blocs) :

$$\delta_1 = \frac{n}{1+k\eta}\,,\ \delta_2 = n\lambda_2 - \left(\sum_{l=1}^{b}\mu_l\right)\frac{k^2\eta}{1+k\eta}\,,\ \delta_4 = n\lambda_4 - \left(\sum_{l=1}^{b}\mu_l^2\right)\frac{k^2\eta}{1+k\eta}.$$

L'expression de la valeur propre $\delta_1/\phi$ se simplifie alors notablement puisqu'elle est maintenant une fonction homographique de $\eta$. En effet :

**Proposition13.** — *Considérons un plan d'expérience usuel en blocs de même taille. On a alors :*

$$\boxed{\frac{\delta_1}{\phi} = \frac{1+k\eta}{A+D\eta}}$$

*avec :* $A = n\,(m+c-1)\,\lambda_4 - mn\lambda_2^2$ *et* $D = k\left[n\,(m+c-1)\,\lambda_4 - mk\left(\sum_{l=1}^{b}\mu_l^2\right)\right]$.

**Démonstration.** Remarquons, au préalable, que l'on peut réécrire les quantités $\delta_2$ et $\delta_4$ sous les formes suivantes :

$$\begin{aligned}\delta_2 = n\lambda_2 - \left(\sum_{l=1}^{b}\mu_l\right)\frac{k^2\eta}{1+k\eta} &= \frac{n\lambda_2 + n\lambda_2 k\eta - \left(\sum\mu_l\right)k^2\eta}{1+k\eta}\\ &= \frac{n\lambda_2 + \left[n\lambda_2 - k\left(\sum\mu_l\right)\right]k\eta}{1+k\eta}.\end{aligned}$$

Mais $n\lambda_2 = \sum_{u=1}^{n} x_{ui}^2 = \sum_{l=1}^{b} k_l\mu_l = k\sum_{l=1}^{b}\mu_l$, donc : $\delta_2 = \dfrac{n\lambda_2}{1+k\eta}$.

De même :

$$\delta_4 = n\lambda_4 - \left(\sum_{l=1}^{b}\mu_l^2\right)\frac{k^2\eta}{1+k\eta} = \frac{n\lambda_4 + C\eta}{1+k\eta} \text{ avec } C = k\left[n\lambda_4 - k\left(\sum_{l=1}^{b}\mu_l^2\right)\right].$$

Donc :

$$\begin{aligned}\phi = \delta_1\,(\delta_3 + m\delta_4) - m\delta_2^2 &= \frac{n}{1+k\eta}\left[n\,(c-1)\,\lambda_4 + m\frac{n\lambda_4 + C\eta}{1+k\eta}\right] - m\left(\frac{n\lambda_2}{1+k\eta}\right)^2\\ &= \frac{n}{1+k\eta}\left[n\,(c-1)\,\lambda_4 + \frac{mn\lambda_4 + mC\eta}{1+k\eta} - \frac{mn\lambda_2^2}{1+k\eta}\right]\\ &= \frac{n}{1+k\eta}\,\frac{A+D\eta}{1+k\eta}.\end{aligned}$$

D'où le résultat puisque : $\dfrac{n}{1+k\eta} = \delta_1$ .

**Remarque.** Il est bien connu que $A > 0$ pour tout plan à matrice des moments canonique régulière. Le résultat nous prouve donc que, sous réserve d'avoir $D \neq 0$, la valeur propre $\delta_1/\phi$ est bornée en $\eta$ puisque $\delta_1/\phi \to k/D$ lorsque $\eta \to +\infty$. Ceci implique que les critères d'efficacité sont alors, eux-aussi, bornés en $\eta$.

La remarque précédente nous amène maintenant à nous interroger sur la signification géométrique du « cas limite » où $D = 0$. On peut alors dire que :

**Proposition 14.** — *Considérons un plan d'expérience usuel en blocs de même taille. On a $D = 0$ si et seulement si* **chaque bloc** *du plan est constitué de* **points équidistants de l'origine**. *La valeur propre $\delta_1/\phi$ est alors affine en $\eta$ avec :*

$$\boxed{\frac{\delta_1}{\phi} = \frac{1}{A} + \left(\frac{k}{A}\right)\eta}$$

**Démonstration.** D'après la proposition 13, il vient :

$$D = 0 \Leftrightarrow n\,(c-1+m)\,\lambda_4 - mk\sum_{l=1}^{b}\mu_l^2 = 0.$$

En notant $d_u$ $(u = 1\ldots n)$ la distance du $u$-ième point du plan à l'origine, on a :

$$d_u^4 = \sum_{i=1}^{m} x_{ui}^4 + r\sum\sum_{i\neq j} x_{ui}^2 x_{uj}^2$$

$$\Longrightarrow \sum_{u=1}^{n} d_u^4 = \sum_{i=1}^{m}\sum_{u=1}^{n} x_{ui}^4 + \sum\sum_{i\neq j}\sum_{u=1}^{n} x_{ui}^2 x_{uj}^2.$$

