

REVUE DE STATISTIQUE APPLIQUÉE

B. PUMO

T. DHORNE

Modèle logarithmique de régression optique. Application à l'identification des fonctions de transmittance

Revue de statistique appliquée, tome 46, n° 3 (1998), p. 65-75

http://www.numdam.org/item?id=RSA_1998__46_3_65_0

© Société française de statistique, 1998, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « *Revue de statistique appliquée* » (<http://www.sfds.asso.fr/publicat/rsa.htm>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

MODÈLE LOGARITHMIQUE DE RÉGRESSION OPTIQUE. APPLICATION À L'IDENTIFICATION DES FONCTIONS DE TRANSMITTANCE

B. Pumo, T. Dhorne

*Laboratoire de Mathématiques Appliquées, E.N.S.A.R., Laboratoire de Biométrie,
I.N.R.A., 65 rue de St Brieuc, 35042 Rennes Cedex*

RÉSUMÉ

On propose un modèle logarithmique de régression dans l'espace vectoriel optique défini par Jourlin et Pinoli (1987, 1988). Les estimateurs des paramètres d'espérance sont explicitement fournis dans deux cas : le cas discret et le cas continu quand le bruit du modèle est un processus autorégressif continu d'ordre un. Ce modèle est appliqué à la prédiction de la fonction de transmittance d'une superposition de filtres élémentaires dont les fonctions de transmittance sont connues. Enfin, une application numérique concernant l'estimation des proportions d'un mélange à partir des spectres de transmittance dans le proche infrarouge, est détaillée.

Mots-clés : théorie LIP, régression, régression continue, processus auto-régressif, spectres proche infrarouge.

ABSTRACT

We propose a logarithmic model of regression in the optical vector space defined by Jourlin and Pinoli (1987, 1988). The estimators of expectation parameters are given in two cases : in discrete case and in continuous case, when the error is a continuous autoregressive process of first order. The model is applied for the prediction of the transmissivity of an optical filter which is supposed to be a superposition of optical filters with known transmissivity function. Finally, we give a numerical application concerning the estimation of proportions of a mixture from near-infrared spectra.

Keywords : LIP theory, regression, continuous regression, autoregressive process, near-infrared spectra.

1. Introduction

Le modèle linéaire (régression, analyse de variance, ...) est assez souvent utilisé sur des images ou des signaux lumineux bien qu'il ne semble pas absolument adapté à ce type d'information. En effet l'intensité de l'image résultant de la superposition de

deux images obtenues en lumière transmise n'est pas égale à la somme des intensités respectives. La théorie LIP, introduit par Jourlin et Pinoli (1987, 1988), définit un cadre mathématique permettant de manipuler directement les intensités d'images obtenues en lumière transmise. Mayet *et al.* (1996) ont donné une description complète des opérations de base de la théorie LIP ainsi que les justifications physiques de ces opérations. Ils montrent la compatibilité du modèle avec les lois physiques de formation d'images par transmittance. La compatibilité avec la formation d'images par réflectance est démontrée dans la thèse de Deng (1993).

Les applications de la théorie LIP en traitement d'images sont nombreuses (voir Mayet *et al.* 1996). On s'intéresse dans cet article à une application particulière qui concerne l'identification d'un signal obtenu par transmittance d'une série de filtres de signaux de transmittances connues.

On présente dans la deuxième section les opérateurs optiques, l'espace vectoriel définis par Jourlin et Pinoli (1987, 1988) et le produit scalaire de cet espace (Pinoli, 1992).

Dans la section 3 on présente le modèle logarithmique de régression dans l'espace vectoriel optique. On fournit les estimateurs sans biais de variance minimale des paramètres d'espérance du modèle.

Enfin, dans la section 4, on applique le modèle logarithmique de régression optique à l'identification de proportions inconnues d'un mélange connaissant les spectres du mélange et des constituants de référence dans le proche infrarouge. Une étude complète par simulation est présentée.

2. L'espace vectoriel des opérateurs optiques logarithmiques

L'espace vectoriel optique pour les fonctions de \mathfrak{R}^p est défini par Jourlin et Pinoli (1987, 1988) et le produit scalaire de l'espace par Pinoli (1992).

