REVUE DE STATISTIQUE APPLIQUÉE

L. PERREAULT

Intervalles de confiance partiellement adaptatifs pour un paramètre de position

Revue de statistique appliquée, tome 48, nº 1 (2000), p. 29-48

<http://www.numdam.org/item?id=RSA_2000__48_1_29_0>

© Société française de statistique, 2000, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Revue de statistique appliquée » (http://www.sfds.asso.fr/publicat/rsa.htm) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Rev. Statistique Appliquée, 2000, **XLVIII** (1), 29-48

INTERVALLES DE CONFIANCE PARTIELLEMENT ADAPTATIFS POUR UN PARAMÈTRE DE POSITION

L. Perreault *,**

** ENGREF, laboratoire de Gestion du Risque en Sciences de l'Eau (GRESE)*
19 avenue du Maine, 75732 Paris, Cedex 15
perreault@engref.fr
*** INRS-Eau, Université du Québec,*
Institut National de la Recherche Scientifique,
2800, rue Einstein, C.P. 7500, Ste-Foy (Qué), Canada, G1V 4C7.

RÉSUMÉ

Les estimateurs adaptatifs ont retenu l'attention de nombreux chercheurs ces vingt dernières années. Cependant, il n'en est pas de même des tests et des intervalles de confiance adaptatifs pour un paramètre de position. Nous nous proposons dans cette étude de construire des intervalles de confiance partiellement adaptatifs pour un paramètre de position, à partir de statistiques de rangs et de moyennes tronquées. La construction d'intervalles de confiance partiellement adaptatifs fait intervenir une statistique de sélection. Celle-ci est employée pour choisir, parmi un ensemble d'intervalles, celui qui est le plus approprié pour la loi dont semble provenir les observations. Nous montrons, au moyen de simulations, que si le choix de l'intervalle à considérer est fait à partir d'un sous-ensemble de l'échantillon, il est alors possible de construire des intervalles ayant un niveau réel proche du niveau nominal. Nous présentons en outre des comparaisons d'efficacité de ces intervalles pour de petites tailles d'échantillon. Il en ressort que l'intervalle construit à partir des statistiques de rangs se comporte bien pour l'ensemble des lois symétriques considérées, alors que la performance des autres intervalles, dont l'intervalle usuel de Student, varie selon la forme des lois.

Mots-clés : *Intervalles de confiance, adaptation, robustesse, R-estimateurs, préordres, moyennes tronquées.*

ABSTRACT

While adaptive point estimation has been addressed extensively in the literature, adaptive confidence intervals for a location parameter has been less widely covered. In this paper, we propose partially adaptive confidence intervals based on rank statistics and trimmed means. To construct a partially adaptive confidence interval, we must first consider a limited number of intervals, which are known to be asymptotically efficient for different probability distributions. Then, a selection statistic is used to choose among the intervals. Using Monte-

Carlo simulations, we first show that if the selection process is based on a sub-sample, it is then possible to obtain confidence intervals with observed confidence level approximately equal to the real one. Efficiency of the partially adaptive confidence intervals are then compared for small sample sizes. The interval based on rank statistics is seen to well behave for a set of different probability distributions, while the efficiency of the others, including the classical Student interval, seems to strongly depend on the shape of the distribution.

Keywords : *Confidence intervals, adaptation, robustness, R-estimators, tail ordering, trimmed means.*

1. Introduction

L'estimation d'un paramètre de position joue un rôle important en statistique. Aussi de nombreuses études ont-elles été publiées sur ce sujet depuis trente ans. On pense notamment à celle de Andrew et coll. (1972) dans laquelle plusieurs estimateurs avaient été comparés au moyen de simulations. Cette étude et d'autres plus récentes ont mis en lumière les propriétés intéressantes des estimateurs adaptatifs dont l'idée originale remonte principalement à Stein (1956). On entend ici par estimateur adaptatif un estimateur qui est asymptotiquement efficace pour un vaste ensemble de lois; voir par exemple Bickel (1982) pour une définition précise. Le principe de l'estimation adaptative consiste à utiliser la configuration d'un échantillon pour choisir un estimateur asymptotiquement efficace pour la loi dont semble provenir les observations. Il y a différentes façons d'utiliser cette configuration mais en général, la construction d'estimateurs adaptatifs nécessite des échantillons de grande taille. Aussi plusieurs statisticiens se sont-ils tournés vers les estimateurs partiellement adaptatifs qui ne sont asymptotiquement efficaces que pour une classe assez petite de lois, mais qui possèdent de bonnes propriétés pour des échantillons de petites tailles; Jaeckel (1971), Hogg (1967) et (1974), Prescott (1978), Loh (1984), Kappenman (1986). La construction d'estimateurs partiellement adaptatifs se fait généralement en considérant un ensemble d'estimateurs asymptotiquement efficaces pour les lois retenues et, à partir des observations, en choisissant dans cet ensemble l'estimateur le meilleur, comme par exemple celui dont l'estimation de la variance asymptotique est la plus petite.

Dans la section 2, en nous inspirant des travaux de Gastwirth (1965) et de Policello et Hettmansperger (1976), nous considérons des intervalles de confiance déduits de tests de rangs. Ensuite, à partir des observations, nous choisissons l'intervalle dont le R-estimateur de type Hodges-Lehmann correspondant possède la plus petite variance asymptotique estimée. Nous montrons, au moyen de simulations, que si ce choix se fait seulement à partir d'une partie de l'échantillon, l'intervalle adaptatif a alors un niveau réel sensiblement égal au niveau nominal, ce qui n'est pas le cas autrement. Dans la section suivante, nous décrivons deux types d'intervalles de confiance partiellement adaptatifs à partir des approches de Jaeckel (1971) et de Hogg (1974). Ces intervalles sont construits par la méthode du pivot appliquée à des moyennes tronquées. La principale difficulté réside alors dans l'approximation de la loi de ces pivots afin que l'intervalle partiellement adaptatif résultant ait un niveau de confiance réel égal ou assez proche du niveau nominal, et ce pour un ensemble de lois diverses. Enfin, la section 4 est consacrée à la comparaison de ces trois types

d'intervalles entre eux et avec l'intervalle de Student, à partir de simulations de lois symétriques assez diverses allant de la loi uniforme à des lois normales contaminées à queues lourdes. Il en ressort, entre autres, que l'intervalle basé sur les rangs des observations est valide (niveau de confiance réel proche du nominal) et efficace (longueur moyenne assez petite) pour l'ensemble des lois considérées.

2. Intervalle de confiance adaptatif déduit de tests de rangs

Soient F une loi continue et symétrique par rapport à l'origine, θ un paramètre de position et $X_1, \ldots, X_n$ un échantillon aléatoire de loi $F(x;\theta) = F(x-\theta)$. Désignons par s la fonction indicatrice de l'intervalle $[0, +\infty]$ et par R_i le rang de $|X_i|$ dans la suite $|X_1|, |X_2|, \ldots, |X_n|$. Une statistique linéaire de rangs signés appropriée pour tester une hypothèse sur le paramètre θ s'écrit sous la forme

$$T(J_n) = \sum_{i=1}^{n} J_n\left(\frac{R_i}{n+1}\right) s(X_i),$$

où J_n est une fonction à valeurs réelles croissante sur l'intervalle $[0, 1]$ et telle que $J_n(0) = 0$. Ainsi, un test bilatéral symétrique de seuil β permettant de confronter les hypothèses $H_0 : \theta = 0$ et $H_1 : \theta \neq 0$ admet pour région de non-rejet l'intervalle ouvert

$$\left]c(\beta/2, J_n)\,; \sum_{i=1}^{n} J_n\left(\frac{i}{n+1}\right) - c(\beta/2, J_n)\right[\tag{1}$$

la constante $c(\beta/2, J_n)$ vérifiant

$$\mathrm{Prob}_{H_0}\{T(J_n) \leqslant c(\beta/2, J_n)\} = \frac{\beta}{2}.$$

Considérons maintenant les variables aléatoires $X_1 - \theta, \ldots, X_n - \theta$, les rangs $R_1(\theta), \ldots, R_n(\theta)$ de leurs valeurs absolues et la variable aléatoire

$$T(\theta, J_n) = \sum_{i=1}^{n} J_n\left(\frac{R_i(\theta)}{n+1}\right) s(X_i - \theta).$$