Or, nous savons que :

$$\forall\, i,j = 1\ldots m \text{ avec } i \neq j\ ,\ \sum_{u=1}^{n} x_{ui}^4 = nc\lambda_4 \text{ et } \sum_{u=1}^{n} x_{ui}^2 x_{uj}^2 = n\lambda_4.$$

donc :

$$\sum_{u=1}^{n} d_u^4 = m\,(nc\lambda_4) + m\,(m-1)\,n\lambda_4 = nm\,(c-1+m)\,\lambda_4.$$

De même, nous pouvons dire que pour $l = 1\ldots b$ fixé on a la relation suivante :

$$\sum_{\text{bloc } l} d_u^2 = \sum_{\text{bloc } l}\sum_{i=1}^{m} x_{ui}^2 = \sum_{i=1}^{m}\sum_{\text{bloc } l} x_{ui}^2 = \sum_{i=1}^{m} k\mu_l = mk\mu_l$$

donc :

$$D = 0 \Leftrightarrow nm\,(c-1+m)\,\lambda_4 - \frac{1}{k}\sum_{l=1}^{b}(mk\mu_l)^2 = \sum_{u=1}^{n} d_u^4 - \frac{1}{k}\sum_{l=1}^{b}\left(\sum_{\text{bloc } l} d_u^2\right)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{l=1}^{b}\left[\sum_{\text{bloc } l} d_u^4 - \frac{1}{k}\left(\sum_{\text{bloc } l} d_u^2\right)^2\right] = 0.$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz appliquée aux vecteurs $v_l = \left(d_u^2\right)_{\text{bloc } l}$ et $1_k$ nous permet alors d'affirmer que :

$$\forall\, l = 1 \ldots b\,,\ \sum_{\text{bloc } l} d_u^4 - \frac{1}{k}\left(\sum_{\text{bloc } l} d_u^2\right)^2 \geqslant 0.$$

avec égalité si et seulement si $v_l$ et $1_k$ sont colinéaires. Ceci nous donne bien la condition géométrique proposée. L'expression affine de $\delta_1/\phi$ découle maintenant de l'application immédiate de la proposition 13.

**Remarque 1.** Lorsque $\eta < +\infty$, il n'est pas contradictoire de considérer un plan d'expérience usuel (*i.e.* régulier par définition) dont chaque bloc est constitué de points équidistants de l'origine. Ce n'est que lorsque **tous** les points sont équidistants de l'origine qu'un tel plan est singulier. *A contrario*, supposer que $\eta = +\infty$ implique que le modèle mixte est alors identifiable au modèle à effets de blocs fixes (voir Tinsson [14] et alors la condition $D = 0$ entraîne la singularité de la matrice des moments.

**Remarque 2.** Remarquons aussi que, bien que l'on ait alors une expression très simple pour $\delta_1/\phi$, le cas particulier $D = 0$ est à éviter en pratique (par exemple par rajout d'un ou plusieurs points centraux) car la valeur propre obtenue à la proposition 14 n'est plus bornée lorsque $\eta$ tend vers $+\infty$.

Le résultat suivant découle alors de la proposition 13 :

**Proposition 15.** *Considérons un plan d'expérience usuel en blocs de même taille dont au moins un bloc n'est pas constitué de points équidistants de l'origine. Les* **critères de A, D, et E-efficacité** *sont alors donnés par (avec $C_A$ et $C_D$ définis à la proposition* 10*, $A$ et $D$ définis à la proposition* 13*) :*

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{i)} & \psi_1(\eta) = \dfrac{1}{q-1}\left(C_A + \dfrac{1+k\eta}{A+D\eta}\right) \\[2ex] \text{ii)} & \psi_0(\eta) = \left(C_D\,\dfrac{1+k\eta}{A+D\eta}\right)^{\frac{1}{q-1}} \\[2ex] \text{iii)} & \psi_\infty(\eta) = \max\left(\dfrac{1}{n\lambda_2}, \dfrac{1}{n\lambda_4}, \dfrac{1}{n\,(c-1)\,\lambda_4}, \dfrac{1+k\eta}{A+D\eta}\right) \end{array}}$$

## 4. Exemples d'applications

### *4.1. Efficacité relative*

Cette partie propose des exemples issus de la classe des plans d'expérience composites centrés. Nous nous intéressons principalement aux variations d'efficacité induites par le paramètre $\eta$ et par la distance $\alpha$ des points axiaux au centre du domaine. Désignons alors la $\psi_p$-efficacité d'un tel plan par $\psi_p(\eta, \alpha)$ et supposons que $\alpha$ est à valeurs dans un ensemble $E \subset I\!R^+$. Notre objectif est de représenter graphiquement et d'interpréter la fonction **d'efficacité relative** donnée par :

$$\overline{\psi_p}(\eta, \alpha) = \frac{\psi_p(0, \alpha^*)}{\psi_p(\eta, \alpha)} \text{ avec } \alpha^* = Arg \ \min\{\psi_p(0, \alpha), \ \alpha \in E\}.$$

En d'autres termes, nous ramenons donc l'efficacité $\psi_p(\eta, \alpha)$ de notre plan à la meilleure efficacité obtenue pour le modèle simple. D'après la proposition 8 nous savons que, à $\alpha$ fixé, $\psi_p$ est une fonction croissante de $\eta$. Nous en déduisons que $\overline{\psi_p}$ est une fonction décroissante de $\eta$, prenant ses valeurs dans l'intervalle $]0, 1]$.