2.1. Espace vectoriel optique

Soit D un sous-ensemble \mathfrak{R} . Soit $\mathcal{F}_{[0, M]}$ l'espace des fonctions définies sur D à valeurs dans $[0, M)$, M étant une valeur positive finie. La «somme optique» de deux fonctions f, g de $\mathcal{F}_{[0, M]}$ est donnée par :

$$(f \oplus g)(t) = f(t) + g(t) - f(t)g(t) / M .$$

La «multiplication optique» de f par un scalaire positif ou nul α est donnée par :

$$(\alpha \odot f)(t) = M - M [1 - f(t) / M]^\alpha .$$

Si le scalaire α est négatif la fonction $\alpha \odot f$ définie par la loi précédente est une fonction à valeurs négatives qui n'appartient pas à $\mathcal{F}_{[0, M]}$. La différence de deux fonctions f, g de $\mathcal{F}_{[0, M]}$ est la fonction h telle que $g \oplus h = f$. On note $f \ominus g$ cette

fonction. On peut montrer que h est donnée par :

$$h(t) = M[f(t) - g(t)]/[M - g(t)].$$

On remarque que h n'est pas toujours une fonction de $\mathcal{F}_{[0,M[}$. h appartient à $\mathcal{F}_{[0,M[}$ si et seulement si $f \geq g$. En particulier on obtient l'opposé de g , en prenant $f \equiv 0$. On note $\ominus g$ l'opposé de g :

$$\ominus g(t) = -Mg(t)/[M - g(t)].$$

L'opposé d'une fonction de $\mathcal{F}_{[0,M[}$ est une fonction à valeurs négatives. $\mathcal{F}_{[0,M[}$ n'est donc pas un espace vectoriel.

Soit $\mathcal{F}_{]-\infty,M[}$ l'espace des fonctions définies sur D à valeurs dans $]-\infty, M[$, muni des opérations \oplus, \odot définies ci-dessus. Cet espace est un espace vectoriel dont $\mathcal{F}_{[0,M[}$ est le cône positif (Glazman et Liubitch, p. 253).

2.2. Interprétation des opérations optiques

Les interprétations des opérations optiques suivantes sont données dans les articles de Jourlin et Pinoli (1987, 1988) et Mayet *et al.* (1996).

Soient un milieu A , $I_i^A(x)$ et $I_s^A(x)$ les intensités incidente et transmise de la lumière en x . On suppose que l'intensité transmise est donnée par la formule $I_s^A(x) = I_i^A(x)\exp[-\mu(x)]$. La transmittance de A en x est $T_A(x) = I_s^A(x)/I_i^A(x)$. La fonction à niveaux de gris associé à ce milieu (filtre) est $f_A(x) = M[1 - T_A(x)]$. Cette fonction est à valeurs dans $[0, M[$ (on suppose que $T_A(x) < 1$). Les opérations optiques sont définies sur les fonctions à niveaux de gris.

Soit B un deuxième filtre et $T_B(x)$ sa transmittance en x . Soit $C = B \circ A$ le filtre superposé. On a $T_C(x) = T_A(x)T_B(x)$ ou encore $f_C(x) = f_A(x) \oplus f_B(x)$. Ainsi la superposition des filtres correspond à la somme optique des fonctions à niveaux de gris.

Soit $\alpha > 0$, la transmittance du milieu A_α d'épaisseur α est $[I_s^A/I_i^A]^\alpha$ et la fonction à niveaux de gris associée est $M[1 - (I_s^A/I_i^A)^\alpha] = \alpha \odot f_A$. Ainsi la multiplication optique revient à considérer le même milieu d'épaisseur multipliée par α .

2.3. Produit scalaire de $\mathcal{F}_{]-\infty,M[}$

Le produit scalaire de $\mathcal{F}_{[0,M[}$ est défini par Pinoli (1992).