Comme fonction de θ, $T(\theta, J_n)$ est une fonction en escalier, décroissante, dont l'ensemble des discontinuités est $\left\{\frac{X_{(i)} + X_{(j)}}{2}; 1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n\right\}$ et dont l'amplitude du saut en $\frac{X_{(i)} + X_{(j)}}{2}$ est égale à $\delta_{ij} = J_n\left(\frac{j-i}{n+1}\right) - J_n\left(\frac{j-i+1}{n+1}\right)$, $X_{(i)}$, désignant la $i^{\text{ème}}$ statistique d'ordre de l'échantillon (Bauer, 1972).

A partir de la fonction $T(\theta, J_n)$, on peut construire aisément un intervalle de confiance pour θ, de niveau $1-\beta$, qui est donné par

$$IC(J_n, \beta) = \left\{ \theta; T(\theta, J_n) \in \left] c(\beta/2, J_n); \sum_{i=1}^{n} J_n\left(\frac{i}{n+1}\right) - c(\beta/2, J_n) \right[\right\}.$$

On peut aussi déduire de cette fonction $T(\theta, J_n)$ un R-estimateur $\hat{\theta}(J_n)$ qui n'est autre que la médiane de la loi discrète qui affecte le poids $\dfrac{\delta_{ij}}{\sum_{i \leqslant j} \delta_{ij}}$ à chaque demi-somme $\dfrac{X_{(i)} + X_{(j)}}{2}$ (Jaeckel, 1969). Sous certaines conditions de régularité sur la loi F et sur la fonction score J_n, la loi asymptotique de $\sqrt{n}(\hat{\theta}(J_n) - \theta)$ est une loi normale centrée et de variance (Lehmann, 1983, chap. 5)

$$\sigma^2(J, F) = \frac{\displaystyle\int_0^1 J^2(u)du}{\left[\displaystyle\int_0^1 J'(u) f(F^{-1}(u))du\right]^2}$$

où $J(u) = \lim_{n \to +\infty} J_n(u)$ et f est la fonction de densité de probabilité. De plus, l'estimateur $\hat{\theta}(J_n)$ dont la fonction score limite J est donnée par

$$\forall\, u \in (0,1), \qquad J(u) = -\frac{f'}{f}\left(F^{-1}\left(\frac{1+u}{2}\right)\right)$$

est asymptotiquement efficace pour la loi F d'où proviennent les observations (Capéraà et Van Cutsem, 1988, chap.4). On déduit des résultats de Sen (1966) et de Policello et Hettmansperger (1976) qu'un estimateur convergent de $\sigma(J, F)$ est le rapport de la longueur $L(J_n, \beta)$ de l'intervalle de confiance $IC(J_n, \beta)$ par la longueur de la région de non-rejet définie en (1), le tout multiplié par l'écart-type de $\sqrt{n}T(J_n)$ sous l'hypothèse H_0, soit :

$$\hat{\sigma}_n(J, \beta) = \frac{L(J_n, \beta)\left[n \displaystyle\sum_{i=1}^{n} J_n^2\left(\frac{i}{n+1}\right)\right]^{\frac{1}{2}}}{2\left[\displaystyle\sum_{i=1}^{n} J_n\left(\frac{i}{n+1}\right) - 2c(\beta/2, J_n)\right]} \tag{2}$$

La construction d'un intervalle de confiance partiellement adaptatif pour θ nécessite un ensemble S de «bons» estimateurs de ce paramètre et un procédé de sélection qui, à partir de l'échantillon $X_1, \ldots, X_n$, permet de choisir le «meilleur» estimateur de S pour ces observations.

La famille S adoptée dans cette étude est composée des R-estimateurs dont les fonctions scores sont les suivantes

$$J_{1,v,n}(u) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad 0 \leqslant u < \dfrac{k(n)+1}{n+1} \\ \dfrac{i-k(n)}{n-k(n)+1} & \text{si} \quad \dfrac{i}{n+1} \leqslant u \leqslant \dfrac{i+1}{n+1}, \; i \in \{k(n)+1, \ldots, n\} \end{cases}$$

où $v \in [1/n, 1]$ et $k(n)$ est égal à la partie entière de $nv - 1$, et

$$J_{2,v,n}(u) = \begin{cases} \dfrac{i}{n-k(n)-1} & \text{si} \; \dfrac{i}{n+1} \leqslant u < \dfrac{i+1}{n+1}, \; i \in \{0, 1, \ldots, n-k(n)-2\} \\ 1 & \text{si} \; \dfrac{n-k(n)-1}{n+1} \leqslant u \leqslant 1. \end{cases}$$

où $v \in [0, (n-1)/n]$. Les fonctions scores limites sont alors respectivement

$$J_{1,v}(u) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad 0 \leqslant u \leqslant v, \\ \dfrac{u-v}{1-v} & \text{si} \quad v < u \leqslant 1 \end{cases} \tag{3}$$

et

$$J_{2,v}(u) \begin{cases} \dfrac{u}{1-v} & \text{si} \quad 0 \leqslant u < 1-v, \\ 1 & \text{si} \quad 1-v \leqslant u \leqslant 1, \end{cases} \tag{4}$$

Ces fonctions scores ont d'abord été proposées par Gastwirth (1965) et reprises, entre autres, par Policello et Hettmansperger (1976). Cette famille de statistiques linéaires de rangs contient des statistiques dont les fonctions scores peuvent être convexes ($J_{1,v}$) ou concaves ($J_{2,v}$). Elle possède plusieurs avantages. Tout d'abord, les fonctions scores sont simples, ce qui en pratique est fort désirable. En effet, pour les deux types, certains scores sont constants et les autres sont des scores de Wilcoxon. Les R-estimateurs sont donc facilement déduits de cette famille de statistiques et ont, par le fait même, une forme simple. De plus, cette famille nous permet la construction d'intervalles de confiance en utilisant les tables usuelles de Wilcoxon. Le fait que la famille S soit constituée de statistiques linéaires de rangs dont les fonctions scores sont soit convexes, soit concaves, est aussi un avantage qui motive son utilisation. Les fonctions scores convexes affectent plus de poids aux observations extrêmes alors que les fonctions scores concaves favorisent les observations centrales. Les statistiques linéaires de rangs de la famille S peuvent donc être utilisées pour un ensemble de lois dont le poids aux extrémités varie considérablement. Les propositions apparaissant à l'annexe A montrent effectivement que les R-estimateurs déduits de cette famille sont asymptotiquement efficaces pour un ensemble de lois, ordonné par l'ordre $<_s$ de van Zwet (1964), allant de la loi uniforme à la loi double-exponentielle.