### *4.2. Premier exemple*

Afin de ne pas alourdir inutilement les calculs nous considérons ici un plan composite centré à 3 facteurs et deux blocs de même taille, tel que :

$$\begin{cases} \text{Bloc 1 : partie factorielle complète} & \text{(8 points)}, \\ \text{Bloc 2 : partie axiale et 2 points centraux} & \text{(8 points)}. \end{cases}$$

Pour les différentes dimensions de ce plan, nous avons donc :

$$m = 3 \, , n = 16 \, , b = 2 \, , k = 8 \, , q = 10.$$

De même, il vient (*cf.* définition 2) :

$$n\lambda_2 = 8 + 2\alpha^2 \, , n\lambda_4 = 8 \, , c = 1 + \alpha^4/4 \text{ et } \mu_1 = 1 \, , \mu_2 = \alpha^2/4.$$

Enfin, les cœfficients $A$ et $D$ de la proposition 13 sont donnés par :

$$A = 12 - 6\alpha^2 + 5\alpha^4/4 \text{ et } D = 4\alpha^4.$$

Nous allons étudier le comportement de ce plan lorsque $\eta \in [0, 2]$ et $\alpha \in [0.5; 3]$. Nous excluons ici les faibles valeurs de $\alpha$ car il est bien connu, pour le modèle simple, que les plans obtenus alors sont très peu efficaces. D'après la proposition 8, il ne peut donc en être autrement avec le modèle mixte.

**D-efficacité.** Une représentation graphique de la D-efficacité relative est donnée à la figure 1. Nous constatons le caractère très régulier de la surface obtenue. Nous voyons aussi qu'un choix optimal pour $\alpha$ consiste à prendre la plus grande valeur possible. Ce

résultat est conforme à ce qui est connu pour le modèle simple puisqu'alors le critère de D-efficacité est d'autant meilleur que les points axiaux sont rejetés aux limites du domaine expérimental (voir par exemple Lucas [10]).