Supposons d'abord que $D = [a, b]$ et que les fonctions de $\mathcal{F}_{[0,M[}$ sont continues (la continuité est utile ici pour simplifier la présentation). Le produit scalaire de f et g de $\mathcal{F}_{[0,M[}$ est donné par :

$$\langle f, g \rangle = M^2 \int_D \log [1 - f(t)/M] \log [1 - g(t)/M] dt. \quad (1)$$

Le produit scalaire de deux fonctions de $\mathcal{F}_{[0,M]}$ est positif ou nul. Il est nul si et seulement si le produit $f(t)g(t) = 0$ pour tout $t \in D$.

Soient maintenant f, g quelconques de $\mathcal{F}_{]-\infty, M]}$ et f^+, f^-, g^+, g^- les parties positives et les parties négatives de f et g respectivement (Pinoli, 1991). On a $f = f^+ \ominus f^-$ et $g = g^+ \ominus g^-$. Le produit scalaire de f, g est donné par :

$$\langle f, g \rangle = \langle f^+, g^+ \rangle + \langle \ominus f^-, \ominus g^- \rangle - \langle f^+, \ominus g^- \rangle - \langle \ominus f^-, g^+ \rangle.$$

On note de nouveau $\mathcal{F}_{]-\infty, M]}$ l'espace vectoriel optique muni du produit scalaire défini ci-dessus.

Soit \mathcal{L}_D^2 l'espace des fonctions réelles continues définies sur D de carré intégrable muni du produit scalaire $(f, g)_{L^2} = \int_D f(t)g(t)dt$. La transformation F_o :

$$F_o(f) = -M \log(1 - f/M)$$

définit un isomorphisme entre les espaces $\mathcal{F}_{]-\infty, M]}$ et \mathcal{L}_D^2 .

On considère maintenant le cas $D = \{t_1, \dots, t_N\}$ fini. Soient :

$$f_N = [f(t_1), \dots, f(t_n)]^t, \quad g_N = [g(t_1), \dots, g(t_n)]^t$$

dans $\mathcal{F}_{[0,M]}$. Le produit scalaire de f_N et g_N est donné par :

$$\langle f_N, g_N \rangle = M^2 \sum_{j=1}^N \log [1 - f(t_j)/M] \log [1 - g(t_j)/M].$$

3. Modèle logarithmique de régression optique

Le modèle logarithmique de régression optique est un modèle de régression dans l'espace isomorphe \mathcal{L}_D^2 de l'espace vectoriel optique. Pour justifier un tel modèle on considère l'exemple suivant. Soit un mélange P de p produits élémentaires P_1, \dots, P_p en proportions inconnues $\alpha_1, \dots, \alpha_p$. Soient T, T_1, \dots, T_p les spectres de transmittance de ces $p + 1$ produits, mesurés dans une bande de fréquences et D l'ensemble des fréquences dont on a mesuré la transmittance. On note $T(x), T_1(x), \dots, T_p(x)$ les transmittances en $x \in D$.

Soient f, f_1, \dots, f_p les fonctions à niveaux de gris associées : $f = M(1 - T)$, $f_i = M(1 - T_i)$. En appliquant les interprétations du paragraphe 2.2, on a :

$$f = \alpha_1 \odot f_1 \oplus \dots \oplus \alpha_p \odot f_p,$$

qui s'écrit aussi :

$$F_o(f) = \alpha_1 F_o(f_1) + \dots + \alpha_p F_o(f_p).$$

3.1. Le modèle

Soit $f, \phi_1, \dots, \phi_p, p \geq 1$, des fonctions de $\mathcal{F}_{[0, M[}$. Le modèle logarithmique de régression optique est le modèle :

$$F_o(f) = \alpha_1 F_o(\phi_1) + \dots + \alpha_p F_o(\phi_p) + \epsilon, \quad (2)$$

où $\epsilon \in \mathcal{F}_{]-\infty, M[}$ est une fonction aléatoire. De plus on suppose que ϵ est stationnaire (d'ordre deux), d'espérance nulle et de fonction d'auto-covariance $K(s, t), s, t \in D$ connue. On s'intéresse dans cet article à l'estimation des paramètres d'espérance $\alpha_1, \dots, \alpha_p$. Faisons quelques remarques sur ce modèle.