Le procédé de sélection d'un élément de S consistant à choisir «le meilleur» dans cette famille pour les observations obtenues, il semble naturel d'adopter l'estimateur dont l'estimation de la variance asymptotique définie en (2) est la plus petite. Remarquons cependant que si, d'après Huber (1970) et Antille (1972), la loi asymptotique de $\sqrt{n}\left(\frac{\hat{\sigma}_n^2(J,\beta)}{\sigma^2(J,F)}-1\right)$ est une loi normale indépendante de β, il en est tout autrement de la loi de cet estimateur pour des tailles d'échantillon finies (Draper, 1988). Aussi faut-il faire le choix d'un niveau de confiance $1-\beta'$ pour l'estimateur $\hat{\sigma}_n(J,\beta')$ qui va servir au procédé de sélection. Pour ce faire, nous avons simulé 200 échantillons de tailles 10, 20 et 40, provenant des lois uniforme, normale, logistique et double-exponentielle. Nous avons ensuite comparé la qualité de sélection des estimateurs $\hat{\sigma}_n(J,\beta')$ pour $\beta' = 0.05, 0.10, 0.20, 0.30, 0.40$ et 0.50, et pour les trois fonctions scores $J_{1,0.5}$, $J_{1,0}$ et $J_{2,1}$. Les résultats de ces simulations nous ont conduits à choisir $\beta' = 0.05$. Dans cette étude nous allons considérer l'intervalle adaptatif de niveau $1-\beta$, noté $R(\beta)$, construit à partir des trois fonctions scores mentionnées ci-dessus et du procédé de sélection utilisant $\hat{\sigma}_n(J,0.05)$. Plus précisément, on a

$$R(\beta) = \begin{cases} IC(J_{1,0.5},\beta), & \text{si} \quad MIN\{\Sigma_R\} = \hat{\sigma}_n(J_{1,0.5},0.05) \\ IC(J_{1,0},\beta), & \text{si} \quad MIN\{\Sigma_R\} = \hat{\sigma}_n(J_{1,0},0.05) \\ IC(J_{2,1},\beta), & \text{si} \quad MIN\{\Sigma_R\} = \hat{\sigma}_n(J_{2,1},0.05) \end{cases} \tag{5}$$

où $\Sigma_k = \{\hat{\sigma}_n(J_{1,0.5},0.05), \hat{\sigma}_n(J_{1,0},0.05), \hat{\sigma}_n(J_{2,1},0.05)\}$.

Comme on peut le remarquer aisément, le procédé de sélection et l'estimateur choisi ne sont pas indépendants. Aussi peut-on s'attendre à ce que l'intervalle partiellement adaptatif résultant ait un niveau de confiance réel $1-\hat{\beta}$ différent du niveau nominal $1-\beta$. De plus, la sélection se faisant en retenant l'estimateur pour lequel $\hat{\sigma}_n(J,0.05)$ est le plus petit, ce qui correspond à l'intervalle dont la longueur (convenablement normalisée) est la plus petite, on devrait observer un niveau de confiance réel plus petit que le niveau nominal correspondant. C'est ce que confirment les résultats de simulations faites à partir de 5000 échantillons de taille 20 pour différentes lois. Les résultats sont présentés au Tableau 1. Afin de corriger ce biais, nous avons atténué la dépendance entre l'estimateur choisi et le procédé de sélection, en ne faisant porter ce dernier que sur la moitié de l'échantillon, c'est-à-dire sur 10 observations tirées au hasard parmi les 20. Ceci améliore sensiblement le niveau réel $1-\hat{\beta}$ qui apparaît entre parenthèses dans le Tableau 1.

La loi F_4 a pour densité $\left[2\Gamma\left(\frac{\tau+1}{\tau}\right)\right]^{-1}\exp(-|x|^\tau)$ avec $\tau = 4$, et la loi $NC(b)$ est la loi normale contaminée $0.90\Phi(x) + 0.10\Phi(x/b)$.

Dans la section suivante, nous décrivons d'autres intervalles partiellement adaptatifs déduits des approches de Jaeckel (1971) et de Hogg (1974).

TABLEAU 1

Niveau de confiance réel, avec et sans partitionnement de l'échantillon, de l'intervalle déduit de tests de rangs $R(\beta)$ de l'équation (5).

	$1-\beta$		
Lois	0.95	0.90	0.80
Uniforme	92.880 (95.700)	86.920 (91.020)	76.320 (81.520)
F_4	91.880 (94.860)	85.800 (90.080)	75.080 (80.640)
Normale	91.900 (95.240)	85.240 (90.560)	74.820 (81.440)
Logistique	92.840 (95.279)	86.480 (90.882)	75.560 (81.646)
Double-exponentielle	93.200 (95.060)	87.820 (90.620)	77.100 (80.740)
NC(3)	92.860 (95.280)	86.620 (90.740)	75.060 (80.180)
NC(5)	93.320 (95.180)	87.540 (90.580)	75.780 (80.240)
NC(10)	93.680 (95.200)	88.120 (90.280)	76.840 (79.920)

Note : La loi F_4 a pour densité $[2\Gamma((\tau+1)/\tau)]^{-1}\exp(-|x|^\tau)$ avec $\tau = 4$, et la loi *NC(b)* est la loi normale contaminée $0.90\Phi(x) + 0.10\Phi(x/b)$.

3. Autres intervalles partiellement adaptatifs

De nombreux estimateurs adaptatifs ont été proposés au cours des dernières années, pour un paramètre de position, dont plusieurs sont obtenus à partir de moyennes α-tronquées $\overline{X}_{\alpha,n}$ définies par

$$\overline{X}_{\alpha,n} = \frac{1}{n(1-2\alpha)} \sum_{i=k+1}^{n-k} X_{(i)}$$

$X_{(i)}, i \in \{1,\ldots,n\}$ étant la $i^{\text{ème}}$ statistique d'ordre de l'échantillon $X_1,\ldots,X_n$ et α appartenant à $\{k/n; k \in I\!N, 2k < n\}$. Nous allons utiliser ces moyennes tronquées et nous inspirer des approches de Jaeckel (1971) et de Hogg (1974) pour obtenir deux intervalles de confiance partiellement adaptatifs.

Afin de construire un intervalle de confiance pour le paramètre de position θ à partir d'une moyenne α-tronquée $\overline{X}_{\alpha,n}$, il faut d'abord faire le choix d'un bon estimateur $\hat{V}_{\alpha,n}$ de la variance de $\sqrt{n}\overline{X}_{\alpha,n}$, c'est-à-dire d'un estimateur valide pour une classe assez grande de lois. Ensuite, on doit déterminer la loi du pivot

$$\sqrt{n}\frac{\overline{X}_{\alpha,n} - \theta}{\sqrt{\hat{V}_{\alpha,n}}}. \tag{6}$$

En ce qui concerne l'estimateur de la variance de $\sqrt{n}\overline{X}_{\alpha,n}$, Huber (1970), Jaeckel (1971) et Andrews et coll. (1972), entre autres, ont proposé de choisir la variance

α-winzorisée expérimentale définie par

$$\hat{V}_{\alpha,n} = \frac{n}{(n-2k)^2} \left\{ \sum_{i=k+1}^{n-k} (X_{(i)} - \overline{X}_{\alpha,n})^2 + k\left[(X_{(k+1)} - \overline{X}_{\alpha,n})^2 + (X_{(n-k)} - \overline{X}_{\alpha,n})^2\right] \right\} \quad (7)$$

Plusieurs autres estimateurs ont été utilisés pour construire des intervalles de confiance robustes (voir en particulier Gross, 1976), mais dans la présente étude nous adoptons l'estimateur $\hat{V}_{\alpha,n}$ défini en (7). Ce choix est principalement dicté par le fait que, sous des conditions de régularité assez générales (voir par exemple Serfling, 1980, chap.8), la loi asymptotique de $\sqrt{n}(\overline{X}_{\alpha,n} - \theta)$ est la loi normale centrée dont la variance est égale à

$$\sigma_F^2(\overline{X}_\alpha) = \frac{2}{(1-2\alpha)^2} \left\{ \int_0^{F^{-1}(1-a)} x^2 dF(x) + \alpha[F^{-1}(1-\alpha)]^2 \right\}.$$