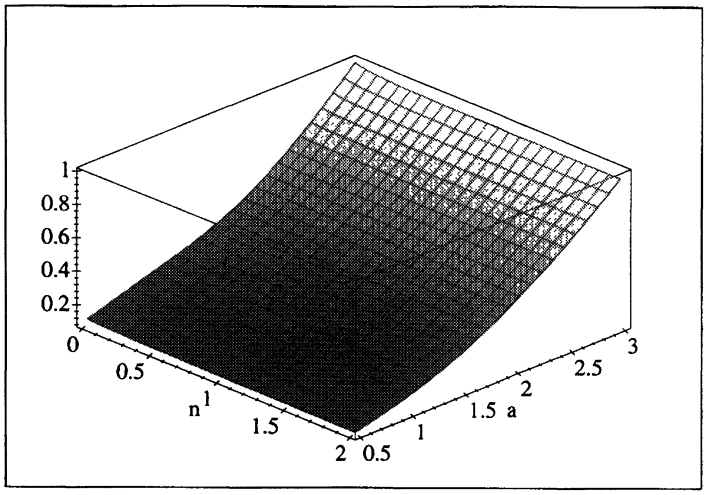


FIGURE 1
*D-efficacité relative.*

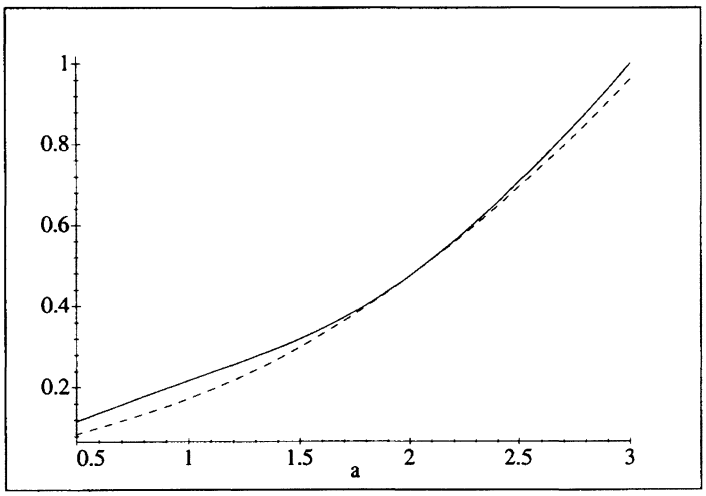


FIGURE 2
*D-efficacité relative, $\eta$ fixé.*
$\eta = -\ 0, -\ -\ 2.$

Des coupes de cette surface, pour $\eta$ fixé aux valeurs extrêmes 0 et 2, sont proposées à la figure 2. On constate alors que l'on obtient toujours, à $\eta$ fixé, une courbe croissante en $\alpha$. Cette courbe se revèle de plus être **peu sensible** au choix du paramètre $\eta$. Par exemple, le choix optimal $\alpha = 3$ nous conduit dans le pire des cas ($\eta = 2$) à une efficacité relative de 0.961 (l'augmentation entre $\psi_0\,(0,3)$ et $\psi_0\,(2,3)$ est donc de 4.1 %). Nous remarquons de plus que les courbes obtenues passent toujours par un point fixe ayant 2 pour abscisse. Ceci s'explique par le fait que lorsque $\alpha = 2$ on obtient $\mu_1 = \mu_2$. Le plan est alors bloqué orthogonalement et admet donc une D-efficacité indépendante de $\eta$ (*cf.* proposition 11).

**A-efficacité.** La représentation graphique de la A-efficacité relative (figure 3) nous donne, là aussi, une surface très régulière prenant de grandes valeurs quand le paramètre $\alpha$ est voisin de 3. Lorsque $\alpha$ se situe approximativement dans l'intervalle $[0.9, 1.5]$, la A-efficacité se révèle alors plus sensible que la D-efficacité au choix du paramètre $\eta$ (*cf.* figure 4). Pour $\alpha = 1$ nous passons d'une efficacité relative de 0.287 ($\eta = 0$) à 0.186 ( $\eta = 2$). Ceci représente donc une augmentation de 54 % entre $\psi_1\,(0,1)$ et $\psi_1\,(2,1)$. Par contre, $\psi_1$ est très peu sensible à $\eta$ lorsque $\alpha = 3$ puisque pour $\eta = 2$ on obtient une efficacité relative de 0.986 (l'augmentation entre $\psi_1\,(0,3)$ et $\psi_1\,(2,3)$ est donc de 1.4 %).

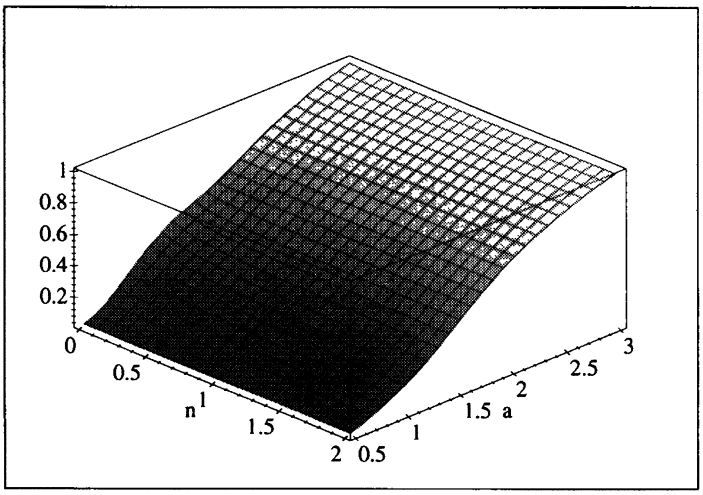


FIGURE 3
*A-efficacité relative.*

**E-efficacité.** Le comportement de la E-efficacité relative (*cf.* figure 5) est plus irrégulier que celui des deux efficacités précédentes. Ceci s'explique, de manière classique, par la définition même de la E-efficacité. La propriété remarquable de la figure 5 vient du plateau existant pour $\alpha \geqslant 2$. Comme ce plateau correspond à une efficacité relative de 1, nous en déduisons que le choix du paramètre $\alpha$ dans l'intervalle $[2, 3]$ est ici très judicieux puisqu'il permet d'obtenir une E-efficacité **uniformément optimale** en $\eta$.