Remarque 1 :

Les fonctions f, ϕ_1, \dots, ϕ_p appartiennent à $\mathcal{F}_{[0, M[}$ parce qu'elles représentent des fonctions à niveaux de gris. On peut évidemment définir le modèle pour les fonctions de $\mathcal{F}_{]-\infty, M[}$.

Remarque 2 :

Les fonctions de $\mathcal{F}_{]-\infty, M[}$ sont associées aux fonctions de transmittance qui caractérisent en général un milieu continu. Un modèle à indice continu est alors plus proche de la réalité physique, même si on dispose en général des mesures dans un ensemble discret de points.

Remarque 3 :

Les mesures successives de la transmittance sont dépendantes parce que la transmittance en un point x est la valeur moyenne des transmittances dans un voisinage de x .

Remarque 4 :

Dans l'application présentée à l'introduction de cette section on s'intéresse aux estimateurs positifs ou nuls puisque les paramètres α_i sont des proportions.

On présentera d'abord un résultat concernant le modèle de régression avec un nombre quelconque d'observations et ensuite on appliquera ce résultat sur le modèle (2).

3.2. Régression avec un nombre quelconque d'observations

Le résultat suivant est dû à Parzen (1961). Soit le processus $(X(t), t \in D \subset \mathbb{R})$ de fonction d'auto-covariance connue $K(s, t), s, t \in D$. La régression linéaire en D est le modèle :

$$X(t) = \beta_1 m_1(t) + \dots + \beta_p m_p(t) + \eta(t), t \in D,$$

qu'on écrira dans la suite simplement :

$$X = \beta_1 m_1 + \dots + \beta_p m_p + \eta. \quad (3)$$

Les fonctions $m_1(t), \dots, \beta_p(t)$ sont connues. On suppose que $(\eta(t), t \in D)$ est un processus stationnaire d'ordre deux d'espérance nulle et de fonction d'autocovariance $K(s, t), s, t \in D$. Un estimateur de β_i est linéaire s'il appartient à l'espace engendré par les combinaisons linéaires finies de la forme :

$$\sum_{i=1}^n c_i X(t_i), \quad c_i \in \mathfrak{R}, \quad t_i \in D.$$

Soit $H(K)$ l'espace de Hilbert engendré par les fonctions $\{K(\cdot, t), t \in D\}$ et supposons que $m_i \in H(K)$. Soit $\langle f, g \rangle_K$ le produit scalaire de $H(K)$. Les espaces $H(K)$ et $L^2[X(t)]$ sont isomorphes. Soit $\langle X, g \rangle_K$ la fonction aléatoire de $L^2[X(t)]$ correspondant à g de $H(K)$. Si la matrice :

$$V_{mm} = \begin{bmatrix} \langle m_1, m_1 \rangle_K & \dots & \langle m_1, m_p \rangle_K \\ \vdots & & \vdots \\ \langle m_p, m_1 \rangle_K & \dots & \langle m_p, m_p \rangle_K \end{bmatrix}, \quad (4)$$

est inversible alors l'estimateur linéaire sans biais de variance minimale de β_i est la i -ème composante de :

$$\hat{\beta} = V_{mm}^{-1} [\langle m_1, X \rangle_K, \dots, \langle m_p, X \rangle_K]^t. \quad (5)$$

Pour appliquer ce résultat on doit connaître l'expression du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_K$.

3.3. Estimation de paramètres

On peut maintenant donner les estimateurs de α_i du modèle (2) en appliquant le résultat du paragraphe 3.2. Soit $H(K)$ l'espace engendré par $K(\cdot, t), t \in D, \langle \cdot, \cdot \rangle_K$ le produit scalaire de $H(K)$ et :

$$V_{\phi, \phi} = \begin{bmatrix} \langle F_o(\phi_1), F_o(\phi_1) \rangle_K & \dots & \langle F_o(\phi_1), F_o(\phi_p) \rangle_K \\ \vdots & & \vdots \\ \langle F_o(\phi_p), F_o(\phi_1) \rangle_K & \dots & \langle F_o(\phi_p), F_o(\phi_p) \rangle_K \end{bmatrix}.$$