Par ailleurs, Jaeckel (1971) a montré que l'estimateur $\hat{V}_{\alpha,n}$ converge vers $\sigma_F^2(\overline{X}_\alpha)$ uniformément en α. Dans ces conditions, on peut approcher la loi du pivot (6) par la loi normale $N(0,1)$. Cependant, plusieurs études ont montré que pour de petites tailles d'échantillon, une telle approximation n'est pas adéquate (Tukey et Mclaughlin, 1963, Huber, 1970 et Patel, Mudholkar et Fernando, 1988), la loi de Student à $n-2k-1$ degrés de liberté étant plus appropriée principalement pour $\alpha \in (0, 0.30)$. Ainsi, un intervalle de confiance de niveau nominal $1-\beta$ pour θ est donné par

$$IC_\alpha(\beta) = \left[\overline{X}_{\alpha,n} - t_{n-2k-1,1-\beta/2}\sqrt{\frac{\hat{V}_{\alpha,n}}{n}}; \overline{X}_{\alpha,n} + t_{n-2k-1,1-\beta/2}\sqrt{\frac{\hat{V}_{\alpha,n}}{n}} \right] \quad (8)$$

où $t_{n-2k-1,1-\beta/2}$ est le quantile d'ordre $1-\beta/2$ de la loi de Student à $n-2k-1$ degrés de liberté.

Les moyennes tronquées $\overline{X}_{\alpha,n}$ sont de bons estimateurs d'un paramètre de position pour des lois dont les queues sont plus lourdes que celles de la loi normale. Cependant, pour des lois à queues légères, ces estimateurs ne sont pas appropriés et il est préférable de considérer alors des moyennes tronquées complémentaires définies par

$$\overline{X}^c_{\alpha,n} = \frac{1}{2n\alpha}\left[\sum_{i=1}^{k} X_{(i)} + \sum_{i=n-k+1}^{n} X_{(i)}\right]$$

où α appartient à $\{k/n; k \in I\!N, 2k < n\}$. En utilisant les résultats de Serfling (1980, chap.8) concernant la normalité asymptotique des L-estimateurs, on déduit que la

variance asymptotique de $\sqrt{n}\overline{X}^c_{\alpha,n}$ est

$$\sigma^2_F(\overline{X}^c_\alpha) = \frac{1}{2\alpha^2}\int_{1-\alpha}^{1}[F^{-1}(u) - F^{-1}(1-\alpha)]^2 du$$

que l'on peut l'estimer par

$$\hat{V}^c_{\alpha,n} = \frac{n}{4k^2}\left\{\sum_{i=1}^{k}(X_{(i)} - X_{(k+1)})^2 + \sum_{i=n-k+1}^{n}(X_{(i)} - X_{(n-k)})^2\right\}.$$

Comme pour les moyennes tronquées $\overline{X}_{\alpha,n}$, l'approximation de la loi du pivot $\sqrt{n}(\overline{X}^c_{\alpha,n} - \theta)/\sqrt{\hat{V}^c_{\alpha,n}}$ par la loi normale centrée réduite n'est pas adéquate. Les simulations faites à partir de 1000 échantillons tirés d'une loi normale indiquent que pour de petites valeurs de α, la loi de Sudent à $n-2k-1$ degrés de liberté constitue encore une bonne approximation de la loi du pivot considéré (Perreault, 1991). Ainsi, un intervalle de confiance pour θ de niveau $1-\beta$ est

$$IC^c_\alpha(\beta) = \left[\overline{X}^c_{\alpha,n} - t_{n-2k-1,1-\beta/2}\sqrt{\frac{\hat{V}^c_{\alpha,n}}{n}}; \overline{X}^c_{\alpha,n} + t_{n-2k-1,1-\beta/2}\sqrt{\frac{\hat{V}^c_{\alpha,n}}{n}}\right]. \quad (9)$$

Afin de comparer l'intervalle de confiance adaptatif construit dans la section 2 à partir des rangs à des intervalles basés sur des moyennes tronquées, nous choisissons de retenir deux intervalles de la forme (8), avec $\alpha = 0$ et $\alpha = 0.30$, et un intervalle de la forme (9) avec $\alpha = 0.20$. Mais quel intervalle doit-on sélectionner pour les observations $X_1, \ldots, X_n$?

Jaeckel (1971), dans le cadre de l'estimation ponctuelle de θ, a proposé de choisir la moyenne α-tronquée dont l'estimation de la variance asymptotique est la plus petite pour les données $x_1, \ldots, x_n$ obtenues. Il a justifié cette façon de procéder en montrant que l'estimateur partiellement adaptatif de θ ainsi obtenu est asymptotiquement aussi bon que la moyenne tronquée la meilleure parmi celles retenues pour construire cet estimateur. Dans cette étude, nous adoptons ce procédé de sélection et obtenons un intervalle partiellement adaptatif que nous appelons par la suite «intervalle de type Jaeckel» et que nous notons J :

$$J(\beta) = \begin{cases} IC^c_{0.2}(\beta), & \text{si } MIN\{\Sigma_J\} = \hat{V}^c_{0.2,n} \\ IC^c_0(\beta), & \text{si } MIN\{\Sigma_J\} = \hat{V}^c_{0,n} \\ IC^c_{0.3}(\beta), & \text{si } MIN\{\Sigma_J\} = \hat{V}^c_{0.3,n} \end{cases} \quad (10)$$

où $\Sigma_J = \{\hat{V}^c_{0.2,n}, \hat{V}^c_{0,n}, \hat{V}^c_{0.3,n}\}$.

Il est bon de remarquer toutefois que ce procédé ne conduit pas à sélectionner obligatoirement l'intervalle dont la longueur est la plus petite, puisque celle-ci ne dépend pas seulement de l'estimation de la variance asymptotique, mais aussi de $t_{n-2k-1,1-\beta/2}$.

Hogg (1974) quant à lui suggère d'identifier d'abord le type de loi d'où proviennent les observations par une statistique sensible à certaines caractéristiques de cette loi, notamment le poids des queues, et de choisir ensuite l'estimateur approprié pour cette loi, en l'occurrence une moyenne tronquée. Plus précisément, la statistique utilisée dans notre étude pour identifier le type de loi est

$$Q_n = \frac{\overline{U}(0.2) - \overline{L}(0.2)}{\overline{U}(0.5) - \overline{L}(0.5)}$$

où $\overline{U}(p)$ et $\overline{L}(p)$ sont respectivement les moyennes des np plus grandes et np plus petites statistiques d'ordre. Cette statistique donne le poids relatif des observations extrêmes de l'échantillon par rapport au poids des observations centrales. Le choix de l'estimateur utilisé dans le pivot (6) est alors

$$\begin{cases} \overline{X}^c_{0.2,n} & \text{si} \quad Q_n < 1.70 \\ \overline{X}_n & \text{si} \quad 1.70 \leqslant Q_n < 1.87 \\ \overline{X}_{0.3,n} & \text{si} \quad Q_n \geqslant 1.87. \end{cases}$$

L'intervalle partiellement adaptatif H ainsi obtenu,

$$H(\beta) = \begin{cases} IC^c_{0.2}(\beta) & \text{si } Q_n < 1.70 \\ IC_0(\beta) & \text{si } 1.70 \leqslant Q_n < 1.87 \\ IC_{0.3}(\beta) & \text{si } Q_n \geqslant 1.87 \end{cases} \tag{11}$$

est aussi retenu pour notre étude. Nous l'appelons «intervalle de type Hogg» dans la suite.