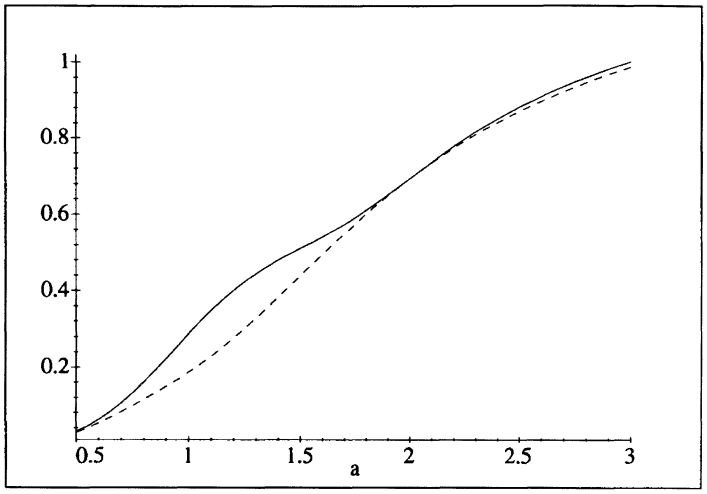


FIGURE 4
*D-efficacité relative, $\eta$ fixé.*
$\eta = -0, - - 2.$

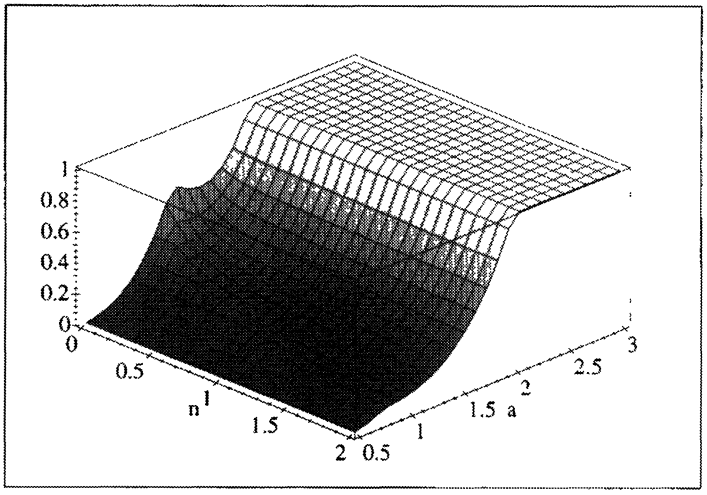


FIGURE 5
*E-efficacité relative.*

La figure 6 nous montre que, par contre, il est tout à fait déconseillé de prendre des valeurs de $\alpha$ sensiblement inférieures à 2. Par exemple, la plus grande perte de précision lors du passage de $\eta = 0$ à $\eta = 2$ est obtenue lorsque $\alpha \simeq 1.287$ (ceci est l'abscisse du pic de la courbe en $\eta = 0$, elle correspond à l'égalité des valeurs propres : $1/n\,(c-1)\,\lambda_4 = 1/A \Leftrightarrow 2\alpha^4 = 12 - 6\alpha^2 + 5\alpha^4/4$). On passe alors d'une efficacité relative de 0.686 ($\eta = 0$) à 0.202 ($\eta = 2$). Ceci représente donc une très importante augmentation de 240 % entre $\psi_\infty\,(0, 1.287)$ et $\psi_\infty\,(2, 1.287)$.

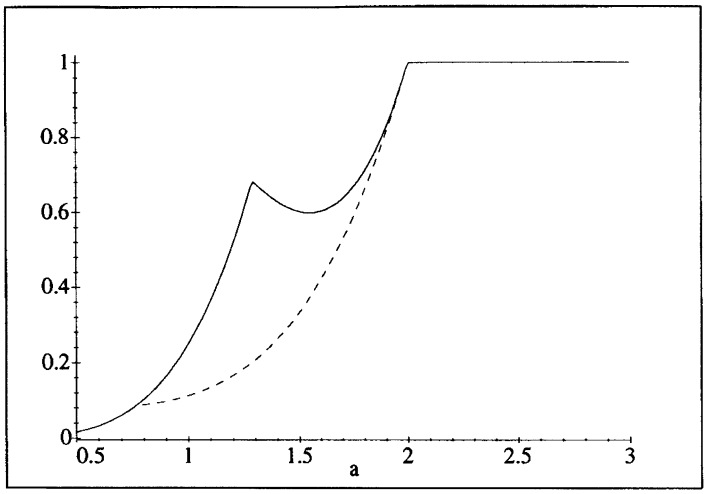


FIGURE 6
*E-efficacité relative, $\eta$ fixé.*
$\eta = -\ 0, -\ -\ 2.$

### *4.3. Deuxième exemple*

Considérons maintenant le plan composite centré à 4 facteurs tel que :

$$\begin{cases} \text{Bloc 1 : partie factorielle complète} & \text{(16 points)}, \\ \text{Bloc 2 : partie axiale dupliquée} & \text{(16 points)}. \end{cases}$$

Ce plan d'expérience est caractérisé par les quantités suivantes :

$$\begin{cases} m = 4\,,\, n = 32\,,\, b = 2\,,\, k = 16\,,\, q = 15, \\ n\lambda_2 = 16 + 4\alpha^2\,,\, n\lambda_4 = 16\,,\, c = 1 + \alpha^4/4 \text{ et } \mu_1 = 1\,,\, \mu_2 = \alpha^2/4, \\ A = 32 - 16\alpha^2 + 2\alpha^4 \text{ et } D = 0. \end{cases}$$

Remarquons que le fait d'obtenir $D = 0$ est bien en accord avec la proposition 14 puisque tous les blocs de ce plan sont constitués de points équidistants de l'origine. Intéressons-nous, une nouvelle fois, au comportement des différentes efficacités lorsque $\eta \in [0, 2]$ et $\alpha \in [0.5; 3]$.