Supposons que $V_{\phi, \phi}$ soit inversible. En appliquant le résultat de Parzen (1961) l'estimateur optimal de $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_p)^t$ est :

$$\hat{\alpha} = \begin{bmatrix} \hat{\alpha}_1 \\ \vdots \\ \hat{\alpha}_p \end{bmatrix} = V_{\phi, \phi}^{-1} \begin{bmatrix} \langle F_o(f), F_o(\phi_1) \rangle_K \\ \vdots \\ \langle F_o(f), F_o(\phi_p) \rangle_K \end{bmatrix}. \quad (6)$$

Le prédicteur correspondant de $F_o(f)$ est :

$$\widehat{F_o(f)} = \hat{\alpha}_1 F_o(\phi_1) + \dots + \hat{\alpha}_p F_o(\phi_p)$$

et celui de f est :

$$\hat{f} = F_o^{-1}(\widehat{F_o}(f)) = \hat{\alpha}_1 \odot \phi_1 \oplus \dots \oplus \hat{\alpha}_p \odot \phi_p .$$

Pour donner explicitement les estimateurs on doit connaître le produit scalaire de $H(K)$. Nous donnons l'expression du produit scalaire dans deux cas.

Cas continu avec un bruit CAR(1)

On suppose que les fonctions $F_o(\phi_i), i = 1, \dots, p$ et $F_o(f)$ sont définies et continues dans un intervalle $D = [a, b]$ et que $(\epsilon(t), t \in D)$ est un processus autorégressif continu d'ordre un de fonction d'auto-covariance :

$$K(s, t) = C e^{-\beta|s-t|} .$$

Parzen (1961) montre que dans ce cas le produit scalaire de $H(K)$ est :

$$\langle h, g \rangle_K = \frac{1}{2\beta C} \left\{ \int_a^b [h'(t) + \beta h(t)][g'(t) + \beta g(t)] dt + 2\beta h(a)g(a) \right\} .$$

Cas discret fini

Dans ce cas $D = \{t_1, \dots, t_N\}$ et $F_o(\phi_1), \dots, F_o(\phi_p), F_o(f)$ sont des vecteurs de \mathfrak{R}^N . Soit X la matrice :

$$X = [F_o(\phi_1) | \dots | F_o(\phi_p)] .$$

Ce cas est le modèle classique de Gauss-Markov. L'estimateur optimal est l'estimateur de Gauss-Markov :

$$\hat{\alpha} = (X^t K^{-1} X)^{-1} X^t K^{-1} F_o(f) \tag{7}$$

où K est la matrice $N \times N$ de terme général $K_{i,j} = \text{cov}[\epsilon(t_i), \epsilon(t_j)]$. Le produit scalaire de l'espace $H(K)$ est :

$$\langle h, g \rangle_K = h^t K^{-1} g .$$

3.3.1. Estimation des paramètres avec contraintes

On suppose maintenant que les paramètres α_i sont positifs ou nuls. On s'intéresse alors aux estimateurs vérifiant cette contrainte. Dans le cas général on peut appliquer la procédure de Waterman (1974), qui résout le problème en calculant un nombre fini d'équations de régression sans contrainte.

4. Application

L'application suivante concerne la spectroscopie dans le proche infrarouge (PIR). Un spectre PIR donne la transmittance de la lumière envoyée en fonction de la fréquence pour un ensemble de fréquences dans le PIR. Dans la section 3 on a présenté un exemple pour justifier le modèle logarithmique de régression optique. Dans cet exemple la question posée concernait l'estimation des proportions d'un mélange P de p produits P_1, \dots, P_p , connaissant leurs spectres de transmittance T, T_1, \dots, T_p .

Considérons trois produits (dans cette application le maïs, le tourteau de soja et le pois) et un mélange de ces produits dans les proportions 3 : 2 : 5. Les spectres des trois produits de référence et du mélange sont présentés dans la Figure 1. On dispose d'une deuxième répétition du spectre du mélange pour estimer le bruit de mesure. On présente dans la Figure 2 la différence des deux répétitions du spectre du mélange ainsi que ces corrélogrammes. A partir des corrélogrammes on a proposé de modéliser le bruit par un $AR(1)$ et un $CAR(1)$ (voir Jones 1985).