Pour ces deux types d'intervalles, la sélection a été faite d'une part avec l'échantillon complet et d'autre part avec la moitié de l'échantillon. Cette dernière approche a permis d'améliorer sensiblement le niveau réel des deux intervalles au prix d'une légère augmentation de la longueur espérée, surtout pour celui du type Jaeckel. Aussi ne présentons-nous les résultats des simulations que pour ce cas. Remarquons que le niveau réel de confiance de l'intervalle du type Jaeckel est assez proche du niveau nominal (voir Tableau 2), ce qui contraste avec les résultats de simulation présentés par Léger et Romano (1990). Il faut cependant noter que ces auteurs ont adopté la loi normale comme loi approximative du pivot et que de plus, ils ont effectué la sélection de l'intervalle à partir de l'échantillon complet. Ceci met en lumière le rôle de la loi de Student comme loi approximative pour des échantillons de petite taille, ainsi que le rôle de la dépendance entre le procédé de sélection des estimateurs et les estimateurs eux-mêmes.

4. Comparaison des intervalles

La comparaison des qualités des intervalles de confiance pour un paramètre de position doit faire intervenir d'une part le niveau de confiance réel (NR) et d'autre part

la longueur moyenne (LM) de chacun des intervalles. On ne peut en effet comparer la longueur de deux intervalles que s'ils ont sensiblement le même niveau de confiance réel. Les quatre intervalles retenus sont : celui de Student (S) obtenu en prenant $\alpha = 0$ dans (8), ceux du type Jaeckel (J) et du type Hogg (H) décrits à la Section 3 (équations (10) et (11) respectivement), et celui déduit de tests de rangs (R) vu à la section 2 (équation (5)). Les comparaisons sont faites à partir de la simulation de 5000 échantillons de tailles 10, 20 et 40 pour chacune des lois mentionnées au Tableau 1 à partir desquels ont été calculés des intervalles de confiance de niveaux nominaux $1 - \beta = 0.80, 0.90, 0.95$. Seuls les résultats pour la taille 20 sont présentés ici, ceux pour les deux autres tailles étant à peu près semblables (Perreault, 1991).

Dans le tableau 2 page suivante apparaissent, pour chaque loi considérée et pour les deux niveaux nominaux 0.90 et 0.95, les niveaux réels (1ère ligne) et la longueur moyenne (2ème ligne) des quatre intervalles. Les longueurs moyennes correspondant au niveau nominal 0.80 sont difficilement comparables car les niveaux réels des intervalles J et H sont assez différents de 0.80 pour les lois uniforme et normales contaminées. Il en est de même de l'intervalle de Student pour les lois normales contaminées mais à un degré moindre. On peut observer ceci sur les graphiques, présentés à l'annexe B, donnant les longueurs moyennes en fonction des niveaux réels. On y retrouve huit graphiques correspondant aux lois considérées sur lesquels sont placés les trois couples (NR, LM) des quatre intervalles. Tous ces points sont identifiés par une lettre (R, J, S et H) et un chiffre qui correspond au niveau de confiance nominal (1 pour 0.95, 2 pour 0.90 et 3 pour 0.80).

Pour ce qui est des niveaux nominaux 0.90 et 0.95, on remarque dans le Tableau 2 que les niveaux réels des quatre intervalles sont très proches de ces deux niveaux. Il est donc possible de comparer leurs longueurs moyennes. Si, par exemple, pour chaque loi et chaque niveau on range les intervalles selon leurs longueurs moyennes et qu'ensuite on fait, pour chacun, la somme des rangs obtenus, on constate que pour les lois à queues légères (les quatre premières) le meilleur intervalle est S, suivi de R, ensuite de H et enfin de J. Pour les lois à queues lourdes l'ordre est R, J, S, H. Il ressort de ceci que l'intervalle du type Hogg ne se comporte pas bien en général et notamment pour les lois à queues lourdes. Cela est dû en partie à la statistique de sélection qui, pour des échantillons de petites tailles, ne discrimine pas bien les lois entre elles. On remarque aussi que l'intervalle J a des performances assez faibles pour les lois à queues légères. À l'inverse, l'intervalle de Student se comporte très bien pour ce type de lois mais montre cependant de grandes faiblesses pour celles qui ont beaucoup de poids dans leurs queues. Enfin, l'intervalle R est le plus stable des quatre et montre un bon comportement pour toutes les lois symétriques considérées. Étant relativement simple à construire, il peut être utilisé avec profit dans la pratique.

Remerciements

Cette étude a été réalisée à l'université Laval, Québec, Canada sous la direction du professeur Philippe Capéraà. L'auteur tient à remercier ce dernier dont les conseils ont orienté une grande partie de ce travail. L'auteur remercie aussi le professeur Christian Genest, deux réviseurs anonymes ainsi que l'éditeur en chef de la RSA pour leurs judicieux conseils.

TABLEAU 2

Niveaux de confiance réels et longueurs moyennes des intervalles de confiance S, H, J et R.

		Intervalles			
Lois	$1-\beta$	S	H	J	R
Uniforme	0.95	95.200 0.538	95.600 0.515	95.560 0.613	95.700 0.522
	0.90	90.840 0.444	91.320 0.420	91.300 0.497	91.020 0.429
F4	0.95	94.560 0.537	94.480 0.576	94.300 0.642	94.860 0.557
	0.90	89.520 0.444	89.700 0.470	89.600 0.520	90.080 0.460
Normale	0.95	94.880 0.925	94.900 1.069	94.520 1.085	95.240 0.997
	0.90	90.000 0.764	89.760 0.871	89.180 0.879	90.560 0.831
Logistique	0.95	95.520 1.667	95.000 1.938	94.860 1.857	95.279 1.780
	0.90	90.820 1.377	89.780 1.579	89.240 1.504	90.882 1.477
Double-exponentielle	0.95	95.500 1.285	94.200 1.472	94.540 1.280	95.060 1.326
	0.90	90.240 1.062	89.140 1.201	89.340 1.037	90.620 1.094
NC(3)	0.95	95.880 1.211	94.740 1.370	94.480 1.273	95.280 1.216
	0.90	90.600 1.001	89.800 1.116	89.200 1.030	90.740 0.998
NC(5)	0.95	96.400 1.600	95.000 1.628	94.420 1.421	95.180 1.375
	0.90	91.320 1.321	89.580 1.324	89.160 1.149	90.580 1.111
NC(10)	0.95	97.760 2.699	95.040 2.134	94.560 1.719	95.200 1.716
	0.90	92.960 2.229	90.060 1.735	89.560 1.392	90.280 1.352

Note : S = Intervalle de Student; H = Intervalle de type Hogg (équation 10); J = Intervalle de type Jaeckel (équation 11); R = Intervalle déduit de tests de rangs (équation 5). La loi F_4 a pour densité $[2\Gamma((\tau+1)/\tau)]^{-1}\exp(-|x|^{\tau})]$ avec $\tau = 4$, et la loi $NC(b)$ est la loi normale contaminée $0.90\Phi(x) + 0.10\Phi(x/b)$.

Bibliographie

ANDREWS, D.F., BICKEL, P.J., HEMPEL, F.R., HUBER, P.J., ROGERS, W.H. AND TUKEY, J.W. (1972). *Robust Estimates of Location : Survey and Advances.* Princeton University Press, Princeton, N.J.

ANTILLE, A. (1972). Linéarité asymptotique d'une statistique de rang. Z. *Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb.*, **24**, 309-324.

BAUER, D.F. (1972). Constructing confidence sets using rank statistics. *J. Amer. Statist. Assoc.*, **67**, 687-690.

CAPÉRAÀ, P. et VAN CUTSEM (1988). *Méthodes et Modèles en Statistique Non Paramétrique : Exposé Fondamental.* PUL et Dunod.