**D-efficacité.** La figure 7 met en évidence une surface nettement plus irrégulière que celle obtenue avec le plan précédent. De plus, l'efficacité relative pour $\eta$ fixé n'est plus croissante puisqu'elle semble atteindre un minimum pour $\alpha = 2$ (*cf.* figure 8 où nous avons représenté cette fois trois coupes en $\eta$).

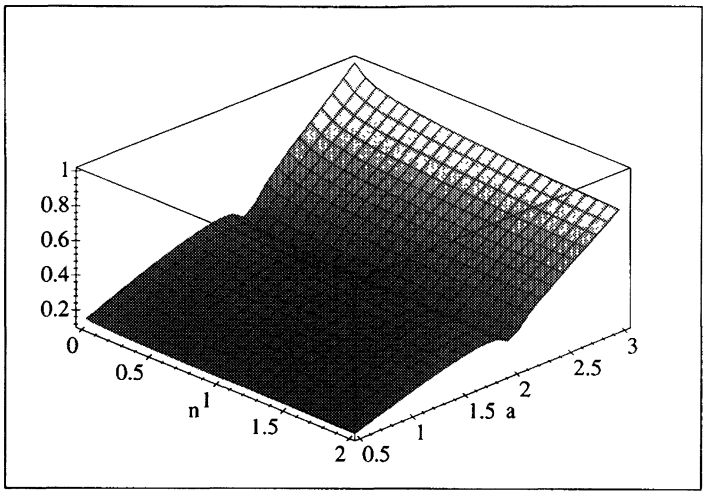


FIGURE 7
*D-efficacité relative.*

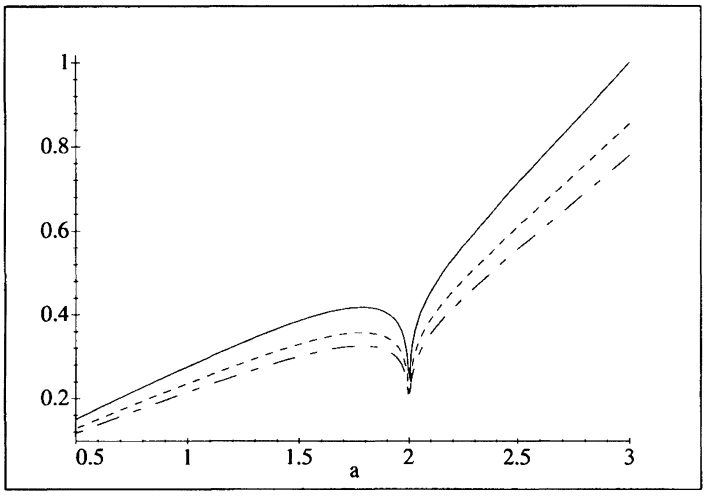


FIGURE 8
*A-efficacité relative, $\eta$ fixé.*
$\eta = -\ 0, - -\ 0.5, -\ .\ -\ 2.$

Ce résultat est étonnant, à priori, car $\alpha = 2$ correspond une nouvelle fois au blocage orthogonal ($\mu_1 = \mu_2$). Cependant, vu que le plan utilisé ici ne comporte aucun point central, poser $\alpha = 2$ nous conduit aussi à la situation (critique) où tous les points sont à la même distance de l'origine. Le plan est alors **singulier** et sa D-efficacité relative n'est donc pas définie. Lorsque $\alpha$ est au voisinage de 2, nous savons que $A \to 0^+$ (*cf.* remarque page 67) et donc $\delta_1/\phi \to +\infty$ (*cf.* proposition 14). C'est pourquoi on a alors $\psi_0(\eta, \alpha) \to +\infty$, ce qui entraîne que l'efficacité relative tend vers 0 (remarquons

que ce comportement asymptotique est ici mal rendu par les graphiques « point par point »). Il est donc clair qu'il faut, quelle que soit la valeur de $\eta$, éviter de se placer au voisinage de $\alpha = 2$. Cependant, nous constatons aussi que le choix optimal de $\alpha = 3$ reste peu satisfaisant ici puisque, pour $\eta = 2$, l'efficacité relative est de $0.779$ (l'augmentation entre $\psi_0\,(0,3)$ et $\psi_0\,(2,3)$ est donc de $28.4\,\%$). Cette dégradation de la qualité, bien plus importante que celle obtenue pour le plan de la section 4.2, est une conséquence de la proposition 14 (voir la remarque 2 de la page 68).