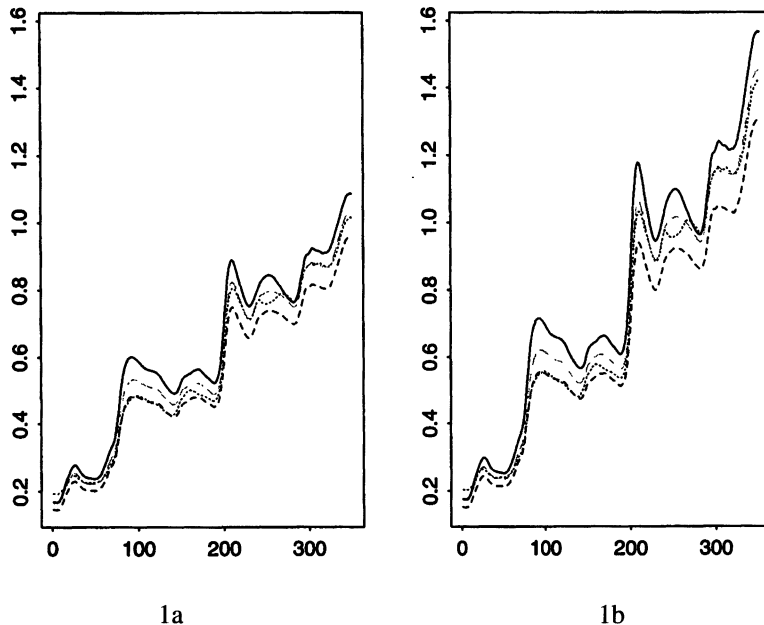


FIGURE 1

- a. Spectres des trois produits de base (maïs, tourteau de soja, pois) et du mélange.
b. Les mêmes spectres après la transformation F_0

Modélisation

On a comparé les modèles :

$$T = \beta_1 T_1 + \beta_2 T_2 + \beta_3 T_3 + \eta \quad (8)$$

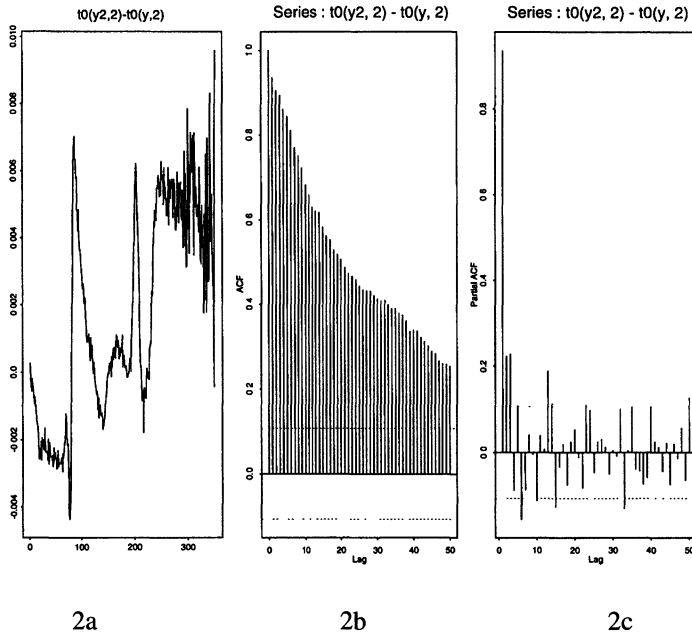


FIGURE 2

- a. Le spectre de l'erreur de mesure obtenu comme différence de deux mesures spectrales (transformés par F_o) du produit mélangé
- b. Corrélogramme du spectre de l'erreur.
- c. Corrélogramme partiel du spectre de l'erreur

où T, T_1, T_2, T_3 sont les spectres respectivement du mélange, de maïs, de tourteau de soja et de pois et :

$$F_o(T) = \alpha_1 F_o(T_1) + \alpha_2 F_o(T_2) + \alpha_3 F_o(T_3) + \epsilon. \quad (9)$$

Le premier modèle lorsque η est considéré comme un bruit blanc est utilisé souvent comme modèle de prédiction dans ce type d'application (voir Bertrand et Robert 1984). Le modèle (9) se justifie physiquement par l'interprétation 2.2.