BICKEL, P.J. (1982). On adaptive estimation. *Ann. Statist.*, **10**, 647-671.

DRAPER, D. (1988). Rank-based robust analysis of linear models. I. Exposition and review. *Statistical Science*, **3**, 239-271.

GASTWIRTH, J.L. (1965). Percentile modifications of two sample rank tests. *J. Amer. Statist. Assoc.*, **60**, 1127-1141.

GROSS, A.M. (1976). Confidence interval robustness with long-tailed symmetric distribution. *J. Amer. Statist. Assoc.*, **71**, 409-416.

HOGG, R.V. (1967). Some observations on robust estimation. *J. Amer. Statist. Assoc.*, **62**, 1179-1186.

HOGG, R.V. (1974). Adaptive robust procedures : A partial review and some suggestions for future applications and theory. *J. Amer. Statist. Assoc.*, **69**, 909-927.

HUBER, P.J. (1970). Studentizing robust estimates, in *Nonparametric Technics in Statistical Inference*, (M.L. Puri, ed.), Cambridge University Press, 453-463.

JAECKEL, L.A. (1969). *Robust Estimates of Location.* Unpublished Ph.D. dissertation, University of California, Berkeley.

JAECKEL, L.A. (1971). Some flexible estimates of location. *Ann. Math. Statist.*, **42**, 1540- 1552.

KAPPENMANN, R.F. (1986). Adaptative M-estimation of symmetric distribution location. *Commun. Statist.-Theor. Meth.*, **15**, 2935-2951.

LÉGER, C. et ROMANO, J.P. (1990). Bootstrap adaptative estimation : the trimmed-mean example. *La revue canadienne de statistique*, **18**, 297-314.

LEHMANN, E.L. (1983). *Theory of Point Estimation.* Wiley, New York.

LOH, W.Y. (1984). Partially-adaptative robust estimators of location via exponential embedding. *Commun. Statist.-Theor. Meth.*, **13**, 2549-2570.

PATEL, K.R., MUDHOLKAR, G.S. et FERNANDO, J.L.I. (1988). Student's t approximation for three simple robust estimators. *J. Amer. Statist. Assoc.*, **83**, 1203-1210.

PERREAULT, L. (1991). Intervalles de confiance partiellement adaptables pour un paramètre de localisation. Mémoire de maîtrise, Université Laval.

POLICELLO, G.E. et HETTMANSPERGER, T.P. (1976). Adaptative robust procedure for the one-sample location problem. *J. Amer. Statist. Assoc.*, **71**, 624-633.

PRESCOTT, P. (1978). Selection of trimming proportions for robust adaptative trimmed means. *J. Amer. Statist. Assoc.*, **73**, 133-140.

SEN, P.K. (1966). On a distribution-free method of estimating asymptotic efficiency of a class of nonparametric tests. *Ann. Math. Statist.*, **37**, 1759-1770.

SERFLING, R.J. (1980). *Approximation Theorems of Mathematical Statistics*. Wiley, New York.

STEIN, C. (1956). Efficient nonparametric testing and estimation. *Proceedings of the Third Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*, **1**, 187-196.

TUKEY, J.W. et MCLAUGHLIN, D.H. (1963). Less vulnerable confidence and significance procedures for the location based on a single sample : trimmed/winsorisation 1. *Sankhyā Series A*, **25**, 331-352.

VAN ZWET, W.R. (1964). *Convex Tranformations of Random Variables*. Mathematische Centrum, Amsterdam.

Annexe A

Proposition A.1. — *Soit F_{c_1} la loi définie sur l'intervalle $(-b, b)$, symétrique par rapport à zéro, et dont la densité est donnée par*

$$f_{c_1}(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{4} & \text{si } 0 \leqslant x < c_1, \\ \dfrac{e^{-(x-c_1)}}{[1+e^{-(x-c_1)}]^2} & \text{si } c_1 \leqslant x < b \end{cases}$$

où, pour $a \in [0,1]$, $b = 2a + \ln\left(\dfrac{2-a}{a}\right)$ et $c_1 = 2a$. On a notamment la loi logistique usuelle si $a \to 0$ et la loi uniforme sur $(-2,2)$ lorsque $a = 1$. Le R-estimateur de fonction score limite $J_{1,a}$ définie en (3) est alors asymptotiquement efficace pour la loi F_{c_1}.

Démonstration. Le R-estimateur asymptotiquement efficace pour la loi F_{c_1} a la fonction score suivante

$$\forall u \in (0,1), \quad J_{c_1}(u) = -\frac{f'_{c_1}}{f_{c_1}}\left(F_{c_1}^{-1}\left(\frac{1+u}{2}\right)\right).$$

Or, on a que

$$F_{c_1}(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{4} & \text{si } 0 \leqslant x < c_1 \\ \dfrac{c_1}{4} + \dfrac{1}{1+e^{-(x-c_1)}} & \text{si } c_1 \leqslant x < b \end{cases}$$

d'où,

$$F_{c_1}^{-1}\left(\frac{1+u}{2}\right) = \begin{cases} 2(1+u) & \text{si } 0 \leqslant F_{c_1}^{-1}\left(\frac{1+u}{2}\right) < c_1 \\ c_1 + \ln\left(\frac{2+2u-c_1}{2-2u+c_1}\right) & \text{si } c_1 \leqslant F_{c_1}^{-1}\left(\frac{1+u}{2}\right) < b \end{cases}$$

On vérifie alors aisément que

$$f'_{c_1}\left(F_{c_1}^{-1}\left(\frac{1+u}{2}\right)\right) = \frac{(1-u+a)(a-u)(u+1-a)}{4} I_{[c_1,b]}\left(F_{c_1}^{-1}\left(\frac{1+u}{2}\right)\right)$$

et que

$$\begin{aligned} & f_{c_1}\left(F_{c_1}^{-1}\left(\frac{1+u}{2}\right)\right) \\ & = \frac{1}{4} I_{[0,c_1]}\left(F_{c_1}^{-1}\left(\frac{1+u}{2}\right)\right) + \frac{(1-u+a)(u+1-a)}{4} I_{[c_1,b]}\left(F_{c_1}^{-1}\left(\frac{1+u}{2}\right)\right) \end{aligned}$$

Ainsi, la fonction score du R-estimateur asymptotiquement efficace pour la loi F_{c_1} est

$$J_{c_1}(u) = (u-a) I_{[a,1]}(u) \tag{12}$$

ce qui, à une transformation près, n'est autre que $J_{1,a}$, d'où le résultat. □

On démontre de la même façon la proposition qui suit.

Proposition A.2. — *Soit F_{c_2} la loi définie sur l'intervalle $\Re$, symétrique par rapport à zéro, et dont la densité est donnée par*

$$f_{c_2} = \begin{cases} \dfrac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2} & \text{si } 0 \leqslant x < c_2 \\ \dfrac{1}{2b} e^{-\frac{x-k}{b}} & \text{si } c_2 \leqslant x < +\infty, \end{cases}$$

où, pour $a \in (0,1)$, $c_2 = \ln\left(\frac{1+a}{1-a}\right)$, $b = \frac{2}{1+a}$ et $k = c_2 + b\ln(1-a)$. On a la loi logistique usuelle si $a \to 1$ et la loi double-exponentielle lorsque $a = 0$. Le R-estimateur de fonction score limite $J_{2,a}$ définie en (4) est alors asymptotiquement efficace pour la loi F_{c_2}.

La proposition suivante montre que la famille de lois $\{F_{c_1}; 0 \leqslant c_1 \leqslant 2\}$ et la famille $\{F_{c_2}; 0 \leqslant c_2 \leqslant +\infty\}$ sont ordonnées par l'ordre $<_s$ de van Zwet (1964). Rappelons que si F et G sont deux lois symétriques par rapport à zéro, absolument continues et de densité f et g respectivement, on dit que F a moins de poids dans les queues que G, et on note $F <_s G$, si la fonction $f(F^{-1})/g(G^{-1})$ est croissante sur l'intervalle (1/2, 1).