**A-efficacité.** La représentation graphique de la A-efficacité relative est donnée à la figure 9. Comme pour le cas de la D-efficacité nous retrouvons ici, bien entendu, une convergence vers 0 lorsque $\alpha$ tend vers 2. Pour des valeurs de $\alpha$ différentes de 2, nous constatons que la A-efficacité est nettement plus sensible aux variations de $\eta$ que la D-efficacité. Ceci est particulièrement flagrant pour le choix optimal $\alpha = 3$ où l'on obtient une A-efficacité relative de $0.429$ lorsque $\eta = 2$ (l'augmentation entre $\psi_1\,(0,3)$ et $\psi_1\,(2,3)$ est donc de $133\,\%$).

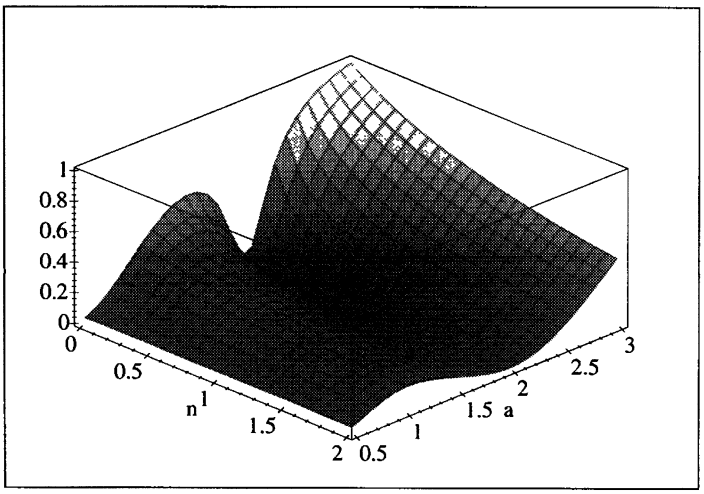


FIGURE 9
*A-efficacité relative.*

**E-efficacité.** L'étude de la E-efficacité (*cf.* figures 11 et 12) met en lumière, de manière encore plus flagrante, les insuffisances liées au choix d'un plan ne contenant pas au moins un point central. En effet, nous constatons que pour $\alpha > 2$ nous n'obtenons plus la très intéressante propriété de E-efficacité uniformément optimale en $\eta$ de la section 4.2 (il n'y a plus de plateau).

De plus, les résultats se dégradent de manière extrêmement rapide en $\eta$ puisque pour $\alpha = 3$ et $\eta = 2$ la E-efficacité relative est de $0.095$ (l'augmentation entre $\psi_\infty\,(0,3)$ et $\psi_\infty\,(2,3)$ est donc de $953\,\%$!). Ces très mauvais résultats s'expliquent toujours à l'aide de la proposition 14 : la valeur propre $\delta_1/\phi$, affine en $\eta$, prend ici de grandes valeurs lorsque $\eta > 0$ (car le rapport $k/A$ est grand par rapport aux autres

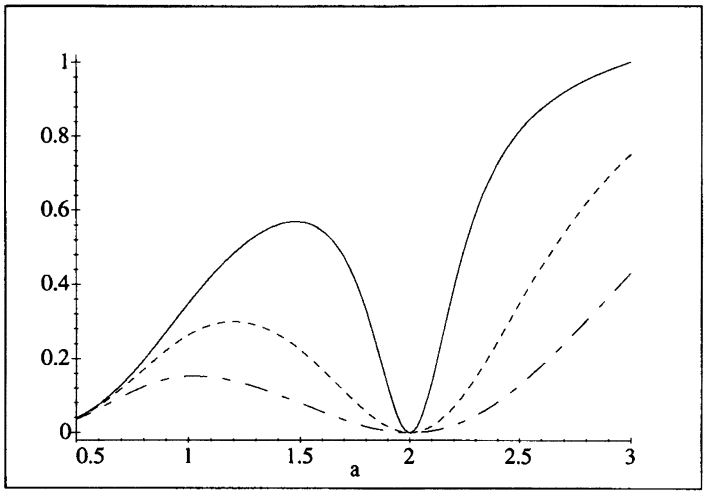


FIGURE 10
*A-efficacité relative, $\eta$ fixé.*
$\eta = -\ 0, - -\ 0.5, -\ .\ -\ 2.$

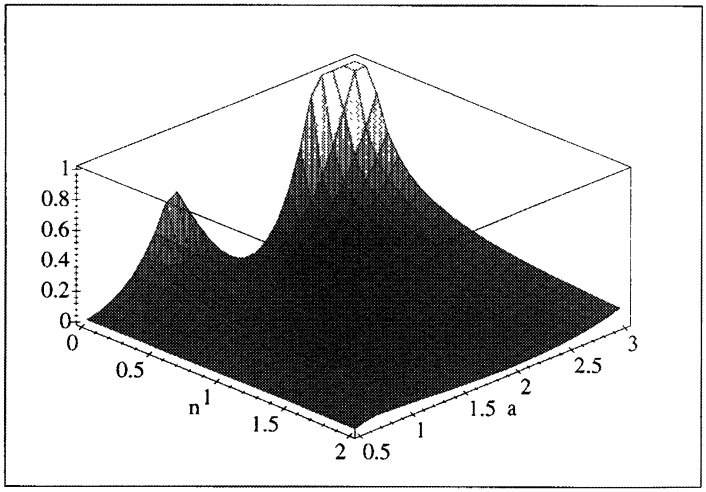


FIGURE 11
*E-efficacité relative.*

valeurs numériques). Il en découle que, par définition, la E-efficacité est alors mesurée uniquement à l'aide de la valeur de $\delta_1/\phi$. A titre d'exemple, pour $\alpha = 3$ les valeurs propres de la matrice des covariances sont alors :