Pour chaque modèle on a estimé les paramètres en supposant que :

- η (respectivement ϵ) est un bruit blanc discret
- η (respectivement ϵ) est un $AR(1)$
- η (respectivement ϵ) est un $CAR(1)$

Comparaison de modèles

Les estimations obtenues pour les deux modèles et pour chacun des postulats concernant l'erreur sont regroupées dans le tableau 1. Les valeurs attendues pour les paramètres $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ (respectivement $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$) sont : 0.3, 0.2, 0.5.

TABLEAU 1

Estimation des paramètres des deux modèles et l'erreur estimée de chaque modèle

η (resp. ϵ)	Modèle (8)				Modèle (9)			
	β_1	β_2	β_3	$e_{l^2} \times 1000$	α_1	α_2	α_3	$e_{l^2} \times 1000$
bruit blanc	0.30	0.16	0.57	0.862	0.27	0.17	0.60	0.751
AR(1)	0.29	0.20	0.53	0.081	0.29	0.20	0.55	0.082
CAR(1)	0.30	0.20	0.53	0.081	0.30	0.22	0.52	0.084

Dans les colonnes 4 et 8 de ce tableau on a indiqué l'erreur de prédiction e_{l^2} du modèle correspondant, e_{l^2} d'un modèle étant

$$e_{l^2} = \sum_{i=1}^{351} (x_i - \hat{x}_i)^2$$

où $(x_i, i = 1, \dots, 351)$ sont les valeurs du spectre avant ou après la transformation F_o et $(\hat{x}_i, i = 1, \dots, 351)$ sont les valeurs prédites par le modèle correspondant.

On obtient de meilleurs résultats avec les deux modèles lorsque l'erreur est modélisée par un processus autorégressif d'ordre un discret ou continu.

Les deux modèles donnent cependant des estimations comparables avec des postulats analogues sur l'erreur. On doit cependant remarquer que le modèle logarithmique optique a une justification physique, ce qui n'est pas le cas pour le premier modèle.

Bibliographie

- BERTRAND D., ROBERT P., TRAN V. (1984) *Traitement mathématiques de spectres N.I.R. de mélanges*, XI Congrès de Association Internationale de Chimie Céréalière., pp. 93-97.
- DENG G. (1993) *Image and signal processing using the logarithmic image processing model* Ph. D. Thesis, Dept. Electronic Engineering, La Trobe University, Australia.
- GLAZMANI, LIUBITCH V. (1974) *Analyse linéaire dans les espaces de dimensions finies*. Ed. Mir-Moscou.
- JONES H.R. (1985) Time series with unequally spaced data. *Handbook of statistics*, Vol. 5, 157-177. Elsevier Science Publishers B.V.
- JOURLIN M., PINOLI J.C. (1987) Logarithmic image processing. *Acta Stereol 1987, 6/III, 651-655, Proc. ICS VII CAEN*.
- JOURLIN M., PINOLI J.C. (1988) A model for logarithmic image processing. *Journal of Microscopy*, vol. 149, n° 1, 21-35.

- MAYET F., PINOLI J.C., JOURLIN M. (1996) Justification physique et applications du modèle LIP pour le traitement des images obtenues en lumière transmise. *Traitement du signal*, vol. 13, n° 3.
- PARZEN, E. (1961) An approach to time series analysis. *Ann. Math. Statist.*, vol. 32, 951-989.
- PINOLI J.C. (1991) A contrast definition for logarithmic images in the continuous setting. *Acta Stereol.*, vol. 10, n° 1, June 1991, 56-65.
- PINOLI J.C. (1992) Metrics, scalar product and correlation adapted to logarithmic images. *Acta Stereol.*, vol. 11, n° 2, December 1992, 157-168.
- WATERMAN M.S. (1974) A restricted least squares problem. *Technometrics*, vol. 16, n° 1, 135-136.