Proposition A.3. — *Soient les lois F_{c_1} et F_{c_2} définies aux Propositions A.1 et A.2 respectivement. Soient les quatre constantes c_1, c_1', c_2 et c_2' telles que $0 \leqslant c_1 \leqslant c_1' \leqslant 2$ et $0 \leqslant c_2 \leqslant c_2' < +\infty$. Alors,*

$$U <_s F_{c_1'} <_s F_{c_1} <_s L \tag{13}$$

$$L <_s F_{c_2'} <_s F_{c_2} <_s DE \tag{14}$$

où U, L et DE sont respectivement les lois uniforme sur $(-1, 1)$, logistique et double-exponentielle.

Démonstration. Nous devons montrer que $\dfrac{f_{c_1'}(F_{c_1'}^{-1}(u))}{f_{c_1}(F_{c_1'}^{-1}(u))}$ est croissante sur l'intervalle $(1/2, 1)$.

Posons

$$J_{c_1}(t) = \frac{f_{c_1}'(F_{c_1}^{-1}(t))}{f_{c_1}(F_{c_1}^{-1}(t))} \quad \text{et} \quad J_{c_1'}(t) = -\frac{f_{c_1'}'(F_{c_1'}^{-1}(t))}{f_{c_1'}(F_{c_1'}^{-1}(t))}$$

On vérifie sans peine que

$$f_{c_1}(F_{c_1}^{-1}(u)) = \int_u^1 J_{c_1}(t)dt \quad \text{et} \quad f_{c_1'}(F_{c_1'}^{-1}(u)) = \int_u^1 J_{c_1'}(t)dt.$$

De plus, $J_{c_1'}(t) = \gamma(t)J_{c_1}(t)$, où $\gamma(t)$, déduite de l'équation (12) en posant , $t = (1+u)/2$ s'exprime de la manière suivante

$$\gamma(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leqslant t \leqslant (2+c_1')/2 \\ \dfrac{4t-2-c_1'}{4t-2-c_1} & \text{si } (2+c_1')/2 < t \leqslant 1 \end{cases}$$

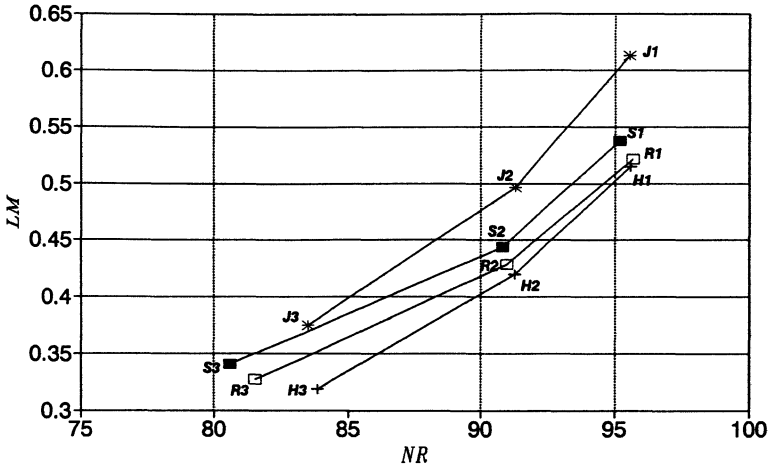
et est une fonction croissante sur (0, 1). Ainsi, on doit montrer que

$$\forall \frac{1}{2} < u \leqslant v < 1 \quad \frac{\displaystyle\int_u^1 \gamma(t)J_{c_1}(t)dt}{\displaystyle\int_u^1 J_{c_1}(t)dt} \leqslant \frac{\displaystyle\int_v^1 \gamma(t)J_{c_1}(t)dt}{\displaystyle\int_v^1 J_{c_1}(t)dt}$$

ce qui est acquis en invoquant une propriété de la dominance stochastique puisque la fonction $\gamma(t)$ est croissante (Capéraà et Van Cutsem, 1988, p.319-318).

La démonstration de (14) étant semblable à celle de (13), on peut conclure. □

Annexe B



Légende

$i = 1$ *pour* $1 - \beta = 0.95$; $i = 2$ *pour* $1 - \beta = 0.90$; $i = 3$ *pour* $1 - \beta = 0.80$

Si = *Intervalle de Student de niveau i;*

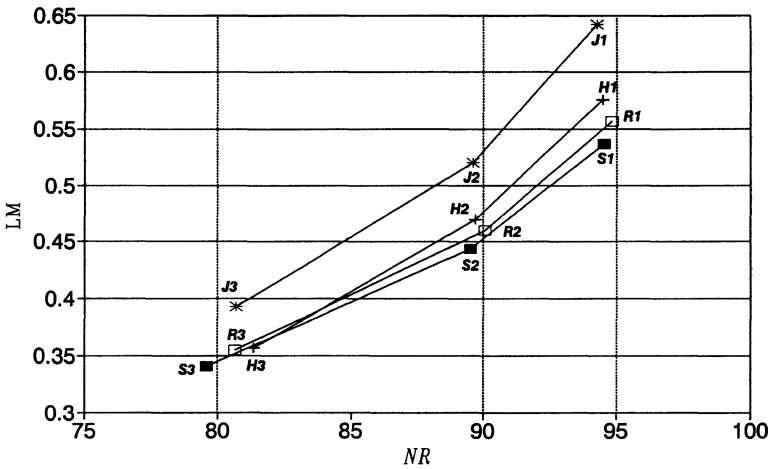
Hi = *Intervalle de type Hogg de niveau i (équation 10);*

Ji = *Intervalle de type Jaeckel de niveau i (équation 11);*

Ri = *Intervalle déduit de tests de rangs de niveau i (équation 5).*

FIGURE B.1

Longueur moyenne en fonction du niveau réel pour la loi uniforme.

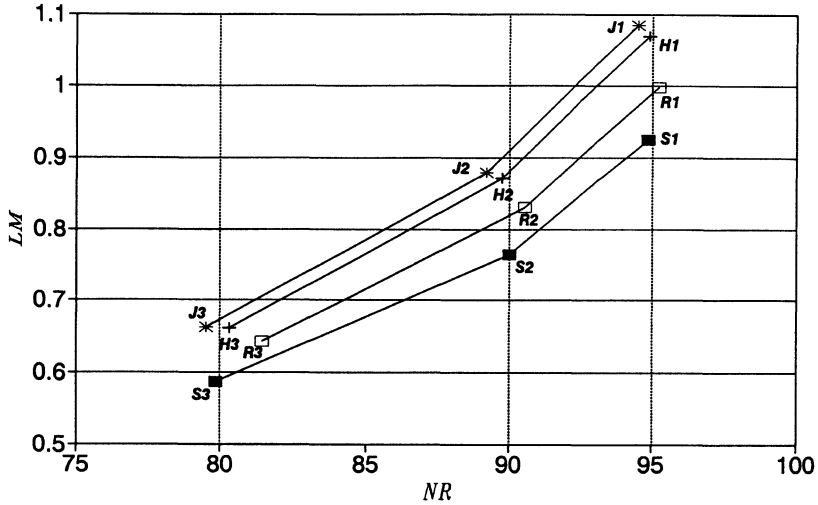


Légende

(Cf. Figure B1.)