$$1/n\lambda_2 \simeq 0.019,\ 1/n\lambda_4 \simeq 0.063,\ 1/n\,(c-1)\,\lambda_4 \simeq 0.003,\ \delta_1/\phi = 0.02 + (0.32)\,\eta.$$

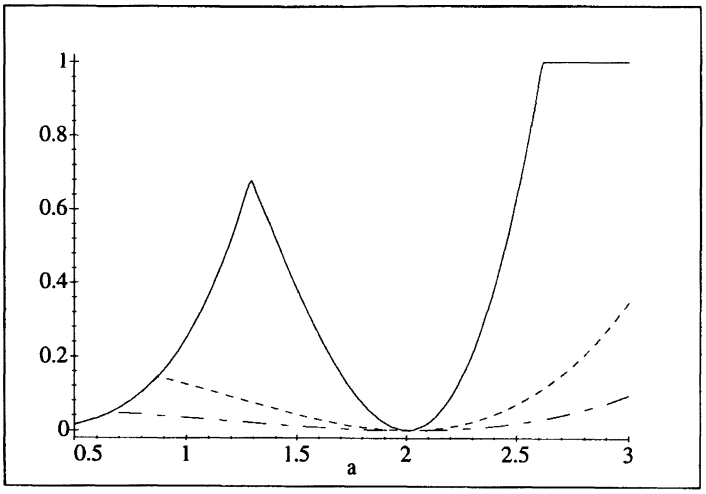


FIGURE 12
*E-efficacité relative, $\eta$ fixé.*
$\eta = -\ 0, - -\ 0.5, -\ .\ -\ 2.$

Nous en déduisons que $\delta_1/\phi$ est la plus grande des valeurs propres dès lors que $\eta \geqslant 0.134$ et alors :

$$\psi_\infty(\eta, 3) = \delta_1/\phi = 0.02 + (0.32)\,\eta.$$

## Références

[1] ATKINSON A.C. et DONEV A.N. (1992), *Optimum experimental designs.* Clarendon Press, Oxford.

[2] BOX G.E.P. et DRAPER N. (1987), *Empirical model-building and response surfaces.* John Wiley, New-York.

[3] CHENG C.S. (1995), Optimal regression designs under random block-effects models. *Statistica Sinica*, Vol 5, 485-497.

[4] CHRISTENSEN R. (1987), *Plane answers to complex questions.* Springers Texts in Statistics, Springer-Verlag.

[5] COLLOMBIER D. (1996), *Plans d'expérience factoriels* . Mathématiques et Applications, 21, Springer.

[6] COLLOMBIER D. et TINSSON W. (1997), Propriétés caractéristiques de plans d'expérience en blocs à facteurs quantitatifs. *Revue de Statistique Appliquée* , XLV (1), 75-96.

[7] HEDAYAT A. (1981), Study of optimality criteria in design of experiments. *Statistics and Related Topics* (M. Gsörgö *et al.* eds.), North Holland, Amsterdam, 39-56.

[8] KHURI A.I. (1992), Response surface models with random block effects. *Technometrics*, Vol. 34, No.1, 26-37.

[9] KHURI A. et CORNELL J. (1996), *Response Surfaces : designs and analyses*. Dekker, Statistics : Textbooks and Monographs No 152, New York.

[10] LUCAS J.M. (1974), « Optimum composite designs ». *Technometrics*, Vol. 16, 561-567.

[11] LUCAS J.M. (1976), « Which response surface design is best ». *Technometrics*, Vol. 18, 411-417.

[12] PUKELSHEIM F. (1993), *Optimal design of experiments*. Wiley.

[13] SEARLE S.R., CASELLA G. et MCCULLOCH C.E. (1992), *Variance Components*. Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics.

[14] TINSSON W. (1998), « Plans d'expérience à facteurs quantitatifs et à effets de blocs aléatoires ». *Thèse de doctorat*. Université de Pau et des Pays de l'Adour. Décembre 1998.

[15] TINSSON W. (1999), « Prédiction de la réponse moyenne au moyen d'un plan d'expérience à facteurs quantitatifs et effets de blocs aléatoires ». *Revue de Statistique Appliquée* , XLVII (4), 47-67.

[16] TINSSON W. (1999), « Prediction of the variations of the mean response by using experimental design with quantitative factors and random block effects ». *Communications in Statistics : Theory and Methods*, publication soumise.