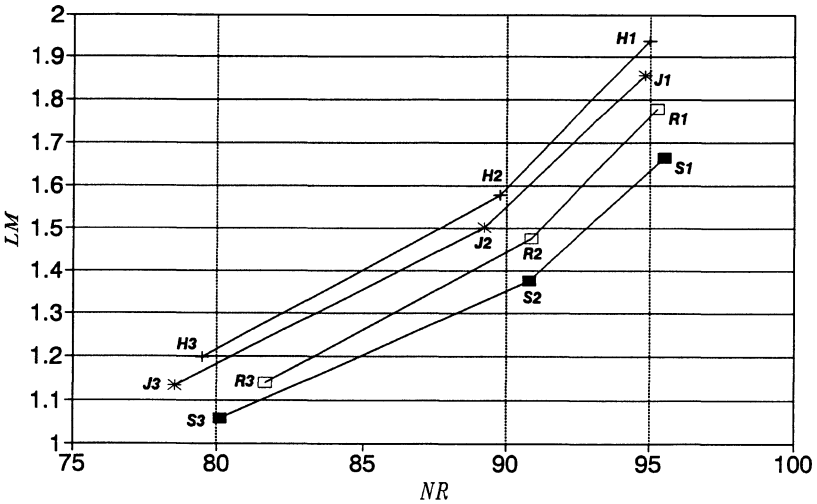
FIGURE B.2

Longueur moyenne en fonction du niveau réel pour la loi F_4.



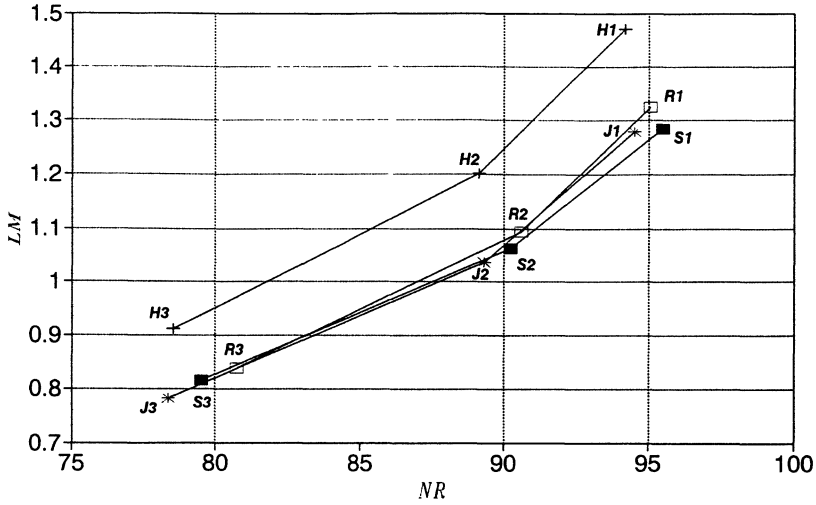
Légende
(Cf. Figure B1.)

FIGURE B.3
Longueur moyenne en fonction du niveau réel pour la loi normale.



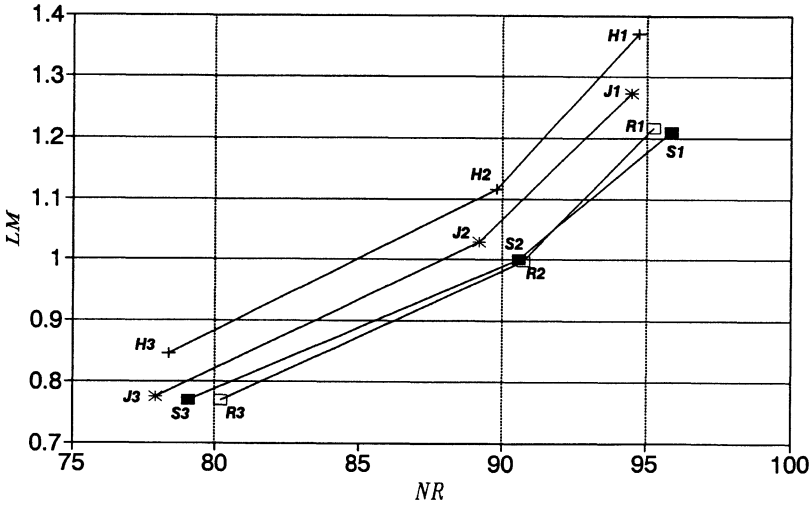
Légende
(Cf. Figure B1.)

FIGURE B.4
Longueur moyenne en fonction du niveau réel pour la loi logistique.



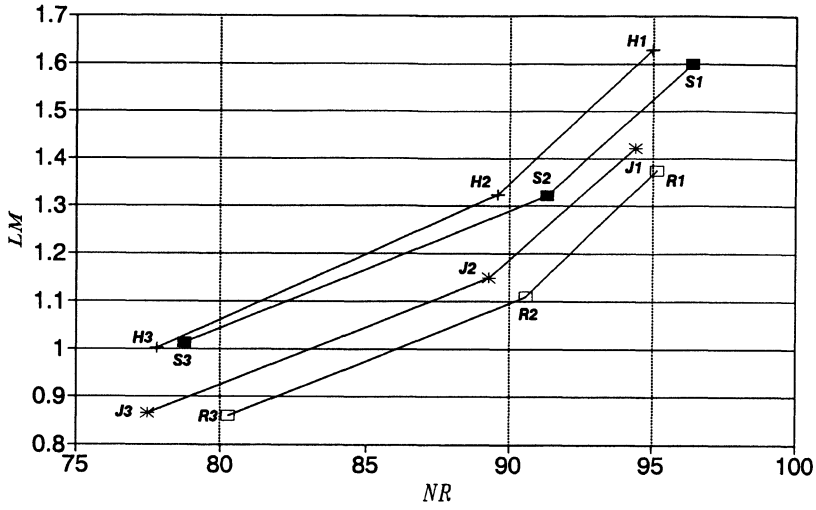
Légende
(Cf. Figure B1.)

FIGURE B.5
Longueur moyenne en fonction du niveau réel pour la loi double-exponentielle.



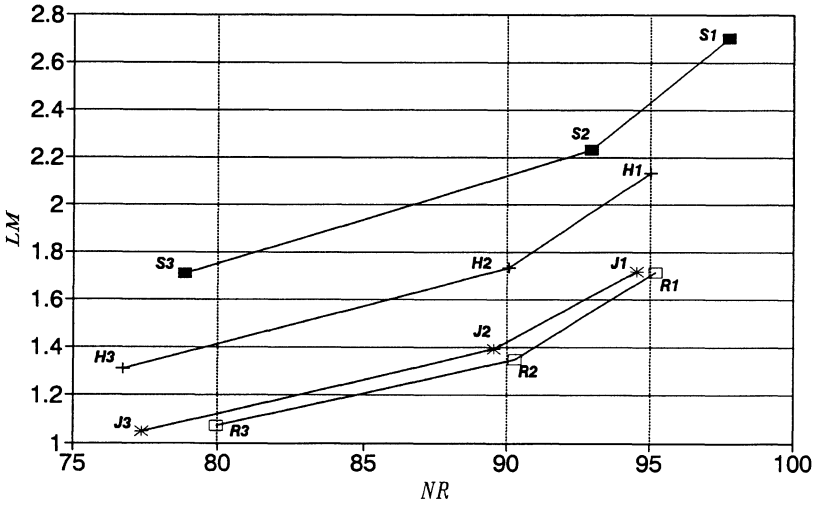
Légende
(Cf. Figure B1.)

FIGURE B.6
Longueur moyenne en fonction du niveau réel pour la loi NC(3).



Légende
(Cf. Figure B1.)

FIGURE B.7
Longueur moyenne en fonction du niveau réel pour la loi NC(5).



Légende
(Cf. Figure B1.)

FIGURE B.8
Longueur moyenne en fonction du niveau réel pour la loi NC(10).